ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 499, с. 30–35

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И НОВЫЙ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ

 Академик РАН В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1], О. М. Бабешко[2]

Поступило 30.03.2021 г.
После доработки 30.03.2021 г.
Принято к публикации 12.05.2021 г.

Исследования авторов последнего времени по разработке теории и приложений блочных элементов в задачах механики и физики неожиданно привели к возможности трактовки еще одной особенности этих механико-математических объектов. Следуя идее Бенуа Мандельброта о фрактальности, т.е. самоподобии, в природе, проведено исследование блочных элементов как объектов, обладающих фрактальными свойствами. Показано, что известные природные явления, процессы и объекты, описываемые граничными задачами для дифференциальных уравнений в частных производных и системами таких уравнений, имеют в качестве решений самоподобные упакованные блочные элементы. Более того, выделяется особая роль упакованных блочных элементов, порождаемых граничными задачами для простейших волновых уравнений, или уравнений Гельмгольца. В множестве упакованных блочных элементов, для граничных задач природных процессов, они являются объектами дискретного топологического пространства, обладают максимальной топологией, представляя своими объединениями все остальные блочные элементы множества. В то же время волновое уравнение или уравнение Гельмгольца являются аналогами уравнения Шрёдингера, лежащего в основе квантовой механики. Уравнение Шрёдингера описывает состояния элементарных частиц квантовой механики. В связи с этим складывается ситуация, в которой первоосновой как квантового мира, так и оговоренных природных процессов являются самоподобные названные уравнения, выполняющие свои функции в соответствующих масштабах. Упакованные блочные элементы, порождаемые граничными задачами для таких же уравнений, как и для уравнения Шрёдингера, выполняют свои функции в сплошной среде, а состояния элементарных частиц описываются подобными уравнениями в квантовой механике.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничные задачи, системы дифференциальных уравнений, преобразование Галёркина, нелинейные задачи, квантовые аналогии

DOI: 10.31857/S2686740021040039

ВВЕДЕНИЕ

1. Через посредство дифференциальных уравнений, достаточно точно описывающих реальные процессы, обнаруживаются некоторые фрактальные свойства блочных элементов, которые в природе впервые были введены Мандельбротом [1].

Ограничим круг рассматриваемых природных объектов и происходящих в реальности процессов теми из них, которые описываются системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, для которых применимо преобразование Галёркина. К ним добавляются уравнения с переменными коэффициентами, допускающие такое дробление области их задания на подобласти, при котором в каждой подобласти можно считать коэффициенты постоянными, с указанными свойствами. Добавляются нелинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных, обладающие свойствами, требуемыми условиями применения метода Ньютона–Канторовича, а линеаризованное уравнение обладает описанными выше свойствами линейных уравнений [2]. Доказывается, что по крайней мере для этого класса процессов и явлений упакованные блочные элементы являются фракталами, т.е. самоподобными по своим свойствам, при описании решений граничных задач для всех оговоренных систем дифференциальных уравнений. Описанные выше дифференциальные уравнения относятся к механике сплошных сред, гидромеханике, теории поля, математической физике и смежным областям.

[1] *Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
******E-mail: babeshko41@mail.ru*

2. В настоящее время опубликовано достаточное количество работ по применению метода блочного элемента, анализ которых позволил авторам сделать некоторые общие заключения о свойствах блочных элементов, не заметных, при анализе лишь отдельных работ. Для этого вначале кратко изложим один из способов построения блочных элементов, останавливаясь на наиболее важных моментах при их создании.

В основе метода блочного элемента лежат факторизационные методы. Наиболее обще, опираясь на теорию нормированных колец, они были исследованы и описаны в работах Н. Винера, М.Г. Крейна, И.Ц. Гохберга, Б. Нобла [3–6]. Более узкий круг задач решался методом сингулярного интеграла, базировавшегося на формуле Сохоцкого [7]. Их исследования посвящены анализу интегральных уравнений и порождаемых ими функциональных уравнений для функций одного комплексного переменного. В работах авторов этот подход был назван интегральным методом факторизации. Блочные элементы возникли в результате проникновения факторизационных методов непосредственно для анализа свойств граничных задач механики сплошной среды и их решений. Этот подход был назван дифференциальным методом факторизации.

