

УДК 517.958:539.3(1):517.956.328

ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КРАЕМ

© 2021 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 05.05.2021 г.

Поступило 24.05.2021 г.

После доработки 24.05.2021 г.

Принято к публикации 31.05.2021 г.

Доказано существование волн Рэлея, распространяющихся вдоль периодической границы однородной изотропной полуплоскости с любым профилем края. Показано, что периодическое семейство трещин, перпендикулярных прямой границе полуплоскости, при возрастании их длин способно образовать любое наперед заданное количество линейно независимых локализованных волн в низкочастотном диапазоне спектра, в том числе и стоячих, не переносящих энергию вдоль края. Результаты получены при помощи вариационных и асимптотических методов спектрального анализа модельной задачи в полуполосе с искривленным торцом и с условиями квазипериодичности на боковых сторонах.

Ключевые слова: локализованные волны рэлеевского типа, периодический край изотропной полуплоскости, семейство краевых трещин

DOI: 10.31857/S268674002104009X

1. МОТИВИРОВКА

Изучению волн Рэлея [1] и Лэмба [2] посвящено большое количество публикаций (ср. обзор [3]), что в первую очередь вызвано их широким практическим применением в сейсмологии и сейсморазведке (см. монографии [4–6] и др.). Свойство локализации таких волн около поверхностей тел или продолговатых инородных включений (сварных или клеевых швов, рядов заклепок и пр.) породило разнообразные методы неразрушающего контроля накопления приграничных или внутренних дефектов и целостности соединений (см. работы [7–9] и многие другие).

Проверка наличия поверхностных волн и выявление их спектральных характеристик обычно проводится путем аналитического или численного решения краевых задач для канонических объектов — полупространства, полуслоя и т.п. В данном сообщении, как и в публикациях [10, 11], при помощи вариационных методов спектральной теории операторов (см., например, книгу [12]) установлено, что распространяющаяся рэлеевская волна существует при любом (разумеется, в том числе и прямом) профиле свободного периодического края однородной изотропной полуплоскости

(рис. 1а), в частности, для периодического семейства краевых трещин (рис. 1б). Предложенный подход позволяет обнаружить низкочастотные локализованные волны; при этом установлено, что посредством удлинения трещин можно добиться возникновения любого числа подобных рэлеевских волн. Более того, прием постановки вспомогательных (искусственных) краевых условий (ср. статьи [13, 14]) позволил показать, что даже при нулевом угле падения семейства трещин способно производить захват упругих волн, т.е. порождать локализованные стоячие, не переносящие энергию, волны и опять-таки в любом заданном наперед количестве.

В рамках теории Флоке–Блоха–Гельфанда задача в полуплоскости сводится к (модельной) задаче в полуполосе с искривленным торцом и с условиями квазипериодичности на ее боковых сторонах, причем параметр Флоке $\alpha \in [-\pi, \pi]$ определяется по заданному углу падения φ . Если $\varphi \neq 0$, т.е. $|\alpha| \in (0, \pi]$, то у модельной задачи может появиться дискретный спектр ниже точки отсечки κ_{\mp} непрерывного спектра σ_c^{α} . Точкам дискретного спектра σ_d^{α} отвечают исчезающие на бесконечности с экспоненциальной скоростью собственные моды, которые в свою очередь порождают локализованные волны Флоке–Рэлея (11). Найти частоты собственных колебаний полуполосы на интервале $(0, \kappa_{\mp})$ удалось путем построения пробной вектор-функции, у которой дробь Рэлея не превосходит κ_{\mp}^2 , и

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

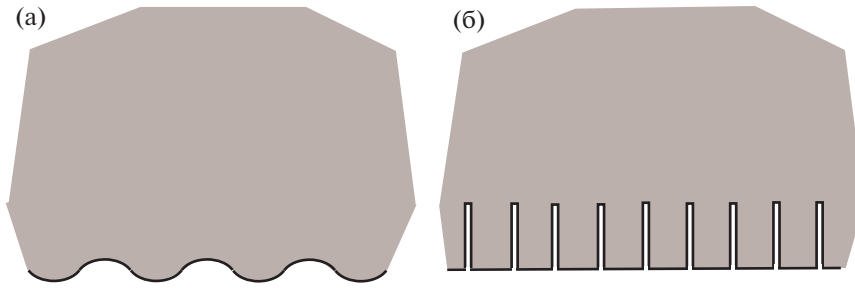


Рис. 1. Полуплоскости с периодическим краем (а) и с периодическим семейством трещин (б).

