

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИАГНОСТИКА, АКУСТИЧЕСКОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ, МОЛОТОЧЕК АНДРЕЕВА И ЗОНДОВЫЕ МИКРОСКОПЫ

© 2021 г. Академик РАН О. В. Руденко^{1,2,3,*}

Поступило 29.03.2021 г.

После доработки 29.03.2021 г.

Принято к публикации 31.03.2021 г.

Описан способ диагностики, базирующийся на “акустическом взвешивании” листовых материалов. Масса дефекта или дефицит массы определяют сдвиг частоты колеблющейся мембраны. Описан измерительный прибор академика Н.Н. Андреева, изобретенный им в 1925 г. и основанный на эффекте “дребезжания” за счет “подпрыгивания” небольшого груза, лежащего на телефонной мембране. Рассчитаны гармоники, появляющиеся при достаточно больших амплитудах колебаний. Показано, что гармоники могут возникать и при работе современных высокоточных приборов, например, туннельного и атомно-силового микроскопов.

Ключевые слова: мембрана, дефект, гармоники, бесконтактная диагностика, нелинейность, молоточек Андреева, зондовый микроскоп

DOI: 10.31857/S2686740021030135

Нелинейные методы акустической диагностики сегодня нашли широкое применение в промышленности, медицине, геофизике. Важное значение в последние годы приобретает изучение структуры метаматериалов, создаваемых искусственно. Описание заметных этапов развития этого направления и соответствующая литература даны в обзорах [1–3]. Здесь обсуждается еще один метод, основанный на эффекте генерации высших гармоник основной частоты колебаний листовых материалов при появлении на их поверхности свободно лежащего инородного микрообъекта.

Производство многих листовых материалов основано на непрерывном технологическом процессе. Примерами могут служить отливка бумажного полотна (см. рис. 1), прокат металлической фольги, формирование полимерных пленок и некоторых композитных структур. Движение материала в процессе его изготовления требует бесконтактных методов возбуждения и приема акустических волн, используемых для диагностики. Кроме того, бесконтактная диагностика необходима в условиях высоких температур или агрессивных сред, где контакт невозможен; она весьма желательна также при сканировании больших площадей, когда за короткое время требуется обнаружить небольшой дефект.

Несовершенства листовых материалов разнообразны. Они могут представлять собой участки с толщиной листа, меньшей или большей стандартной (наперед заданной). Внутри материала могут возникать полости, трещины, зоны пониженной прочности. Для композитных упаковочных материалов, используемых в пищевой индустрии,

они могут представлять собой участки с толщиной листа, меньшей или большей стандартной (наперед заданной). Внутри материала могут возникать полости, трещины, зоны пониженной прочности. Для композитных упаковочных материалов, используемых в пищевой индустрии,

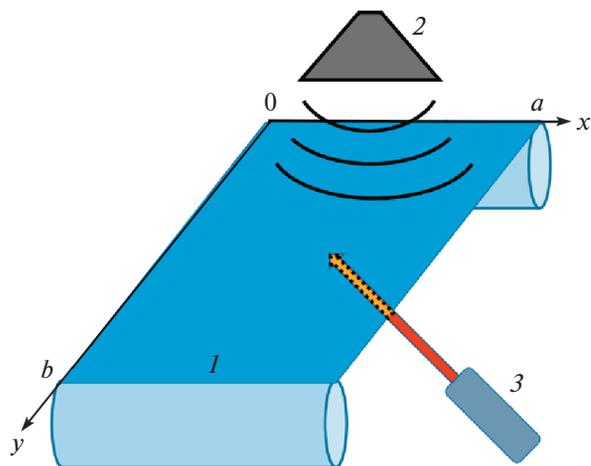


Рис. 1. Схема бесконтактной диагностики; 1 – листовый материал, 2 – источник звука, возбуждающий колебания, 3 – регистратор малых смещений.

