

УДК 538.9537.874

## О ЛАЗЕРЕ С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ ЧАСТОТОЙ НА ТОНКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КВАНТОВЫХ КОЛЬЦАХ

© 2021 г. А. М. Мандель<sup>1,\*</sup>, В. Б. Ошурко<sup>1,2,\*\*</sup>, С. М. Першин<sup>2,\*\*\*</sup>,  
Е. Е. Карпова<sup>1,\*\*\*\*</sup>, Д. Г. Артёмова<sup>2,\*\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.И. Коновым 15.04.2021 г.

Поступило 17.04.2021 г.

После доработки 17.04.2021 г.

Принято к публикации 27.04.2021 г.

Установлено, что тонкие полупроводниковые квантовые кольца во внешнем магнитном поле могут обладать уникальными селекционными свойствами: подбирая тип гетероструктуры и геометрические параметры кольца, можно свести его энергетический спектр к единственному одноэлектронному состоянию с заранее определенной энергией связи и орбитальным и спиновым моментом. Во внешнем магнитном поле можно дискретно менять эту энергию связи, изменяя величину поля. Обсуждается идея создания эффективного лазера с активной средой на тонких полупроводниковых квантовых кольцах с дискретно перестраиваемой частотой.

*Ключевые слова:* полупроводниковые квантовые кольца, правила отбора, лазер с дискретно перестраиваемой частотой

DOI: 10.31857/S2686740021030147

Активно растущий в последнее время интерес к полупроводниковым квантовым кольцам (тонким закольцованным квантовым нитям диаметром до нескольких десятков нм) связан в основном с двумя причинами [1–10]. Во-первых, это существование в кольцах незатухающего квантового тока (persistent currents) и связанных с ним явлений (управляемого эффекта Ааронова–Бома, дробного квантования магнитного потока и т.д.), что очень важно для задач нанoeлектроники, квантового компьютеринга и спинтроники [1, 2, 4–6]. Во-вторых, в простой геометрии квантовых колец точно решается задача многих тел, причем даже для взаимодействующих частиц [1, 2, 8–10]. Однако большое число работ в этих двух направлениях пока не затронуло вопроса о правилах отбора для энергетического спектра квантовых колец, ко-

торые, как оказалось, имеют нетривиальный характер. Две неэквивалентные гетерограницы, на которых необходимо сшивать волновые функции локализованных в кольце электронов, превращают такое кольцо в фильтр, “вырезающий” в спектре единственное электронное состояние с любыми требуемыми характеристиками.

Нетрудно понять, насколько это обстоятельство важно для квантовой электроники. Почему это свойство колец не было отмечено ранее? Дело в том, что чаще всего радиальный удерживающий потенциал кольца не рассматривают вовсе, постулируя, что и бесконечно тонкое кольцо удержит неограниченное число электронов ([1, 2, 10] и т.д.). Реже используют модельный потенциал кольцевой  $\delta$ -ямы [12], а “реалистическими” считаются потенциалы с неограниченно растущей асимптотикой [1, 2, 7, 8], приводящие к полному конфайнменту электронов.

Ситуация кардинально меняется, если моделировать радиальный удерживающий потенциал кольца ямой конечной глубины и размеров. Мы использовали простейший прямоугольный потенциал такого рода

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & r < R_1, r < R_2, \\ -\Delta E_c, & R_1 < r < R_2, \end{cases}$$

<sup>1</sup> Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: arkadimandel@mail.ru