применения классического минимального принципа [12, теорема 10.2.1]. В случае длинных краевых трещин привлекаются асимптотические анзацы теории Кирхгофа тонких балок, которые позволяют установить множественность волн Рэлея.

Поскольку $\kappa_+ = 0$ и $\sigma_a^\alpha = \emptyset$ в случае $\varphi = 0$, при нулевом угле падения приходится искать собственные частоты, вкрапленные в непрерывный спектр. Это сделано посредством постановки новых искусственных краевых условий на продолжениях трещин, обеспечивающих положительную – созданную специально – точку отсечки, и при помощи необычных продолжений обнаруженной прежним способом затухающей собственной моды на всю поврежденную полуплоскость построить локализованные периодические (т.е. не переносящие энергии вдоль семейства трещин) волны Рэлея.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Изучается падение плоской поперечной упругой волны

$$u^{in}(x) = ae^{ik(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi)} b^\varphi, \quad (1)$$

$$b^\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad a \in \mathbb{R}$$

под углом $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на периодическую границу

$\Gamma_H = \partial\Omega_H$ однородной изотропной полуплоскости

$$\Omega_H = \{x = (x_1, x_2): x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > H(x_1)\}. \quad (2)$$

При этом H – гладкая (для простоты; ср. п. 4–6 и рис. 1б) периодическая профильная функция. Масштабированием сведем период к единице и тем самым сделаем декартовы координаты x_j и все геометрические параметры безразмерными. Суммарное (падающая плюс отраженная волны) поле смещений $u = (u_1, u_2)$ ищется как решение системы уравнений теории упругости в полуполосе $\Pi_H = \{x \in \Omega_H: x_1 \in (0, 1)\}$

$$-\mu \Delta u(x) - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u(x) = \rho \kappa^2 u(x), \quad x \in \Pi_H, \quad (3)$$

с условиями свободного края на искривленном торце $\bar{\omega}_H = \{x : x_1 \in (0, 1), x_2 = H(x_1)\}$

$$\sigma_j^{(n)}(u; x) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_H, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

и условиями квазипериодичности Флоке, которым удовлетворяет и сама падающая волна (1),

$$\partial_1^p u(1, x_2) = e^{i\alpha} \partial_1^p u(0, x_2), \quad x_2 > H(0), \quad p = 0, 1. \quad (5)$$

Здесь $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\nabla = \text{grad}$, $\nabla \cdot = \text{div}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа, $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ – постоянные Ламе упругого материала, $\rho > 0$ – его плотность, а $\kappa > 0$ – частота колебаний. Кроме того, $\sigma_j^{(n)}$ и $n = (n_1, n_2)$ – компонента вектора нормальных напряжений

единичный вектор внешней нормали на торце $\bar{\omega}_H$ соответственно,

$$\sigma_j^{(n)}(u) = n_1 \sigma_{1j}(u) + n_2 \sigma_{2j}(u), \quad (6)$$

$$\sigma_{jk}(u) = \mu(\partial_j u_k + \partial_k u_j) + \lambda \delta_{j,k} \nabla \cdot u, \quad j, k = 1, 2.$$

При этом $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Наконец, показатель $\alpha = k \cos \varphi$ включает волновое число $k = \kappa \sqrt{\mu^{-1} \rho} > 0$, а замена $\alpha \mapsto \alpha - 2\pi m$ с целым множителем m не сказывается на условиях квазипериодичности (5). Далее зафиксируем параметр Флоке

$$\alpha \in (-\pi, \pi] \quad (7)$$

и освободим параметр κ , считая его спектральным.

Изучаются захваченные волны в полосе Π_ω , т.е. собственные вектор-функции $u \in H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H)$ задачи (3)–(5), удовлетворяющие интегральному тождеству

$$E(u, v; \Pi_H) = \rho \kappa^2 (u, v)_{\Pi_H} \quad \forall v \in H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H), \quad (8)$$

где $H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H)$ – пространство Соболева вектор-функций, подчиненных устойчивому ($p = 0$) условию квазипериодичности (5), $(\cdot, \cdot)_{\Pi_H}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Ле-

бега $L^2(\Pi_H)$, а $\frac{1}{2} E(u, u; \Pi_H)$ – упругая энергия, запасенная полуплоскостью, т.е.