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

³Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

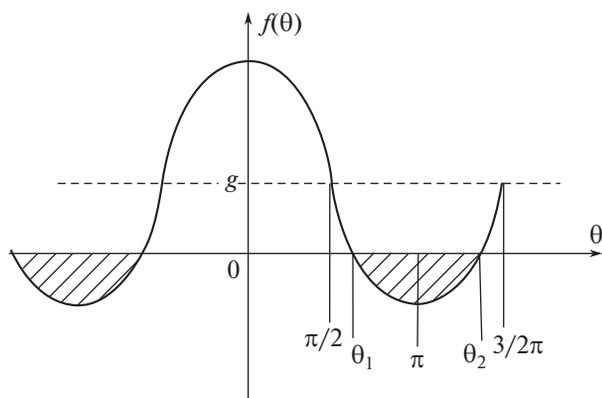


Рис. 2. Ускорение частицы на мембране. Контакт отсутствует в пределах временных интервалов, отмеченных штриховкой.

стрии (содержащих, например, слои водоотталкивающего картона, полиэтилена, алюминиевой фольги), важной проблемой является обнаружение участков непрочности и повреждений слоев на сгибах, нарушающих герметичность и приводящих к порче продуктов в результате ферментации.

Одна из возможных схем установки для бесконтактной диагностики приведена на рис. 2 в работе [4]. Там, как и на нашем рис. 1, листовый материал (например, движущееся бумажное полотно) помещен между зажимами растягивающего устройства. Статическое нагружение тонких листов придает им упругие свойства и позволяет совершать колебания подобно мембранам. Для ряда листовых материалов требуется учитывать их собственную упругость. Возбуждение колебаний может производиться, например, громкоговорителем, а прием – лазерным виброметром. Движущийся материал обычно растягивается вращающимися валиками, которые приводят ленту в движение.

СДВИГ ЧАСТОТЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФЕКТА

Колебания натянутой мембраны, обладающей собственной упругостью, описываются уравнением [5]

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \Delta s + d^2 \Delta \Delta s = -\frac{p(x, y, t)}{\rho h}. \quad (1)$$

Здесь $s(t, x, y)$ – смещение поверхности мембраны по нормали к плоскости (xy) , совпадающей с ее равновесным положением (т.е. вдоль оси z), Δ – двумерный оператор Лапласа, c – скорость распространения изгибных волн при отсутствии собственной упругости материала, p – внешнее давление на поверхность мембраны. При этом [5]

$$c^2 = \frac{T}{\rho h}, \quad d^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\sigma^2)}. \quad (2)$$

Константы имеют следующий смысл: T – сила натяжения на единицу длины края, ρ , E , σ , h – плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона материала и толщина мембраны. Форма – прямоугольник со сторонами a и b .

Рассмотрим вначале колебания однородной ненагруженной мембраны, полагая правую часть уравнения (1) равной нулю. В соответствии с рис. 1 считаем границы $y = 0$, $y = b$ закрепленными, а $x = 0$, $x = a$ – свободными. Для малого вклада собственной упругости по сравнению с упругостью натяжения решение (1) можно представить в виде суммы “мембранных” мод:

$$s = \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \sin(\omega_{mn} t). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), найдем приближенные значения собственных частот:

$$\omega_{mn} = c \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \times \left\{ 1 + \frac{d^2}{2c^2} \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4)$$

Выражение (4) справедливо, когда второй член в фигурных скобках мал по сравнению с единицей. Используя формулы (2), запишем указанное условие в следующем виде:

$$\mu = \frac{\pi^2}{24} \frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)Ta^2} \ll 1. \quad (5)$$

Для алюминиевой фольги, например, имеем оценку $\mu \approx 3 \times 10^{10} h^3 / Fa$. Отсюда следует, что для фольги шириной $a = 0.1$ м, нагруженной силой $F = 10$ Н, условие (5) хорошо выполняется при толщине фольги $h = 0.1$ мм, но нарушается уже при толщине $h = 0.25$ мм. Итак, собственная упругость приводит к смещению частоты моды вверх по спектру. При этом относительная величина смещения равна

$$\frac{\omega_{mn} - \Omega_{mn}}{\Omega_{mn}} = \frac{d^2}{2c^4} \Omega_{mn}^2 \sim \mu, \quad \Omega_{mn} = c \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Сдвиг частоты (6) может измениться из-за деградации упругих свойств материала (например, при накоплении усталостных микродефектов), а так-

же при наличии трещин или локальном изменении плотности или толщины листа.