Он позволяет строить решения ряда граничных задач как для отдельных уравнений, так и для их систем. Теория блочных элементов для анализа и решения граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений развивалась в работе авторов [7]. Их построение включает такие этапы, как внешняя алгебра, внешний анализ, фактор-топология. Для случая граничной задачи для дифференциальных уравнений или их систем в частных производных с постоянными коэффициентами, рассматриваемых на носителе, этап внешней алгебры включает построение внешних форм. Для этого осуществляется погружение граничной задачи в топологическое пространство и построение внешних форм, формируемых рассматриваемыми дифференциальными уравнениями граничной задачи [9–11]. На этом этапе применением интеграла Стокса, преобразующего объемный интеграл от внешней формы в интеграл по границе, получаются функциональные уравнения, эквивалентные исходной граничной задаче:

$$K\Phi = \int_{\partial\Omega} \omega. \tag{1}$$

Левые части соотношения имеют коэффициент функционального уравнения K в форме матрицы-функции для системы, или одной функции для отдельного уравнения. Правые части функционального уравнения содержат внешние формы, в которые входят, как неизвестные, все типы граничных условий, допустимых в рассматриваемой области дифференциальными уравнениями. Заданные на границе граничные условия вносятся во внешние формы, остальные выражения для граничных условий являются неизвестными и нуждаются в определении. Следующий этап называется внешним анализом, поскольку связан с преобразованием внешних форм и поиском способа нахождения названных неизвестных.

Способ их нахождения опирается на факторизационный прием. Он был построен и обоснован в ряде работ авторов. Для этого необходимо преобразование автоморфизма, состоящего в требовании расположения вектора решения граничной задачи в области, в которой поставлена граничная задача, т.е. эта область обязана быть носителем решения граничной задачи.

Выполнив это действие, получаем для вектора Φ удовлетворение дифференциальным уравнениям во внутренности носителя, а при замыкании – и заданным граничным условиям поставленной задачи. Достижение требования автоморфизма сводится к факторизации некоторых матриц-функций, реализуемых вычислением форм-вычетов Лере [9]. Для правильного выбора полюсов, в которых необходимо найти формы-вычеты Лере, требуется осуществить дифференциальную факторизацию матрицы-функции коэффициента функционального уравнения. Способ ее построения описан в [4, 5] и ряде работ авторов. Вычисленные формы-вычеты Лере формируют псевдодифференциальные уравнения, решения которых дают необходимые составляющие, которые обеспечивают представление внешней формы только от заданных граничных условий. Воздействие на функциональное уравнение (1) обратной матрицей-функцией коэффициента K функционального уравнения позволяет получить точное решение исходной граничной задачи в аналитическом виде упакованного блочного элемента. Таким образом, упакованный блочный элемент – это топологический объект, имеющий вектор решения на носителе, внутреннее, открытое множество которого удовлетворяет дифференциальным уравнениям, а замыкание – граничным условиям граничной задачи. Совокупности упакованных блочных элементов могут появляться в результате объединения реально или фиктивно отделенных их носителей вместе с решениями. Фиктивно – означает условное дробление носителя на более мелкие части. Топологическое пространство является дискретным хаусдорфовым пространством, его формируют только внутренности блочных элементов, являющиеся отделенными открытыми множествами. Всевозможные объединения его элементов также являются объектами этого топологического пространства, а каждый элемент имеет замыкание [12]. Для осуществления объединения блочных элементов таким образом, чтобы получить связные элементы, необходимо построить топологическое пространство фактортопологий, приняв в качестве отношений эквивалентности граничные условия решений контактирующих блочных элементов. Это достигается сопряжением открыто-замкнутых окрестностей границы как носителей, так и решений граничных задач на носителях [12].

В результате объединения получается новый упакованный блочный элемент, содержащий объединенный носитель.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Опыт построения и преобразований блочных элементов опубликован в значительном числе работ авторов. Удобными областями для исследования, с учетом вышесказанного, являются в качестве компактной – квадрат в двумерной области и плоской квадрант, как не компактная область. Все результаты без труда переносятся на трехмерные случаи. Здесь принято во внимание, что сложные области и переменные коэффициенты могут быть описаны квадратами или кубами малых размеров, а некомпактные области рассматриваются для описания областей с границами, уходящими на бесконечность. Будем считать, что в этих областях поставлены граничные задачи для указанных выше систем дифференциальных уравнений с некоторыми граничными условиями, например, условиями Дирихле. Будем считать, что рассматривается корректно поставленная в одной из названных областей, обозначаемых Ω, граничная задача для системы из M дифференциальных уравнений с некоторым набором граничных условий, удовлетворяющих условиям дополнительности Шапиро–Лопатинского.