\*\*E-mail: vbo08@yandex.ru

\*\*\* E-mail: pershin@kapella.gpi.ru

\*\*\*\* E-mail: ekarpova1@yandex.ru

\*\*\*\*\*E-mail: artyomova\_diana@mail.ru

где  $\Delta E_c$  – скачок дна зоны проводимости на гетерогранице,  $r$  и  $\varphi$  – полярные координаты в  $2D$ ,  $R_1$  и  $R_2$  – соответственно внутренний и внешний радиусы кольца. Везде в дальнейшем используются естественные единицы длины  $r_0 \equiv \hbar/\sqrt{2m^*\Delta E_c}$  ( $m^*$  – эффективная масса матричного электрона) и энергии  $\varepsilon = \frac{E}{|\Delta E_c|}$ . Фактически  $r_0$  – дебройлевская длина электрона на дне зоны проводимости матрицы с энергией, равной глубине потенциальной ямы кольца,  $\varepsilon$  – энергия в “долях” от глубины ямы. Отметим, что кольцо предполагается настолько тонким ( $R_2 - R_1 \ll R_1$ ), что зонная структура в нем “не успела” сформироваться, так что оно не стало еще фрагментом соответствующего полупроводника. Электрон, даже когда он локализован на кольце, большую часть времени проводит в матрице, так что его эффективные свойства фактически не меняются<sup>1</sup>.

В таких единицах наша модель описывается уравнением типа Шрёдингера (точнее, это пространственная часть уравнения Паули, соответствующая двум электронным компонентам 8-столбцового тетраспинора ( $k-p$ )-теории Кейна)

$$-\Delta^{(2)}\psi(r, \varphi) - i \frac{e\hbar B}{2m^*\Delta E_c} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \left(\frac{eBr}{2\hbar}\right)^2 \psi(r, \varphi) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 - \varepsilon \pm \frac{g^*\mu_B B}{2\Delta E_c} \end{array}\right) \psi(r, \varphi) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(0, \varphi) = 0; \quad \psi(r, \varphi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta^{(2)}$  – двумерный лапласиан,  $B$  – индукция внешнего однородного магнитного поля,  $e$  – элементарный заряд,  $\varepsilon$  – энергия связи электрона в кольце, верхний индекс в фигурных скобках в правой части соответствует области матрицы (как обычно, энергия отсчитывается от дна зоны проводимости матрицы), нижний индекс – области внутри кольца,  $g^*$  – эффективный фактор Ланде для матричного электрона,  $\mu_B$  – магнетон Бора. Весь последний член в правой части – энергия взаимодействия спина электрона с магнитным полем; верхний знак соответствует направлению спина вдоль поля, нижний – соответственно против (основное состояние).

Видно, что здесь пока не учитываем спин-орбитальное взаимодействие. Это вполне можно сделать в духе [5], причем как в варианте Рашбы,

<sup>1</sup> О том, как рассчитать в такой ситуации поправки к эффективной массе и  $g$ -фактору электрона в рамках модифицированной теории Кейна, см. [13].

так и Дрессельхауза. Однако ясно, что оно, значительно усложнив угловую часть и сам незатухающий ток, слабо затронет интересующие нас радиальные условия удержания электрона в кольце. Отметим, что для функции Грина в однородном магнитном поле целесообразно использовать интегральное представление, а не разложение по уровням Ландау [14, 15].

После разделения переменных и решения уравнения для угловой части (в отсутствие спин-орбитальных поправок это довольно просто), получаем уравнение для радиальной волновой функции

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_{nq}}{dr} \right) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 - \varepsilon_{nq} + \frac{q^2}{r^2} \end{array} \right) \psi_{nq}(r) = 0, \quad (3)$$

где

$$q^2 = \left( l - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \pm \frac{g^* \Phi}{2 \Phi_0}; \quad (4)$$

$l$  – орбитальное квантовое число электрона,  $\Phi$  – магнитный поток через кольцо,  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$  – его квант (напомним, что у нас в кольце не куперовская пара, а уединенный электрон). Решение этого уравнения с граничными условиями (2)

$$\psi_{nq}(r) = \begin{cases} AI_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}r}), & r < R_1, \\ BJ_{nq}(\sqrt{1 - \varepsilon_{nq}r}), & R_1 < r < R_2, \\ DK_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}r}), & R_2 < r, \end{cases} \quad (5)$$

где  $I$ ,  $J$ ,  $K$  – цилиндрические функции соответственно Инфельда, Бесселя и Макдональда, нормировочные постоянные  $A$ ,  $B$  и  $D$  значения не имеют, а  $n$  – номер экстремума функции Бесселя, описывающего волновую функцию внутри кольца. При этом толщина кольца позволяет “вместить” окрестность только одного экстремума.