Пусть к листу прикреплена масса m' , размер которой мал по сравнению с характерной длиной изгибной волны. Масса колеблется по закону

$$m' \frac{d^2 s_1}{dt^2} = -S p(x, y, t). \quad (7)$$

Если при колебаниях масса от мембраны не отрывается, то $s_1 = s$. В свою очередь, масса давит на мембрану, в результате чего правая часть уравнения (1) примет вид

$$-\frac{m'}{\rho h S} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \delta\left(\frac{x-x_0}{l_1}\right) \delta\left(\frac{y-y_0}{l_2}\right). \quad (8)$$

Здесь $S = l_1 l_2$ – площадь контакта; в силу ее малости распределение давления по мембране аппроксимировано дельта-функциями (8).

Подставляя формулу (8) в уравнение (1), найдем выражения для собственных частот:

$$\omega_{mn}^2 = \Omega_{mn}^2 \frac{1 + \frac{d^2}{c^4} \Omega_{mn}^2}{1 + 2\beta_m \frac{m'}{M} \cos^2\left(\pi m \frac{x_0}{a}\right) \sin^2\left(\pi n \frac{y_0}{b}\right)}, \quad (9)$$

где $M = \rho h a b$ – масса мембраны, $\beta_0 = 1$, $\beta_m = 2$ ($m > 1$). Видно, что локальная нагрузка смещает собственную частоту вниз. Смещение определяется отношением масс груза и мембраны m'/M . Это смещение проявляется лишь в том случае, если возбуждается мода, имеющая пучность в окрестности точки x_0, y_0 нахождения нагрузки. Очевидно, что грузик, находящийся в узле, частоту моды не смещает.

Измерение сдвига частоты проведено в работе [6]. Лента ($a = 3$ см, $b = 55$ см) тонкого ($h = 0.1$ мм) картона закреплялась в испытательной машине. Подавалось растягивающее усилие 16 Н. Лента возбуждалась на основной моде $m = 0, n = 1$. В качестве нагрузки использовался набор полосок из того же картона, которые последовательно приклеивались в середине ленты $y = b/2$ – там, где данная мода имеет пучность. Кривая зависимости сдвига частоты от m'/M хорошо соответствовала теории.

Аналогичным образом измеряется сдвиг частоты, отвечающий локальному дефициту массы (m' отрицательно). Сдвиг вызывается наличием внутренней полости или трещины в материале. Результаты соответствующих измерений описаны в работе [4].

Для упрощения последующих формул мы будем считать, что возбуждается мода, имеющая пучность в месте нахождения дефекта и опускать соответствующие индексы.

Рассмотрим дефект, поведение которого моделируется уравнением гармонического осциллятора:

$$m' \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \eta \frac{ds_1}{dt} = -k (s_1 - s). \quad (10)$$

Здесь s_1 – смещение дефекта, s – смещение мембраны, k – коэффициент упругой связи дефекта с мембраной. Примером такого дефекта может служить слабо склеенный участок тяжелого слоя, находящегося внутри композита или на поверхности; очевидно, его смещение s_1 отличается от смещения s . Определяя из уравнения (10) силу, действующую локально на мембрану при гармонических колебаниях, можно найти соотношение, определяющее частоту:

$$\omega^2 \left(1 + 2\beta \frac{m'}{M} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega}\right) = \Omega^2 \left(1 + \frac{d^2}{c^4} \Omega^2\right). \quad (11)$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{k}{m'}$ – квадрат собственной частоты колебаний дефекта, $\delta = \frac{\eta}{2m'}$ – коэффициент затухания.

