

УДК 539.3

## О ВЛИЯНИИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ТЕРМОАКУСТИКУ МАТЕРИАЛОВ

© 2021 г. Академик РАН Н. Ф. Морозов<sup>1,2,\*</sup>, Д. А. Индейцев<sup>1,2,5,\*\*</sup>, К. Л. Муратиков<sup>3,\*\*\*</sup>,  
Б. Н. Семёнов<sup>1,2,\*\*\*\*</sup>, Д. С. Вавилов<sup>1,4,\*\*\*\*\*</sup>, А. А. Кудрявцев<sup>5,\*\*\*\*\*</sup>

Поступило 21.07.2021 г.

После доработки 27.08.2021 г.

Принято к публикации 31.08.2021 г.

Показано, что присутствие дефектов в материале при определенной длительности теплового воздействия приводит к необходимости учета зависимости коэффициента линейного теплового расширения от их подвижности, которая определяет его операторный вид. На примере динамической задачи термоупругости, где в качестве дефекта выступает инерционное включение, показано изменение термоакустического сигнала, вызванного его наличием. Построена передаточная функция данного оператора, поведение которой согласуется с результатами эксперимента.

*Ключевые слова:* дефекты, динамическая термоупругость, коэффициент линейного теплового расширения

DOI: 10.31857/S2686740021050059

Как известно [1, 2], релаксационный процесс характеризует стремление любой физической системы к равновесию. Такое стремление происходит далеко не с одинаковой скоростью для всех внутренних степеней свободы, описывающих динамику физической системы, и представляет собой многоступенчатый процесс множеством времен релаксаций, каждое из которых описывает его на различных масштабных уровнях. Для задач классической механики сплошной среды, в силу рассмотрения только коллективного движения частиц в элементарном объеме сплошной среды, процессы релаксации удовлетворяют известным уравнениям Эйлера и отличаются толь-

ко в силу использования разных уравнений состояния сплошной среды.

Другая ситуация возникает, когда описание материала требует учета влияния на коллективное движение частиц новых степеней свободы, к примеру, их относительного движения или появления примесных частиц, дефектов. В этом случае обычно используется модель взаимопроникающих континуумов [3] или функционал свободной энергии с параметром концентрации примеси [4], которые позволяют получать новые уравнения состояния с эффективными параметрами, меняющимися согласно кинетическим и диффузионным уравнениям. В этом случае при динамическом воздействии на такую систему общий релаксационный процесс имеет два спектральных отклика. Первый из них определяется характерными временами динамического процесса, связанного с распространением волн в занимаемых областях сплошной среды. Кроме этого, на коллективную динамику частиц физической системы накладывается процесс, порождаемый движением дополнительных степеней свободы, которые обычно определяются диффузионными уравнениями с параметрами, зависящими от микроструктуры.

Таким образом, возникает самостоятельная проблема выделения из общего сигнала информации о содержании в материале дефектов различной природы, в частности включений и вакансий. Чтобы учесть их влияние, предлагается использовать двухкомпонентную модель матери-

<sup>1</sup> Институт проблем машиноведения

Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия

<sup>5</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: n.morozov@spbu.ru

\*\*E-mail: dmitry.indeitsev@gmail.com

\*\*\*E-mail: klm.holo@gmail.com

\*\*\*\*E-mail: b.semenov@spbu.ru

\*\*\*\*\*E-mail: londr@yandex.ru

\*\*\*\*\*E-mail: kudryavtsev\_aa@spbstu.ru

ала [5], согласно которой его плотность равна суммарной плотности каждой из компонент. Тогда принимается, что связь между шаровой частью тензора напряжений  $\sigma$  и изменением плотности материала  $\Delta\rho$  имеет вид

$$\sigma = -3K \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{\Omega\Delta\rho_f}{\rho_0} \right), \quad (1)$$

где  $\Delta\rho_f$  – изменение плотности дефектов,  $\rho_0$  – исходная плотность материала в недеформированном состоянии,  $K$  – модуль объемного расширения. Параметр  $\Omega$  принимает значение 1 для включений и  $-1$  в случае вакансий. При справедливости закона Фика плотность дефектов удовлетворяет диффузионному уравнению с источником членом  $F(\rho_f, T)$ , зависящим от температуры  $T$  и определяющим скорость производства дефектов [4]. Если считать, что вся область с дефектами охвачена диффузионным процессом, то раскладывая функцию  $F$  в ряд Тейлора около равновесного состояния  $F(\rho_{f0} + \Delta\rho_f, T_0 + \vartheta) \approx F(\rho_{f0}, T_0) + \frac{A}{\tau_F} \Delta\rho_f + B\vartheta$  и вво-