$$E(u, u; \Pi_H) = \frac{\mu}{2} \sum_{j=1,2} \|\partial_j u_k + \partial_k u_j; L^2(\Pi_H)\|^2 + \lambda \|\nabla \cdot u; L^2(\Pi_H)\|^2,$$

$$E(u, v; \Pi_H) = \frac{1}{4} (E(u+v, u+v; \Pi_H) - E(u-v, u-v; \Pi_H)).$$

В силу ограничения (7) непрерывный спектр σ_c^α оператора задачи (8) – луч $[\kappa_+^\alpha, +\infty)$ с точкой отсечки

$$\kappa_+^\alpha = |\alpha| \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (9)$$

в частности, потому, что стоячая при $\kappa = \kappa_+^\alpha$ и распространяющаяся при $\kappa > \kappa_+^\alpha$ волна

$$e^{i\beta x_2} B^\alpha(x_1), \quad (10)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho \kappa^2 - \mu \alpha^2}{\lambda + 2\mu}}, \quad B^\alpha(x_1) = e^{i\alpha x_1} b^0,$$

удовлетворяет системе (3) и условиям (5). На интервале $(0, \kappa_+^\alpha)$ может располагаться дискретный спектр σ_d^α задачи (8), а отвечающие собственным частотам $\kappa_\bullet \in \sigma_d^\alpha$ собственные вектор-функции $u_\bullet^\alpha \in H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H)$ как раз и представляют собой захваченные волны. Если такая волна найдена, то формула

$$u_\bullet^\alpha(x_1, x_2) = e^{i\alpha} u_\bullet^\alpha(x_1 - k, x_2), \quad (11)$$

$$x \in \Omega_H, \quad k \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

представляет экспоненциально затухающую при $x_2 \rightarrow +\infty$ волну u_\bullet^α во всей полуплоскости (2), т.е. локализованная около периодической границы и обладающая свойствами волн Рэля и Лэмба. Вектор-функции (11) гладкие благодаря условиям квазипериодичности (5).

В п. 3 показано, что при ненулевом угле падения φ , т.е. при

$$\alpha \neq 0 \quad (12)$$

у задачи (3)–(5) обязательно есть нетривиальное решение $u_\bullet^\alpha \in H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H)$ на некоторой частоте $\kappa_\bullet \in (0, \kappa_+^\alpha)$ из дискретного спектра σ_d^α .

В п. 4 рассматривается полуплоскость Ω_\perp^l с краевыми трещинами

$$T_j^l = \{x : x_1 = m/N, x_2 \in [0, l]\}, \quad (13)$$

$$j \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad N \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

и, в частности, показано, что при $\alpha \neq 0$ для всякого периода $1/N$ путем увеличения длин $l > 0$ трещин (13) можно поместить на интервал $(0, \omega_+^\alpha)$ любое заданное наперед количество собственных частот. Иными словами, в полуплоскости с периодическим краевым повреждением существует множество поверхностных волн Рэля в низкочастотном диапазоне спектра.

Случай $\alpha = 0$ (угол падения φ равен нулю) особый по нескольким причинам. Во-первых, непрерывный спектр σ_c^0 приобретает нулевую точку отсечки (9), и поэтому дискретный спектр σ_d^0 пуст. Во-вторых, если при $\varphi \neq 0$ волна (11) распространяется вдоль границы Γ_H , затухая в перпендикулярном направлении, то в случае $\varphi = 0$ найденное поле смещений (11) зависит периодически от переменной x_1 и исчезает с экспоненциальной скоростью при $x_2 \rightarrow +\infty$, т.е. оказывается стоячей волной, не переносящей энергию в направлении оси x_1 .

В п. 5 при $\varphi = 0$ получен совершенно новый результат: при $N = 4$ доказано существование собственных частот, причем их количество неограниченно возрастает при удлинении трещин. Эти собственные частоты вкраплены в непрерывный спектр $\sigma_c^0 = [0, +\infty)$ и обладают природной неустойчивостью: сколь угодно малое возмущение оператора способно вывести их из спектра и тем самым превратить в точки комплексного резонанса. Именно поэтому в случае $\alpha \neq 0$ трещины $T_1^{l_N}, \dots, T_N^{l_N}$, вообще говоря, могут иметь разные длины l_1, \dots, l_N при сохранении периодичности всего семейства, но в случае $\alpha = 0$ у трещин с четными и нечетными номерами длины обязательно равны l_{ev} и l_{od} соответственно.