Из формулы (11) следует, что при большой собственной частоте дефекта ω_0 частота колебаний мембраны ω сдвигается вниз по спектру. Если же дефект “мягкий”, сдвиг происходит в высокочастотную область.

АНГАРМОНИЗМ ПРИ ПОЯВЛЕНИИ СВОБОДНОГО ДЕФЕКТА

Рассмотрим теперь нелинейное поведение дефекта. Простейшим примером может служить движение частицы массой m' , свободно лежащей на горизонтальной мембране и прижатой к ней силой тяжести. При малых амплитудах колебаний частица будет двигаться вместе с мембраной. Однако при больших амплитудах, когда колебательное ускорение превысит величину ускорения силы тяжести, частица отсоединится от мембраны и будет двигаться свободно в течение какой-то части периода. Затем частица вновь столкнется с мембраной и движение опять будет совместным.

Уравнение движения для такого дефекта будет иметь вид

$$m' \frac{d^2 s_1}{dt^2} = -m'g + Sp. \quad (12)$$

Здесь p – давление на грузик со стороны мембраны. При движении мембраны по гармоническому закону $s_1 = s_0 \cos \omega t$ на нее со стороны грузика действует сила

$$F = -Sp = m'(g + s_0 \omega^2 \cos \omega t) = m'f(\theta = \omega t). \quad (13)$$

Функция $f(\theta)$ изображена на рис. 2. Когда амплитуда колебаний s_0 мембраны (при фиксиро-

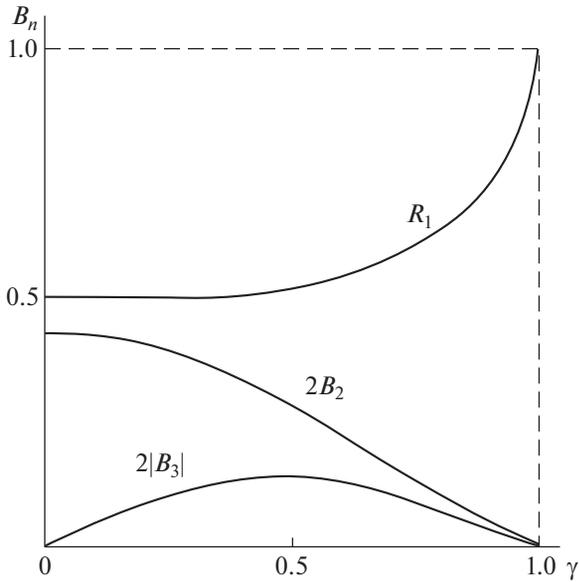


Рис. 3. Амплитуды гармоник в спектре ускорения частиц на колеблющейся мембране.

ванной частоте) возрастет настолько, что в некоторые промежутки времени функция $f(\theta)$ будет принимать отрицательные значения (на рис. 2 эти области заштрихованы), масса m' начнет “подпрыгивать”.

Описанное явление лежит в основе чувствительного метода измерения амплитуды колебаний телефонной мембраны и соответствующего прибора, известного как “молоточек Андреева” [7]. Он был создан родоначальником отечественной акустики Н.Н. Андреевым еще в 1925 г. [8]. Очень ясное описание “молоточка”, данное Л.И. Мандельштамом, полезно как с познавательной, так и с исторической точки зрения, поэтому целесообразно его процитировать (см. [7]):

“Будем постепенно увеличивать амплитуду колебаний мембраны. Пока она мала, грузик будет двигаться вместе с мембраной. Когда амплитуда возрастет настолько, что будет выполнено условие $s_0 \geq \frac{g}{\omega^2}$, масса начнет подпрыгивать. Если на телефонной мембране лежит шарик, то при малых токах все будет спокойно, но в определенный момент начнется дребезжание. Определив момент начала дребезжания, можно, зная ω , вычислить s_0 . Например, при частоте 200 Гц дребезжание начнется при амплитуде смещения 0.006 мм. Получается очень чувствительный метод измерения амплитуды. ...Что здесь поучительно? Большая чувствительность достигается благодаря тому, что при колебательных процессах ускорение чрезвычайно быстро растет с частотой. ...При больших частотах это ведет к колоссальным уско-

рениям, даже при ничтожных смещениях. Например, пьезокварцевая пластинка колеблется с амплитудой смещения всего лишь 10^{-6} см, но с частотой 10^6 Гц. Получается максимальное ускорение $4 \times 10^4 g$ ”.