дя характерное время  $\tau_f = \frac{l^2}{D}$ , можно рассматривать релаксационную модель, описываемую линейным уравнением

$$\Delta\dot{\rho}_f + \frac{1}{\tau_r} \Delta\rho_f = B\vartheta - \rho_{f0}\dot{\epsilon}. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\rho_{f0}$  – исходная плотность дефектов,  $T_0$  – равновесная температура,  $l$  – размер области,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\tau_r = \frac{\tau_f \tau_F}{\tau_F - A\tau_f}$  – эффективное время релаксации,  $\tau_F$  – время образования дефекта. Константы  $A$  и  $B$  определяются физическим законом, управляющим источниковым членом, в качестве которого, к примеру, может быть взято соотношение Аррениуса [6]. В отсутствие собственной кинематики и источникового члена влияние дефектов сводится к изменению модуля объемного расширения, новое значение которого определяется выражением  $K_{ef} = K \left( 1 + \Omega \frac{\rho_{f0}}{\rho_0} \right)$ . После интегрирования уравнения (2) и подстановки полученного результата в уравнение (1), при выполнении условий  $\frac{\rho_{f0}}{\rho_0} \ll 1$  и  $e^{-\frac{l}{l_r}} \ll 1$ , оно приобретает вид, соответствующий модели упруго-вязкого материала Кельвина–Фойгтса дополнительным слагаемым, определяющим операторную зависимость от времени коэффициента линейного теплового расширения. При использовании преобразования Лап-

са  $f^L = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$  закон деформирования твердого тела может быть представлен в форме аналогичной закону Дюамеля–Неймана

$$\sigma^L = 3K(p)(\epsilon^L - 3\alpha(p)\vartheta^L), \quad (3)$$

однако модули  $K(p)$  и  $\alpha(p)$  не являются константами, а имеют динамический характер. При этом наиболее существенное влияние на термоакустический сигнал оказывает зависимость  $\alpha(p)$  [7].

В качестве примера рассматривается модельная одномерная задача, где дефект в виде сосредоточенной массы расположен на торце полубесконечного стержня с модулем Юнга  $E$  и плотностью  $\rho$ . Будем полагать, что для него выполняются закон Фурье и соотношение Дюамеля–Неймана. Тогда динамические уравнения термоупругости [8] имеют вид

$$k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $u$  – смещение материальной точки,  $k$  – коэффициент температуропроводности,  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость

звука,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения. Описание динамики дефекта в виде сосредоточенного включения массой  $m$  требует введения дополнительной степени свободы  $q_f(t)$ , отвечающей его перемещению и удовлетворяющей уравнению  $m\ddot{q}_f = F$ , где через  $F$  обозначены силы, действующие на него со стороны стержня. Вид данной силы зависит от условий сопряжения. Здесь рассматривается простейший случай абсолютно жесткого контакта, когда перемещение дефекта на торце совпадает с перемещением стержня. Напряжения, возникающие в данной точке, уравновешиваются действием сил инерции от сосредоточенной массы. Действие теплового источника на границе задается в виде потока тепла, определяемого функцией  $W(t)$ . В этом случае граничные условия для системы уравнений (4)–(5) принимают вид

$$k \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = -W(t), \quad \vartheta|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\chi h}{c_0^2} \ddot{u} + \alpha \vartheta, \quad u|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (7)$$

где  $h$  – это линейный размер дефекта, а через  $\chi = \frac{\rho_f}{\rho}$  обозначено отношение плотности дефекта

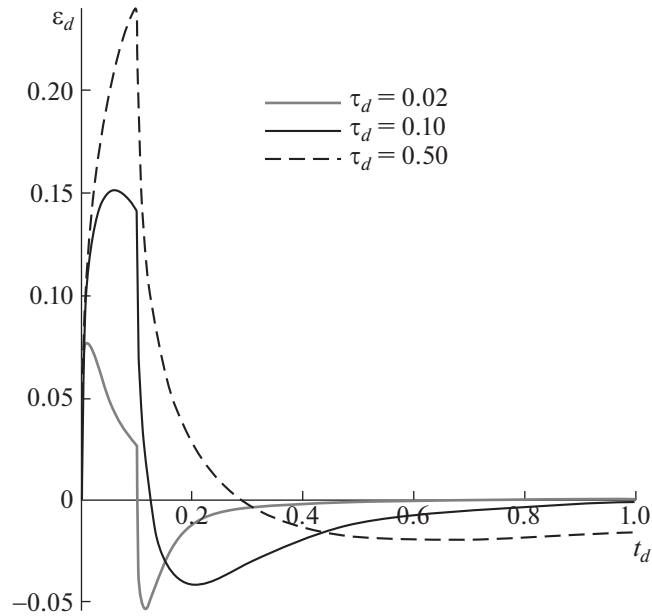


Рис. 1. Зависимость деформации от времени.