Запишем эти уравнения по аналогии с [13] в следующем виде:

$$L_{mn}(u_n) = 0, \quad m,n,= 1,\, 2,\, \ldots,\, M, \quad \partial_m^h = \frac{\partial^h}{\partial x_m^h}. \qquad (2)$$

Здесь L_{mn} – дифференциальные операторы, к примеру, для системы уравнений Ламе они имеют вид $L_{mn} = \delta_{mn}\Delta + \sigma\partial_m^2\partial_n^2$, где Δ – оператор Лапласа.

Допустив, что дифференциальные операторы L_{mn}, например, имеют четный порядок производных $2s$, тогда дифференциальный оператор L будет иметь порядок производных $2Ms$, и для корректности постановки граничной задачи в области Ω должны быть заданы, как минимум, Ms граничных условий $\Gamma_k(u_n)$, $k = 1, 2, \ldots, Ms$, линейно зависящих от u_n и их производных.

Построение решения векторной граничной задачи в области Ω можно осуществлять прямым применением метода блочного элемента к этой системе дифференциальных уравнений, что приводит к функциональному уравнению с матричным коэффициентом, и необходимости факторизации матрицы-функции. Решение получается компактным, но достаточно сложным. Значительно более простая форма представления решения векторной граничной задачи получается предложенным ниже новым достаточно универсальным методом блочного элемента, сводящим векторную граничную задачу к скалярным, заведомо приводящим сложное компактное решение граничной задачи разложенным по решениям более простых скалярных граничных задач [14].

Осуществим преобразование Галёркина, положив

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & \cdots & L_{1M} \\ \chi_2 & L_{22} & \cdots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ \chi_M & L_{2M} & \cdots & L_{MM} \end{vmatrix},$$

$$u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & \cdots & L_{1M} \\ L_{12} & \chi_2 & \cdots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ L_{1M} & \chi_M & \cdots & L_{MM} \end{vmatrix} \ldots, \qquad (3)$$

$$u_M = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & \chi_1 \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & \chi_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ L_{1M} & L_{2M} & \cdots & \chi_M \end{vmatrix}.$$

В результате вычислений и упрощений для определения функций χ_2 получается следующая система M независимых дифференциальных уравнений

$$L\chi_m = 0, \quad L = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1M} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ldots\vdots & \vdots \\ L_{1M} & L_{2M} & \cdots & L_{MM} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Раскрыв определитель и осуществив возможные преобразования, получаем дифференциальные уравнения, не зависящие от порядка его вычисления, поскольку все элементы – дифференциальные операторы с постоянными элементами, коммутируют.

Следуя описанному выше алгоритму метода блочного элемента, строится с применением преобразований Фурье внешняя форма ω для дифференциального оператора L, которая позволяет систему дифференциальных уравнений привести к функциональным (1) с помощью интеграла Стокса [10]. Иногда оказывается, что дифференциальный оператор L расщепляется на совокупность дифференциальных операторов более низких порядков производных, т.е.

$$L = L_1 L_2 \ldots L_v.$$

В этом случае задача облегчается тем, что достаточно построить решения граничных задач методом блочного элемента в области Ω для более простых граничных задач

$$L_k \varphi_{km} = 0$$

при произвольных граничных условиях. Затем, по теореме Боджно [13], решения χ_m представляются в виде

$$\chi_m = \sum_{1}^{v} \varphi_{km}.$$

Решения φ_{km} разнятся произвольными граничными условиями.

После этого построенные решения χ_m скалярных граничных задач в форме упакованных блочных элементов, имеющих произвольные граничные условия, исследуются на предмет устранения произвола за счет удовлетворения заданным граничным условиям $\Gamma_k(u_n)$ исходной граничной задачи.

Этот результат достигается сведением проблемы к линейной алгебраической системе с помощью разработанных в работах [13, 14] интегро-дифференциального и координатного методов удовлетворения граничных условий упакованными блочными элементами.

О СОВОКУПНОСТЯХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При исследовании граничных задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, когда носитель граничной задачи дробится на более мелкие части, на которых решаются граничные задачи, проблема сводится к рассмотрению совокупности блочных элементов, которые должны представлять решение на исходном носителе с граничными условиями на его границе. Как отмечено выше, совокупности блочных элементов представляют дискретное топологическое пространство [10]. Любые их объединения вновь являются элементами этого же топологического пространства. Это же относится и к последующим дроблениям носителей блочных элементов.

Свойством дискретных топологических пространств является существование замыканий каждого элемента пространства. Это позволяет строить новые дискретные фактор-топологические пространства путем сопряжения границ носителей и векторов решений граничных задач на носителях.

Для последних отношениями эквивалентности являются граничные условия.

В работе [13] обсуждаются построения таких пространств.

ОБ ОСОБЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РЕАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Системы дифференциальных уравнений граничных задач механики сплошных сред, физики, термоэлектроупругости, магнитоупругости, теории поля и ряда других наук, достаточно высокоточно описывающих происходящие в природе процессы, характеризуются наличием дифференциальных операторов L_{mn} только второго и ниже порядков производных, входящих в состав дифференциального оператора L.

В условиях на границе для этого типа систем дифференциальных уравнений, в принятом выше обозначении, для граничных условий берется $s = 1$, т.е.

$$\Gamma_k(u_n), \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

В случае задачи Дирихле на границах задаются векторы перемещений, а в задаче Неймана – некоторые дифференциальные операторы от этих векторов. Однако самая главная особенность, которую вскрывает новый метод моделирования, – это расщепление оператора L на простейшие, описываемые волновыми уравнениями или уравнениями Гельмгольца вида

$$L_{mn} : \partial_m^1; \quad \partial_t^1; \quad \partial_t^1\partial_n^1; \quad \Delta; \quad \Delta - c_1;$$
$$\Delta - c_1\partial_t^1; \quad \Delta - c_2\partial c_t^2$$

и их подобными комбинациями. Это означает, что в макропроцессах, как и в квантовой механике, большинство природных процессов описывается уравнениями, подобными уравнению состояния элементарных частиц, Шрёдингера. Наверно в этом нет ничего удивительного, поскольку, как сказано в [15, с. 37], “квантовая механика содержит в себе классическую механику в качестве предельного случая”. Учитывая, что граничные задачи для всех указанных систем дифференциальных уравнений описываются разложениями по конечному числу упакованных блочных элементов волновых уравнений или уравнений Гельмгольца, открывается возможность унифицировать все решения этих граничных задач, а также конструировать новые. Важным является возможность рассмотрения граничных задач в неограниченных неклассических областях, недоступных для исследования другими методами.

МЕТОД БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

Нелинейные граничные задачи рассматриваемых природных процессов, не обязательно с малыми нелинейностями, могут исследоваться и решаться применением блочных элементов методом Ньютона–Канторовича.

Ниже приводится один из вариантов применения этого метода, опирающегося на вариант, изложенный в [2]. Пусть рассматривается операторное уравнение, представляющее систему дифференциальных уравнений в частных производных природных процессов с нелинейными составляющими, для которой поставлена граничная задача с линейными, ради простоты, граничными условиям, которая записана в векторном операторном виде

$$P(x) = 0.$$

Метод Ньютона–Канторовича позволяет при определенных требованиях к оператору $P(x)$ организовать итерационный процесс, который сходится к точному решению операторного уравнения по итерационной схеме

$$x_{n+1} = x_n - \left[P'(x_n)\right]^{-1}(P(x_n)).$$

Здесь $P'(x_n)$ – производная Фреше нелинейного оператора, x_0 – начальное приближение. Имеется ряд требований к оператору $P(x)$, которые обеспечивают сходимость итерационного процесса, являющегося аналогом метода касательных, причем даже при значительных нелинейностях. Условия можно найти в [2]. Приняв в качестве начального приближения упакованный блочный элемент линеаризованной граничной задачи и вычислив производную Фреше оператора $P(x)$, которая представляет граничную задачу для системы линейных дифференциальных уравнений, можно, сделав преобразования для обеспечения постоянства коэффициентов, если требуется, применить к ним преобразование Галёркина и прийти, как и выше, к решению последовательности скалярных граничных задач. В результате получим последовательность приближений, представляющих разложение по упакованным блочным элементам. Таким образом, для этого класса нелинейных граничных задач также получается разложение в виде последовательности упакованных блочных элементов волновых уравнений или уравнений Гельмгольца. Для получения приближенного решения нелинейной граничной задачи понадобится конечное число приближений, а для получения точного решения нелинейной граничной задачи решение будет представлено в виде бесконечного ряда упакованных блочных элементов.