Подобные колебания, сопровождающиеся соударениями [9] с препятствиями либо в присутствии ограничений (голономных связей) [10], относятся к сильно нелинейным колебаниям.

Помимо акустической регистрации “дребезжания”, для обнаружения малой частицы полезно измерять амплитуды высших гармоник, которые неизбежно возникнут из-за ангармонического поведения функции $f(\theta)$ при больших амплитудах колебаний.

Пусть смещение происходит по гармоническому закону $s = s_0 \sin \theta$. Тогда в пределах одного периода, как видно из рис. 2, следует принять

$$\begin{aligned} f &= g + s_0 \omega^2 \cos \theta, & |\theta| < \theta_1; \\ f &= 0, & \theta_1 < |\theta| < \theta_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \pi - \varphi, & \theta_2 &= \pi + \varphi, \\ \varphi &= \arccos \gamma, & \gamma &= \frac{g}{s_0 \omega^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Разложение функции (14) в ряд по гармоникам имеет вид

$$f = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{2g}{\pi n} (-1)^n \sin n\varphi + \frac{s_0 \omega^2}{\pi} (-1)^n \times \\ &\times \left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{(n+1)} + \frac{\sin(n-1)\varphi}{(n-1)} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

В частности, для безразмерных амплитуд $B_n = \frac{A_n}{s_0 \omega^2}$ гармоник с номерами $n = 1, 2, 3$ из общей формулы (17) получаем

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \gamma + \frac{\gamma}{\pi} \sqrt{1 - \gamma^2}, \\ B_2 &= \frac{2}{3\pi} (1 - \gamma^2)^{3/2}, & B_3 &= -\frac{2}{3\pi} \gamma (1 - \gamma^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражения (17), (18) справедливы при $0 < \gamma < 1$. Модули безразмерных амплитуд (18) как функции параметра γ изображены на рис. 3.

Описанный расчет гармоник соответствует сильно упрощенной ситуации. Масса m' после отрыва от мембраны в реальных условиях начинает свободно двигаться в поле силы тяжести и приоб-

ретает некоторую скорость. Эта скорость, как и координата, не будут совпадать со скоростью и координатой мембраны в момент их следующей встречи. Нужно учитывать также характер соударения массы m' с мембраной, которое может быть как упругим, так и неупругим.

В учебном пособии [11] подробно рассмотрены упругие столкновения шарика поочередно с двумя параллельными стенками, одна из которых покоится, а вторая колеблется (задача 26, с. 494–496). Изменения скорости шарика после отскоков и промежутки времени между соударениями описываются точечным отображением Улама. В результате многих отскоков движение шарика может стать случайным, а его средняя скорость будет расти до некоторого максимального значения. Аналогичный механизм стохастического ускорения космических частиц (за счет множественных столкновений заряженных частиц с магнитными облаками) предложил Э. Ферми.

Применительно к “молоточку Андреева” это означает, что отскакивающий от мембраны упругий шарик (при больших амплитудах ее колебаний) будет в среднем подниматься все выше, достигая некоторого максимума.