к плотности материала. Перейдя к безразмерным переменным  $x_d = \frac{c_0 x}{k}$ ,  $t_d = \frac{c_0^2 t}{k}$  и решив систему (4)–(7) с помощью преобразования Лапласа, нетрудно найти аналитическое представление для температуры  $\vartheta$  и деформации  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  в изображениях

$$\vartheta^L = \frac{W^L}{c_0 \vartheta_0 \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p} x_d}, \quad (8)$$

$$\varepsilon^L = \frac{\alpha W^L \sqrt{p}}{c_0 (p-1)} \left( \frac{(\tau_d \sqrt{p} + 1) e^{-\sqrt{p} x_d}}{\tau_d p + 1} - \frac{e^{-\sqrt{p} x_d}}{p} \right), \quad (9)$$

где  $\tau_d = \frac{c_0 \chi h}{k}$  – безразмерное время релаксации, представляющее собой отношение произведения плотности дефекта на его линейный размер к акустическому сопротивлению среды. Данный параметр характеризует как свойства дефекта, так и самой среды, от которых зависит релаксационный процесс возвращения системы к исходному состоянию. При  $\tau_d = 0$  выражение (9) переходит в хорошо известное решение, приведенное во многих работах [9, 10], которое мы обозначим через  $\varepsilon_c^L$ .

Используя его, выражение (9) можно представить в виде суммы  $\varepsilon^L = \varepsilon_c^L + \varepsilon_D^L$ , где второе слагаемое

$$\varepsilon_D^L = - \frac{\tau_d \alpha W^L e^{-\sqrt{p} x_d}}{c_0 (\sqrt{p} + 1) (\tau_d p + 1)}, \quad (10)$$

связанное с наличием инерционного включения, представляет собой акустическую волну, имеющую в районе фронта противоположный знак по отношению к классическому решению. Когда тепловой поток на границе  $W(t)$  имеет форму прямоугольного импульса высотой  $W_0$  и длительностью  $t_0$ , т.е.  $W(t) = W_0 (H(t) - H(t - t_0))$ , где  $H(t)$  – функция Хевисайда, то зависимость нормированной де-

формации  $\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_D c_0}{\alpha W_0}$  от времени, которая при числовых значениях параметров, близких к характеристикам алюминия ( $c_0 = 6 \times 10^3$  м/с,  $k = 1 \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с) и  $t_{0d} = \frac{c_0^2 t_0}{k} = 0.1$  соответствует пикосекундному воздействию, для  $x_d = 0$  приведена на рис. 1.

Из представленного результата следует, что наибольшее влияние на амплитуду акустического сигнала имеет место, когда длительность импульса много меньше или сопоставима с временем релаксации  $\tau_d$ .

На границе области, где размещено инерционное включение, решение (9) с учетом выражения (8) можно записать в форме

$$\varepsilon^L \Big|_{x_d=0} = (\alpha - \alpha_D(p)) \vartheta^L, \quad (11)$$

аналогичной закону Дюамеля–Неймана при свободном расширении тела. Динамическая составляющая коэффициента линейного теплового рас-

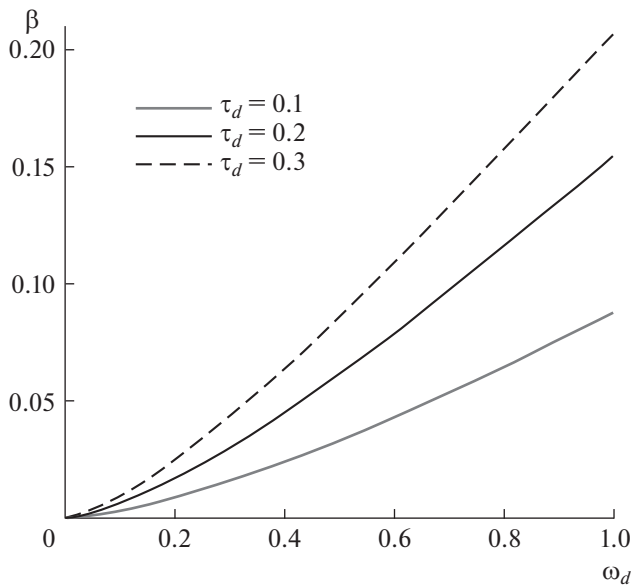


Рис. 2. Спектральная характеристика.