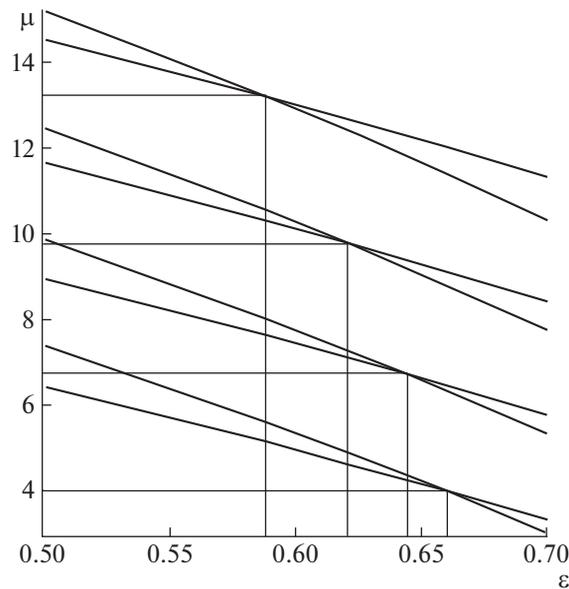
Кроме того, решение (5) должно удовлетворять трем дополнительным условиям: двум условиям непрерывности логарифмической производной на двух гетерограницах кольца

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_{nq}} J_{nq}(\sqrt{1 - \varepsilon_{nq}} R_1) \frac{dI_q}{dr} &= \\ &= -\sqrt{1 - \varepsilon_{nq}} I_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}} R_1) \frac{dJ_{nq}}{dr}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_{nq}} J_{nq}(\sqrt{1 - \varepsilon_{nq}} R_2) \frac{dK_q}{dr} &= \\ &= \sqrt{1 - \varepsilon_{nq}} K_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}} R_2) \frac{dJ_{nq}}{dr}, \end{aligned} \quad (7)$$

а также условию того, что экстремум функции Бесселя лежит внутри кольца

$$\frac{dJ_{nq}(\sqrt{1 - \varepsilon_{nq}} r_0)}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad R_1 < r_0 < R_2. \quad (8)$$



**Рис. 1.** Связь спектральных линий тонкого кольца  $\varepsilon_{nq}$  (вертикальные прямые) с величиной магнитного потока через кольцо  $\mu = \frac{\Phi}{\Phi_0}$  (горизонтальные прямые). Наклонные отрезки кривых – численное решение уравнений (6) и (7) с учетом условия (8).

Как легко убедиться, условия (6)–(8) для двух наугад выбранных близких радиусов кольца  $R_1$  и  $R_2$  при фиксированном орбитальном моменте  $l$  обычно противоречивы. Они выполняются только при определенных значениях  $\Phi$ , причем каждое соответствует единственному значению  $n$  и  $\varepsilon_{nq}$ . Другими словами, спектр тонкого квантового кольца, как правило, “пуст”; уединенный уровень появляется в нем лишь при строго определенных значениях магнитного поля и полностью этим полем определяется. Описанную ситуацию иллюстрирует рис. 1. Только в точках пересечения наклонных кривых (численные решения уравнений, соответствующих граничным условиям (6) и (7)) в кольце может локализоваться электрон со строго определенной энергией связи  $\varepsilon_{nq}$ . При этом ориентация его спина и орбитального момента  $l\hbar$  относительно магнитного поля также однозначно определены. Крайне маловероятно “случайное попадание” в тонкое кольцо с теми же радиусами при том же значении магнитного поля электронного состояния с другими параметрами. Поэтому мы вообще не рассматриваем дырочные уровни: масса дырки обычно значительно отличается от массы электрона, что сразу сказывается на условиях (6)–(8). Важно, что в весьма распространенном приближении кольцевой  $\delta$ -ямы описанный эффект пропадает, так как две неэквивалентные гетерограницы стягиваются в одну. Соответственно, вместо двух условий (6),