Появление гармоник в присутствии нелинейных контактов [2] происходит не только в приборах типа “молоточка Андреева”, но и в таких современных высокоточных приборах, как зондовые микроскопы [12]. В туннельном микроскопе (за его изобретение присуждена Нобелевская премия по физике [13, 14]) измеряется ток, протекающий между металлическим зондом и проводящим образцом. Ток, возникающий в результате туннелирования электронов через узкий потенциальный барьер, сильно (экспоненциально) зависит от его ширины: $I = I_0 \exp(-\alpha z)$. Если наложить на зонд ультразвуковые колебания, туннельный ток будет таким:

$$I = I_0 \exp(-\alpha z - \alpha s_0 \cos \omega t) = \\ = I_0 \exp(-\alpha z) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n I_n(\alpha s_0) \cos n\omega t.$$

Амплитуды гармоник выражаются через модифицированные функции Бесселя. Здесь $\beta_0 = 1$; $\beta_n = 2$ ($n > 1$). Если наложены не гармонические, а случайные колебания с интенсивностью σ^2 (например, тепловой шум), получается такая формула:

$$I = I_0 \exp(-\alpha z + 0.5\alpha^2 \sigma^2).$$

Аналогичные выражения для измеряемых величин нетрудно получить для атомного силового микроскопа и других зондовых приборов. Гармоники можно регистрировать с высокой точностью, как это делается в задачах нелинейной акустической диагностики [2].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен К. Хедбергу (С.М. Hedberg) и Ш. Као-Вальтер (S. Kao-Walter) за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 19-12-00098.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rudenko O.V.* Nonlinear methods in acoustic diagnostics // Russian Journal of Nondestructive Testing. 1993. V. 29. № 8. P. 583–588.
2. *Rudenko O.V.* Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostic techniques // Physics-Uspekhi (Adv. Phys. Sci.). 2006. V. 49. № 1. P. 69–87. <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n01ABEH005876>
3. *Rudenko O.V.* Nonlinear Waves: some biomedical applications // Physics-Uspekhi (Adv. Phys. Sci.). 2007. V. 50. № 4. P. 359–367. <https://doi.org/10.1070/PU2007v050n04ABEH006236>
4. *Мфоумоу Е.М., Хедберг К., Као-Вальтер С.* Вибрационный анализ листовых материалов и обнаружение дефектов с помощью дистанционного возбуждения акустических колебаний // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 147–155.
5. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity. 3rd edition. N.Y.: Pergamon, 1986.
6. *Mfoumou E.M., Rudenko O.V., Hedberg C.M., Kao-Walter S.* Acoustical measurement accompanying tensile test: new modality for nondestructive testing and characterization of sheet materials // The 13th International Congress on Sound and Vibration. Vienna, Austria, July 2–6. 2006.
7. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 215–218.
8. *Андреев Н.Н.* Технический амплитудометр // Журн. прикладной физики. 1925. Т. 2. № 3–4. С. 205–212.
9. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. B., Heidelberg: Springer, 2001.
10. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* Strong nonlinearity, anisotropy, and solitons in a lattice with holonomic constraints // Wave Motion. 2019. V. 89. June. P. 104–115. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.01.001>
11. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
12. *Миронов В.Л.* Основы сканирующей зондовой микроскопии. Н. Новгород: И-т физ. микроструктур РАН, 2004. 114 с.
13. *Binnig G., Rohrer H.* Scanning Tunneling Microscopy—From Birth to Adolescence: Nobel Lecture. Stockholm, December 8, 1986 / Nobel Lectures. Physics 1981–1990. Singapore: World Scientific, 1993.
14. *Бинниг Г., Рорер Г.* Сканирующая туннельная микроскопия — от рождения к юности // Успехи физ. наук. 1988. Т. 154. № 2. С. 261–278.

NONLINEAR DIAGNOSTICS, ACOUSTIC WEIGHING, ANDREEV'S HAMMER AND PROBE MICROSCOPES

Academician of the RAS **O. V. Rudenko**^{a,b,c}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^c *Institute of the Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

A method of nonlinear diagnostics based on “acoustic weighing” of sheet materials is discussed. The defect mass or mass deficit determines the frequency shift of the vibrating membrane. The measuring device is described made by academician N.N. Andreev in 1925 and based on the effect of “rattling” due to the “bouncing” of a small load lying on the telephone membrane. The harmonics of oscillations that appear at sufficiently large amplitudes of oscillations are calculated. It is shown that harmonics can also appear during the operation of modern high-precision instruments, for example, tunneling and atomic force microscopes.