В последнем разделе обсуждаются смежные вопросы.

3. ЗАХВАЧЕННЫЕ ВОЛНЫ

Согласно минимальному принципу [12, теорема 10.2.1] нижняя грань $\underline{\sigma}^\alpha$ всего спектра $\sigma^\alpha = \sigma_d^\alpha \cup \sigma_c^\alpha$ оператора A^α задачи (3)–(5) вычисляется по формуле

$$(\underline{\sigma}^\alpha)^2 = \inf_{u \in H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H) \setminus \{0\}} \frac{E(u, u; \Pi_H)}{\rho \|u; L^2(\Pi_H)\|^2} \quad (14)$$

с классической дробью Рэля в правой части. Таким образом, $\kappa_\bullet \underline{\sigma}^\alpha$ – собственная частота из дискретной компоненты σ_d^α спектра в том и только в

том случае, если при какой-то пробной вектор-функции $v \in H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_H)$ выполнено неравенство

$$E(v, v; \Pi_H) < \rho(\omega_{\dagger}^{\alpha})^2 \|v; L^2(\Pi_H)\|^2, \quad (15)$$

а значит, инфимум из правой части (14) становится строго меньше κ_{\dagger}^2 и действительно оказывается первым (наименьшим) изолированным собственным числом задачи (8).

Построим требуемую пробную вектор-функцию. Положим

$$v^{\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon x_2} B^{\alpha}(x_1) + \sqrt{\varepsilon} \psi(x), \quad (16)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а ψ – гладкая вектор-функция с малым носителем около некоторой точки $P \in \bar{\omega}_H$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\left| E(v^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}; \Pi_H) - \rho(\kappa_{\dagger}^{\alpha})^2 \|v^{\varepsilon}; L^2(\Pi_H)\|^2 + 2\sqrt{\varepsilon} \operatorname{Re} I(B^{\alpha}, \psi) \right| \leq c_{\psi} \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} I(B^{\alpha}, \psi) &= E(B^{\alpha}, \psi; \Pi_H) - \rho(\omega_{\dagger}^{\alpha})^2 (B^{\alpha}, \psi)_{\Pi_H} = \\ &= \int_{\bar{\omega}_H} \sigma^{(n)}(B^{\alpha}; x) \cdot \overline{\psi(x)} ds_x. \end{aligned}$$

Здесь была применена формула Грина и использованы следующие факты: вектор-функция B^{α} удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3) и носитель $\operatorname{supp} \psi$ удален от боковых сторон полуполосы. Поскольку в силу соотношений (6) и (10) верны равенства

$$\sigma_{11}(B^0; x) = \sigma_{22}(B^0; x) = 0, \quad \sigma_{12}(B^0; x) = i\alpha\mu B^0(x_1),$$

всегда найдется точка $P \in \bar{\omega}_H$, в которой $\sigma^{(n)}(B^{\alpha}; P) \neq 0$. В итоге можно добиться неравенства $\operatorname{Re} I(B^{\alpha}, \psi) < 0$ путем подбора слагаемого $\sqrt{\varepsilon} \psi$ в пробной вектор-функции (16). Для нее выполнено соотношение (15), т.е. в случае (12) дискретный спектр σ_d^{α} заведомо не пуст при любом профиле H , и в полуплоскости Ω_H с периодическим краем существует хотя бы одна поверхностная волна Рэлея.

4. О МНОЖЕСТВЕННОСТИ ВОЛН РЭЛЕЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С СЕМЕЙСТВОМ КРАЕВЫХ ТРЕЩИН

Приведенные в п. 3 рассуждения не требуют гладкости границы Γ_H , которая к тому же не обязана быть графиком. Рассмотрим задачу (8) в полуполосе Π_{\perp}^l с трещинами T_0^l и T_1^l при $N = 1$, попадающими на границу $\partial\Pi_{\perp}^l$, т.е. условия квази-периодичности (5) назначены только при $x_2 > l$ и

$$H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_{\perp}^l) = \{u \in H^1(\Pi_0): u(l, x_2) = e^{i\alpha} u(0, x_2), x_2 > l\}. \quad (17)$$

В случае (12) для оценки кратности $\#\sigma_d^{\alpha}$ непустого дискретного спектра σ_d^{α} применим классический максиминимальный принцип

$$(\kappa_m^l)^2 = \max_{\mathcal{R}_m^l} \inf_{u \in \mathcal{R}_m^l \setminus \{0\}} \frac{E(u, u; \Pi_{\perp}^l)}{\rho \|u; L^2(\Pi_{\perp}^l)\|^2}. \quad (18)$$

Здесь \mathcal{R}_m^l – любое подпространство в $H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_{\perp}^l)$ с коразмерностью $m - 1$, в частности, $\mathcal{R}_1^l = H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_{\perp}^l)$. Известно [12, теорема 10.2.2]: если величина (18) строго меньше $(\kappa_{\dagger}^{\alpha})^2$, то $\kappa_m^l \in \sigma_d^{\alpha}$ – собственная частота и $\#\sigma_d^{\alpha} \geq m$.