(7) мы получаем одно условие, определяющее “излом” (скачок производной) радиальной функции. По этой же причине подробно изученное в ряде обзоров (например, [1, 2]) бесконечно тонкое кольцо с неограниченным числом электронных состояний, скорее, на наш взгляд, математическая абстракция, чем практически реализуемая гетероструктура.

Обсудим теперь возможность лазерной генерации в среде, активными элементами которой являются ориентированные квантовые кольца. Во-первых, внешняя накачка излучающего уровня, очевидно, не требуется, так как инверсия населенности создается автоматически: излучательными будут переходы электронов из сплошного спектра у дна зоны проводимости матрицы на единственный стабильный уровень в кольце, а инверсия населенности возникает при отключении магнитного поля, когда единственный уровень в кольце исчезает. При этом электрон быстро возвращается на уровни зоны проводимости матрицы, ибо проводит именно там большую часть времени. Во-вторых, и это главное преимущество предложенной схемы – возможность дискретно менять частоту перехода простым изменением величины индукции внешнего поля.

Важным преимуществом является тот факт, что направление орбитального момента и спина электрона в кольце определяется осевой симметрией колец. Поскольку электрон в кольце – конечное состояние излучательного перехода, диф-

ференциальное сечение этого процесса как функция угла рассеивания матричного электрона будет иметь резкий пик в направлении нормали к кольцу. Фактически рассеивание матричных электронов на кольцах будет происходить только вперед. В такой геометрии, во-первых, вероятность индуцированного перехода превысит вероятность спонтанного, несмотря на известное соотношение Эйнштейна. Во-вторых, импульс излучаемых фотонов также будет естественным образом ориентирован нормально к кольцу. Это должно значительно снизить потери в резонаторах. Само время жизни “возбужденного” состояния можно регулировать, меняя орбитальный момент уровня в кольце  $l$ , все тем же изменением магнитного поля. В  $(k-p)$ -теории считается, что электрон на дне зоны проводимости матрицы находится обычно в  $S$ -состоянии. Поэтому самым коротким излучаемый импульс будет при  $l = 1$ . Увеличивая его, мы, тем самым, повышаем степень запрета перехода и, соответственно, увеличиваем длительность импульса. Таким образом, возможностей повышения эффективности такого лазера, как и возможностей управления процессом и характеристиками излучения, здесь достаточно много.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-01044 А) и Министерства высшего образования и науки РФ (грант 0707-2020-0025).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Viefers S., Koskinen P., Singha Deo P., Manninen M.* Quantum rings for beginners: energy spectra and persistent currents // *Physica E*. 2004. V. 21. № 1. P. 1–35. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2003.08.076>
2. *Manninen M., Viefers S., Reimann S.M.* Quantum rings for beginners II: Bosons versus fermions // *Physica E*. 2012. V. 46. P. 119–132. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2012.09.013>
3. *Kammermeier M., Seith A., Wenk P., Schliemann J.* Persistent spin textures and currents in wurtzite nanowire-based quantum structures. 2020. //arXiv: 2001.06571v2 8 May 2020 [cond-mat.mes-hall] <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.195418> (2020); <https://arxiv.org/pdf/2001.06571.pdf>
4. *Li B., Magnus W., Peeters F.M.* Tunable exciton Aharonov-Bohm effect oin a quantum ring // *J. of Physics: Conferens Series* 2010. V. 210. In: 11<sup>th</sup> International Conference on Optics of Excitons in Confined Systems (OECS11) 7–11 September 2009, Madrid, Spain. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/210/1/012030/meta>