Требование постоянства коэффициентов в системе дифференциальных уравнений не является непреодолимым. Оно связано с типом применяемых при переходе к функциональным уравнениям интегральных преобразований. В данном случае – преобразований Фурье. Например, в осесимметричных граничных задачах может применяться преобразование Бесселя, имеющее уравнения с переменными коэффициентами, тем не менее дальнейшее исследование проводится по уже описанному алгоритму, но для другого вида упакованных блочных элементов.

ВЫВОД

Изложенный в работе новый метод моделирования является обобщением и следствием уже опубликованных авторами работ, а также новых результатов, вызванных изучением подхода. Он же позволил выявить новые свойства упакованных блочных элементов, обобщающих некоторые природные процессы, что, возможно, приведет к применению этих результатов в иных областях. Построение точных решений граничных задач сложных дифференциальных уравнений является важным. Практика показала, что именно они ухватывают многие упущенные особенности решений, а потому и свойств природных процессов и явлений, которые по разным причинам “не замечают” численные методы.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2021 г. Минобрнауки России (проект FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов РФФИ (19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
3. *Wiener N., Hopf E.* Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen. S. B. Preuss. Acad. Wiss. 1932. P. 696–706.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой, зависящие от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. Вып. 2. С. 3–72.
5. *Rawlins A.D., Williams W.E.* Matrix Wiener-Hopf factorization // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1981. V. 34. № 1. P. 1–8.
6. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962. 600 с.
8. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–186. https://doi.org/10.1134/S1028335809070064
9. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. I. М.: Наука, 1985, 336 с. Ч. II. М.: Наука, 1985. 464 с.
10. *Ефимов Н.В.* Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
11. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2. М. МЦНМО, 2002. 788 с.

12. *Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Компьютерная геометрия. М.: Академия, 2006. 512 с.
13. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы в граничных задачах для систем дифференциальных уравнений механики и физики в неклассических областях // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 498.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 34–38. https://doi.org/10.31857/S2686740020060048
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Т. 3. М.: Физматлит, 2001. 808 с.

FRACTAL PROPERTIES OF BLOCK ELEMENTS AND A NEW UNIVERSAL MODELING METHOD

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. V. Evdokimova[a], and O. M. Babeshko[b]

[a] *Southern Scientific Center Russian Academy of Science, Rostov-Don, Russian Federation*

[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

Recent research by the authors on the development of the theory and applications of block elements in problems of mechanics and physics unexpectedly led to the possibility of interpreting another feature of these mechanical and mathematical objects. Following the idea of Benoit Mandelbrot about fractality, that is, self-similarity, in nature, the study of block elements as objects with fractal properties is carried out. It is shown that known natural phenomena, processes, and objects described by boundary value problems for partial differential equations and systems of such equations have self-similar packed block elements as solutions. Moreover, the special role of packed block elements generated by boundary value problems for the simplest wave equations, or Helmholtz equations, is highlighted. In the set of packed block elements, for boundary problems of natural processes, they are objects of a discrete topological space, have a maximum topology, representing all the other block elements of the set by their unions. At the same time, the wave equation or the Helmholtz equation are analogs of the Schrodinger equation, which is the basis of quantum mechanics. The Schrodinger equation describes the states of elementary particles in quantum mechanics. In this regard, there is a situation in which the primary basis of both the quantum world and the specified natural processes are self-similar named equations that perform their functions at the appropriate scales. Packed block elements generated by boundary value problems for the same equations as Schrodinger perform their functions in a continuous medium, and the states of elementary particles are described by similar equations in quantum mechanics.

Keywords: block element method, boundary value problems, systems of differential equations, Galerkin transform, nonlinear problems, quantum analogs