Рассмотрим вспомогательную одномерную задачу, описывающую продольные колебания балки с малой относительной толщиной $1/\ell$

$$\begin{aligned} -\mu \partial_2^2 W_l(x_2) &= \rho K_l^2 W_l(x_2), \quad x_2 \in (0, l), \\ W_l(0) &= W_l(l) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Ее собственные частоты

$$0 < K_l^{(1)} < K_l^{(2)} < \dots < K_l^{(m)} < \dots \rightarrow +\infty \quad (20)$$

имеют вид $K_l^{(m)} = l^{-1} K_1^{(m)}$, где $K_1^{(m)}$ – собственная частота той же задачи (19) при $l = 1$, а соответствующие собственные функции можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(W_l^{(p)}, W_l^{(q)})_{(0,l)} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Обозначим R_m^l линейную оболочку вектор-функций $w_{(l)}^{(p)} = (0, W_l^{(p)})$, $p = 1, \dots, m$, продолженных нулем с прямоугольника $(0, 1) \times (0, l)$ на полуполосе Π_{\perp}^l . Ясно, что $R_m^l \subset H_{per}^{1,\alpha}(\Pi_{\perp}^l)$ и в силу равенств $\dim R_m^l = m$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}_m^l = m - 1$ всякое подпространство \mathcal{R}_m^l в пространстве (17) содержит нетривиальную линейную комбинацию $w_{(l)}^{(m)}$ вектор-функций $w_{(l)}^{(1)}, \dots, w_{(l)}^{(m)}$, построенную по линейной комбинации $\mathbf{W}_{(l)}^{(m)}$ собственных функций $W_l^{(1)}, \dots, W_l^{(m)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\max_{\mathcal{R}_m^l} \frac{E(\mathbf{w}_{(l)}^{(m)}, \mathbf{w}_{(l)}^{(m)}; \Pi_{\perp}^l)}{\rho \|\mathbf{w}_{(l)}^{(m)}; L^2(\Pi_{\perp}^l)\|^2} = \\ &= \max_{\mathcal{R}_m^l} \frac{\mu \|\partial_2 \mathbf{W}_{(l)}^{(m)}; L^2(0, l)\|^2}{\rho \|\mathbf{W}_{(l)}^{(m)}; L^2(0, l)\|^2} \leq (K_l^{(m)})^2 = \frac{1}{l^2} (K_1^{(m)})^2. \end{aligned}$$

Итак, при большом l величина (18) попадает на интервал $(0, (\kappa_+^\alpha)^2)$, а значит, $\#\sigma_d^\alpha \geq m$ для длин l , превосходящих некоторую величину $l_m > 0$. Иными словами, при увеличении длин трещин количество линейно независимых волн Рэлея неограниченно возрастает.

Полученная оценка кратности $\#\sigma_d^\alpha$, обеспечившая объявленный результат, весьма приближительна по нескольким причинам. Во-первых, в задаче (19) условие $W_l(0) = 0$ можно заменить условием $\partial_2 W_l(0) = 0$, уменьшив тем самым каждый член последовательности (20). Во-вторых, вместо одномерной модели (19) продольной деформации балки можно оперировать задачей об ее изгибе

$$D\partial_2^4 W_l(x_2) = \rho K_l^2 W_l(x_2), \quad x_2 \in (0, l),$$

$$W_l(0) = \partial_2 W_l(0) = 0, \quad W_l(l) = \partial_2 W_l(l) = 0.$$

Здесь $D = \frac{\mu \lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu}$ — приведенная жесткость балки на изгиб. Понятно, что собственные частоты $K_l^{(m)} = l^{-2} K_1^{(m)}$ этой задачи убывают при $l \rightarrow +\infty$ быстрее, чем собственные частоты прежней задачи (19).