5. *Lia J.M., Tamborenea P.I.* Narrow quantum rings with general Rashba and Dresselhaus spin-orbit interaction // *Physica E*. 2020. V. 126. P. 114419–114431. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2020.114419>
6. *Kozin V.K., Iorsh I.V., Kibis O.V., Shelykh I.A.* Periodic array of quantum rings strongly coupled to circularly polarized light as a topological insulator // *Phys. Rev. B*. 2018. V. 97. P. 035416–035423. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.035416>
7. *Tan W.-C., Inkson J.* Electron states in a two-dimensional ring – an exactly soluble model. // *Semiconductor Science and Technology*. 1996. V. 11. № 11. P. 1635–1649. <https://doi.org/10.1088/0268-1242/11/11/001>
8. *Zipper E., Kurpas M., Sadowski J., Maska M.* Semiconductor quantum rings as a solid-state spin qubit // arXiv: 1011.2540v1. [cond-mat.mes-hall] 11 Nov 2010 [https://www.academia.edu/34947381/Semiconductor\\_quantum\\_ring\\_as\\_a\\_solid\\_state\\_spin\\_qubit](https://www.academia.edu/34947381/Semiconductor_quantum_ring_as_a_solid_state_spin_qubit)
9. *Loos P.-F., Gill P.* Exact Wave Function of Two-Electron Quantum Rings // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. P. 083002–083006. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.108.083002>
10. *Говоров А.О., Чаплик А.В., Вендлер Л., Фомин В.М.* Зависит ли незатухающий ток в квантовых кольцах от межэлектронного взаимодействия // *Письма в ЖЭТФ*. 1994. Т. 60. № 9. С. 633–636. [http://www.jetpletters.ac.ru/cgi-bin/articles/download.cgi/1351/article\\_20409.pdf](http://www.jetpletters.ac.ru/cgi-bin/articles/download.cgi/1351/article_20409.pdf)
11. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands // *Proc. Roy. Soc. London A*. 1963. V. 276. P. 238–257. <https://doi.org/10.1098/rspa.1963.0204>
12. *Meijer F.E., Morpurgo A.F., Klapwijk T.M.* One-dimensional ring in the presense of Rashba spin-orbit interection: Derivation of the correct Hamiltonian // *Phys. Rev. B*. 2002. V. 66. 033107. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.033107>
13. *Мандель А.М., Ошурко В.Б., Карнова Е.Е.* Механизм перенормировки фактора Ланде и эффективной массы в малых сферических квантовых точках // *Радиотехника и электроника*. 2019. Т. 64. № 10. С. 1010. <https://doi.org/10.1134/S1064226919100085>
14. *Родионов В.Н., Кравцова Г.А., Мандель А.М.* Отсутствие стабилизации квазистационарных состояний электрона в сильном магнитном поле // *ДАН*. 2002. Т. 386. № 6. С. 753–755.
15. *Родионов В.Н., Кравцова Г.А., Мандель А.М.* Волновая функция и распределение токов вероятности связанного электрона, движущегося в однородном магнитном поле // *ТМФ*. 2010. Т. 164. № 1. С. 157–171.

## LASING ON THIN SEMICONDUCTOR QUANTUM RINGS WITH TUNABLE FREQUENCY

**A. M. Mandel<sup>a</sup>, V. B. Oshurko<sup>a,b</sup>, S. M. Pershin<sup>b</sup>, E. E. Karpova<sup>a</sup>, and D. G. Artemova<sup>b</sup>**

*<sup>a</sup>MSTU "STANKIN", Moscow, Russian Federation*

*<sup>b</sup>Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Konov

For the first time, as far as we know, it has been established that thin semiconductor quantum rings in an external magnetic field have unique selection properties. It is possible to reduce the spectrum of the ring to a single one-electron state with a predetermined binding energy and orbital and spin moment. This binding energy is controlled by the value of the external magnetic field. The idea of creating an economical discretely tunable frequency laser based on thin quantum rings as active elements is discussed.

*Keywords:* semiconductor quantum rings, selection rules, discretely tunable frequency lasing