ширения  $\alpha_D(p)$ , зависящая от времени релаксации, определяется передаточной функцией

$$\beta(p) = \frac{\alpha_D(p)}{\alpha} = \frac{\tau_d p^2}{(\sqrt{p+1})(\tau_d p + 1)}. \quad (12)$$

Зависимость эффективного коэффициента линейного теплового расширения от частоты на основе релаксационного уравнения (2) была введена в работе [11] с целью описания влияния точечных дефектов в алюминиевых мембранах на термоакустический сигнал при лазерном воздействии с частотой модуляции в несколько кГц. На рис. 2 приведена спектральная характеристика данной функции для пикосекундного воздействия, где  $\omega_d$  – безразмерная частота.

Из рис. 2 видно, что инерционное включение изменяет высокочастотную составляющую акустического сигнала, тогда как низкочастотная часть будет определяться эволюционным уравнением дефектной структуры.

Таким образом, наличие дефектов, занимающих поверхностную область в материале, может оказывать существенное влияние на спектральную характеристику коэффициента линейного теплового расширения, особенно при нестационарном воздействии. Показано, что при определенной длительности теплового воздействия оно приводит к уменьшению амплитуды волны деформаций, что важно с точки зрения как диагностики дефектной структуры, так и оценки напряженного состояния. В данной работе рассмотрен случай, когда она представляет собой сосредоточенное включение, характеризующееся линей-

ным размером и расположенное на границе полубесконечной области, а время релаксации определяется временем пробега акустической волны по его длине. В общем случае, когда дефекты занимают поверхностный слой, определение данного параметра требует решения контактной задачи на границе между поверхностным слоем и чистым материалом.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению “Передовые цифровые технологии” СПбПУ (соглашение от 17.11.2020 № 075-15-2020-934).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалевский М.Ю., Мацкевич В.Т., Чернышов Н.Н. К теории релаксационных процессов в твердом теле // Вопросы атомной науки и техники. 2006. № 4. С. 76–78.
2. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю., Юдахин А.Е. Измерение времени тепловой релаксации и демпфирования температуры в твердом теле // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 1. С. 122–128.
3. Куропатенко В.Ф. Модель многокомпонентной среды // ДАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 761–763.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1975. С. 415.
5. Индейцев Д.А., Наумов В.Н., Семёнов Б.Н. Динамические эффекты в материалах со сложной структурой // Вестн. Самарского гос. ун-та. 2007. № 4. С. 140–168.
6. Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. М.: Мир, 2000. С. 176.
7. Глазов А.Л., Морозов Н.Ф., Муратиков К.Л. Теоретическое и экспериментальное исследование лазерного фотоакустического эффекта вблизи отверстия в металлических пластинах с внутренними напряжениями // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 2. С. 49–58.
8. Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости // ПММ. 1952. Т. 16. № 3. С. 342–344.
9. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа. 1975. 216 с.
10. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 254 с.
11. Glazov A.L., Muratikov K.L. Generalized thermoelastic effect in real metals and its application for describing photoacoustic experiments with Al membranes // J. Appl. Phys. 2020. Т. 128. № 9. С. 095106.

## ON THE INFLUENCE OF RELAXATION PROCESSES ON THERMOACOUSTICS OF MATERIALS

Academician of the RAS **N. F. Morozov<sup>a,b</sup>**, **D. A. Indeitsev<sup>a,b,e</sup>**, **K. L. Muratkov<sup>c</sup>**,  
**B. N. Semenov<sup>a,b</sup>**, **D. S. Vavilov<sup>a,d</sup>**, and **A. A. Kudryavtsev<sup>e</sup>**

<sup>a</sup> *Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Ioffe Institute of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*

<sup>d</sup> *A.F. Mozhaysky Military-Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation*

<sup>e</sup> *Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

In the present article it is shown that the presence of defects in material for a certain duration of heat exposure leads to the necessity of taking into account the dependence of the linear thermal expansion coefficient on their mobility, which determines its operator form. Using the example of the dynamic thermoelastic problem with an inertial inclusion acting as the defect, the change in the thermoacoustic signal caused by its presence is demonstrated. The transfer function of this operator is obtained, the behavior of which corresponds to the experimental result.

*Keywords:* defects, dynamic thermoelasticity, linear thermal expansion coefficient