5. ЗАХВАЧЕННЫЕ ВОЛНЫ, НЕ ПЕРЕНОСЯЩИЕ ЭНЕРГИЮ

При $\alpha = 0$ рассмотрим зауженную полуполосу $\Pi_\#^l = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \times \mathbb{R}$ с трещинами T_1^l и T_2^l , заданными формулой (13) с $N = 4$, на ее боковых сторонах. Вместо условий периодичности (5), $\alpha = 0$, назначим на лучах $\Upsilon_j = \left\{x: x_1 = \frac{j}{4}, x_2 > l\right\}, j = 1, 2$, искусственные краевые условия

$$u_1^\# \left(\frac{1}{4}, x_2\right) = 0, \quad \sigma_{11} \left(u_1^\#; \frac{1}{4}, x_2\right) = 0, \quad x_2 > l, \quad (21)$$

$$u_2^\# \left(\frac{1}{2}, x_2\right) = 0, \quad \sigma_{12} \left(u_2^\#; \frac{1}{2}, x_2\right) = 0, \quad x_2 > l. \quad (22)$$

Эти условия обладают замечательными свойствами. Во-первых, непрерывный спектр оператора аналогичной (8) задачи

$$E(u^\#, v^\#; \Pi_\#^l) = \rho(\kappa^\#)^2 (u^\#, v^\#)_{\Pi_\#^l} \quad \forall v^\# \in H_0^1(\Pi_\#^l) \quad (23)$$

на функциональном пространстве, включающем первые (устойчивые — в смещениях) краевые условия из групп (21) и (22),

$$\begin{aligned} H_0^1(\Pi_\#^l) &= \left\{u \in H^1(\Pi_\#^l): u_1 \left(\frac{1}{4}, x_2\right) = \right. \\ &= \left. u_2 \left(\frac{1}{2}, x_2\right) = 0, x_2 > l, j = 1, 2\right\} \end{aligned} \quad (24)$$

приобретает положительную точку отсечки $\kappa_+^\# > 0$ непрерывного спектра, так как только тривиальное $(c_0 = c_1 = c_2 = 0)$ жесткое смещение $(c_1 - c_0 x_2, c_2 + c_0 x_1)$ удовлетворяет обоим краевым условиям (21) и (22) (ср. конструкции из работы [14]). Во-вторых, нечетное для $u_1^\#$ и четное для $u_2^\#$ продолжения по переменной $x_1 - \frac{1}{4}$ сохраняет гладкость поля u на линии $\left\{x: x_2 = \frac{1}{4}\right\}$ и уравнения (3) для него в соседней полуполосе $\left(0, \frac{1}{4}\right) \times \mathbb{R}_+$. То же самое верно в случае нечетного для $u_2^\#$ и четного для $u_1^\#$ продолжений через прямую $\left\{x: x_2 = \frac{1}{2}\right\}$. Таким образом, комбинируя указанные способы продолжений, переделываем решение $u^\#$ задачи (23) из пространства (24) в решение $u \in H_{per}^{1,0}(\Pi_\perp^l)$ задачи (8), 1-периодическое по переменной x_1 благодаря наличию четырех трещин (также можно взять $N = 8, 12, 16, \dots$ в определении (13)).

Осталось применить к задаче (23) аналогичный (18) максиминимальный принцип, по прежней схеме соорудив пространство R_m^l пробных вектор-функций из собственных функций одномерной задачи (19). В результате при достаточно большом размере l обнаруживаем любое заданное наперед количество точек дискретного спектра задачи (23) в полуполосе $\Pi_\#^l$, которые оказываются вкрапленными в непрерывный спектр σ_c^0 собственными частотами задачи (8) при $\alpha = 0$ в единичной полуполосе Π_\perp^1 с четырьмя трещинами. Соответственно в полуплоскости Ω_\perp^l с периодическим семейством краевых трещин (13) при $N = 4$ найдены m стоячих (1-периодических по переменной x_1 и потому не переносящих энергию) волн с экспоненциальным затуханием при $x_2 \rightarrow +\infty$.

Подчеркнем, что выбранное число $N = 4$ — некая условность, поскольку изменением масштаба в единичную полосу можно поместить любое количество трещин (13), изменив при этом их длину ℓ .

6. ДОСТУПНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Двумерная задача теории упругости в полуплоскости (2) получается исключением координаты x_3 из декартовой системы в пространстве \mathbb{R}^3 и деплакации u_3 из вектора смещений. При этом требуется, чтобы фронт плоской волны (1) был параллелен образующей периодической в на-

правлении x_1 поверхности, т.е. волновое число k_3 в направлении оси x_3 равно нулю. Вместе с тем предложенные подходы с мелкими изменениями годятся и в случае системы трех дифференциальных уравнений теории упругости при $k_3 \neq 0$. Кроме того, результаты из п. 2 без особого труда приспособляются к анизотропным средам с периодическими неоднородностями, стабилизирующимися на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Результаты из п. 2 остаются в силе и при периодической приграничной перфорации полуплоскости \mathbb{R}_+^2 отверстиями

$$\omega_j = \{x: (x_1 - j, x_2) \in \omega\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (25)$$

где ω — область внутри полуполосы Π_0 , ограниченная кусочно-гладким контуром. Более того, в случае $\alpha \neq 0$ непустота дискретного спектра сохраняется и для мягких тяжелых включений (25), однако при жестком, но легком инородном материале вариационные методы не дают искомого соотношения $\sigma_d^\alpha \neq \emptyset$.

Продольная волна (вектор $b^\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)$) в формуле (1) распространяется на частоте

$$k_{\ddagger} = \alpha \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (26)$$

выше точки отсечки (9). Внутри непрерывного спектра σ_c^α оператора задачи (8) применение вариационных методов невозможно, а при создании искусственной точки отсечки (ср. п. 5) классификация продольные/поперечные бесполезна. Вместе с тем в случае $H = 0$, $\lambda = 0$ на пороге (26) имеется ограниченное решение $(e^{i\alpha x_1}, 0)$ задачи (3)–(5) при $\kappa = k_{\ddagger}$ в полуполосе Π_0 , т.е. реализуется пороговый резонанс [15, 16], провоцирующий разнообразные спектральные аномалии (см. обзор [17]). В частности, возможно образование околупороговой собственной частоты путем точной настройки пологого (ε — малый параметр) периодического профиля $H(x_1) = \varepsilon h(x_1)$. Остался открытым вопрос о возможности появления порогового резонанса в точке отсечки (9) при каком-то профиле H торца $\bar{\omega}_H$, т.е. образования у задачи (3)–(5) ограниченного решения — почти стоячей или захваченной волны.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17–11–01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh J.W.S.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. 253. P. 4–11.
2. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. 1917. V. A93. P. 114–128.
3. *Lawrie J., Kaplunov J.* Edge waves and resonance on elastic structures: An overview // Math. Mech. of Solids. 2012. V. 17. 1. P. 4–16.
4. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
5. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Y., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1997. 226 p.
6. *Мухасев Г.И., Товстук П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М: Физматлит, 2009. 292 с.
7. *Коненков Ю. К.* Об изгибной волне “рэлеевского” типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. С. 124–126.
8. *Kim J.-Y., Rokhlin S.I.* Surface acoustic wave measurements of small fatigue cracks initiated from a surface cavity // Intern. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. P. 1487–1504.
9. *Krushynska A.A.* Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. of Sound and Vibration. 2011. V. 330. P. 1964–1976.
10. *Камощкий И.В., Назаров С.А.* Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // ДАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 771–773.
11. *Камощкий И.В., Киселев А.П.* Энергетический подход к доказательству существования волн Релея в анизотропном упругом полупространстве // Прикл. матем. и механика. 2009. Т. 73. № 4. С. 645–654.
12. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
13. *Evans D.V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
14. *Назаров С.А.* Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 5. С. 863–881.
15. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
16. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 3–60.
17. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор) // Акустический журнал. 2020. Т. 66. № 5. С. 489–508.

REYLEIGH WAVES IN A HOMOGENEOUS ISOTROPIC HALF-PLANE WITH A PERIODIC EDGE

S. A. Nazarov^a

^a Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

The existence is proved for Reyleigh's waves propagating along a periodic edge of a homogeneous isotropic half-plane with arbitrary profile. It is demonstrated that a periodic family of cracks which are perpendicular to the half-plane boundary and have a sufficiently large length, is able to provide any given number of linearly independent localized waves, in particular, standing waves that do not drive energy along the edge. These results are obtained by means of variational and asymptotic methods in the spectral analysis of a model problem in a half-strip with a curved end and with quasi-periodicity conditions at its lateral sides.

Keywords: localized waves of Rayleigh's type, periodic edge of isotropic half-plane, family of edge cracks