ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 500, с. 34–38

ФИЗИКА

УДК 534.014.2

О КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

 А. Г. Петров[1,*]

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 07.04.2021 г.
Поступило 07.04.2021 г.
После доработки 16.08.2021 г.
Принято к публикации 23.08.2021 г.

Рассматриваются вынужденные линейные колебания диссипативных механических систем с двумя степенями свободы под действием периодических по времени сил. Уравнения в форме Лагранжа выражаются через три положительно определенные квадратичные формы: кинетическая энергия, диссипативная функция и потенциальная энергия. Показано, при условии равенства нулю определителя третьего порядка коэффициентов квадратичных форм все три квадратичные формы приводятся к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами. В этом случае система уравнений четвертого порядка уравнения расщепляются на два независимых уравнения второго порядка для линейных осцилляторов, для которых решение системы находится в общем аналитическом виде. Эффективность метода демонстрируется на анализе вынужденных колебаний двойного маятника.

Ключевые слова: вынужденные линейные колебания, квадратичные формы, канонический вид, двойной маятник

DOI: 10.31857/S2686740021050072

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи интегрирования и качественного анализа дифференциальных уравнений значительно упрощаются после приведения исследуемых объектов к соответствующим нормальным формам. Необходимость в таком анализе возникает, например, для исследования малых колебаний механических систем [1, 2]. Консервативные механические системы характеризуются двумя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы. Для них всегда существуют нормальные координаты, в которых обе квадратичные формы приводятся к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами [3], а уравнения свободных и вынужденных колебаний расщепляются на независимые уравнения второго порядка (линейные осцилляторы). В диссипативных системах появляется третья квадратичная форма – функция Рэлея, определяющая линейные по скоростям обобщенные силы [1, 2].

Три квадратичные формы привести к сумме квадратов почти всегда невозможно, и поэтому система на независимые осцилляторы не расщепляется. Анализ таких систем сильно осложняется, даже в случае двух степеней свободы.

Наиболее общее условие приведения трех квадратичных форм с матрицами A, B и C к сумме квадратов получено Новиковым [4]:

$$BA^{-1}C = CA^{-1}B.$$

Для двух степеней свободы условие равносильно четырем равенствам нулю элементов соответствующей матрицы.

В данной работе вместо четырех условий получено одно простое необходимое и достаточное условие: равенство нулю определителя третьего порядка коэффициентов трех квадратичных форм. Вывод условия тоже упрощается и проводится, не опираясь на результат [4].

Дан пример применения полученного условия для анализа малых колебаний двойного маятника с учетом сил вязкого трения, линейных по скоростям [1, 2].

1. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Кинетическая T и потенциальная Π энергия, диссипативная функция Рэлея R и мощность внешних сил N имеют вид

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: petrovipmech@gmail.com*

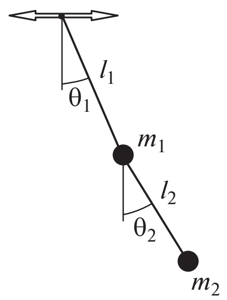

Рис. 1. Двойной маятник.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{x}_1^2 + 2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_2^2\right),\\
R &= \frac{1}{2}\left(b_{11}\dot{x}_1^2 + 2b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2^2\right),\\
\Pi &= \frac{1}{2}\left(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2\right),\\
N &= (U_1\dot{x}_1 + U_2\dot{x}_2)\sin\omega t.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Запишем уравнения движения механической системы, в которой Π, R и N определяют потенциальную, диссипативную и внешнюю силу, меняющуюся по гармоническому закону с амплитудами U_1, U_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

В разделе 3 доказано, если определитель коэффициентов квадратичных форм равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

то существует линейная замена

$$Y = QX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

приводящая три квадратичные формы к сумме квадратов

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(a'_{11}y_1^2 + a'_{22}y_2^2\right),\\
&\frac{1}{2}\left(b'_{11}y_1^2 + b'_{22}y_2^2\right),\\
&\frac{1}{2}\left(c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2\right),
\end{aligned}
$$

а уравнения (2) расщепляются на два независимых уравнения второго порядка для простейших ленейных осцилляторов

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2y}{dt^2} + A_i\frac{dy}{dt} + B_iy = E_i\sin\omega t, \quad i = 1, 2,\\
&E_1 = U_1q_{11} + U_2q_{21}, \quad E_2 = U_1q_{12} + U_2q_{22}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Анализ такой системы значительно упрощается. Решение для установившихся колебаний имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_i &= P_i\sin\omega t - Q_i\cos\omega t,\\
P_i &= \frac{E_i(B_i - \omega^2)}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2\omega^2},\\
Q_i &= \frac{E_iA_i\omega}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2\omega^2}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Амплитуды колебаний

$$a_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2} = \frac{E_i}{\sqrt{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2\omega^2}}, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Для описания переходного процесса, из состояния покоя до установления необходимо решить уравнение (4) с начальными условиями $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Решение имеет вид

$$
\begin{aligned}
&y_i(t) = P_i\sin\omega t - Q_i\cos\omega t + J_i(t), \quad \omega_i = \sqrt{B_i^2 - A_i^2/4},\\
&J_i(t) = e^{-At/2}\left(\left(\frac{Q_i - 2P_i\omega}{2\omega_i}\right)\sin(\omega_i t) + Q_i\cos(\omega_i t)\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Полезность полученных формул ниже демонстрируется на исследовании малых вынужденных колебаний двойного плоского маятника с учетом сил трения.

2. ДВОЙНОЙ ПЛОСКИЙ МАЯТНИК

Рассмотрим малые колебания около положения равновесия двойного плоского маятника, у которого точка подвеса движется по горизонтали по гармоническому закону $x = a\sin\omega t$ (рис. 1).

Стандартная методика [1, 2] сводит эту задачу к решению линейной системы четвертого порядка. Точное ее решение в силу большой громоздкости не выписывается и обычно ограничиваются качественным приближенным анализом. Если же подчинить параметры системы единственному условию (3), то система расщепится на два простейших линейных осциллятора, точное решение которых дается весьма простыми формулами (5), (7).

Запишем уравнения маятника в форме Лагранжа (1), (2) относительно углов θ_1, θ_2 [5]. В кинетической T и потенциальной Π энергиях и диссипативной функции R учтем только квадратичные члены.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2,$$

$$R = \frac{1}{2}r_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}r_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2\theta_2^2,$$

$$N = a\omega^2((m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1 + m_2 l_2\dot{\theta}_2)\sin\omega t,$$

где предполагается линейный по относительной угловой скорости закон вязкого трения в шарнирах с коэффициентами r_1, r_2.

Из равенства нулю определителя коэффициентов квадратичных форм (3) вытекает: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2}{m_1}$, т.е. коэффициенты трения должны быть пропорциональны массам $r_1 = rm_1$, $r_2 = rm_2$. При этом условии все функции T, R, Π приведутся к сумме квадратов. Чтобы найти такое преобразование, сначала делается замена переменных $\theta_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{gl_1(m_1 + m_2)}}$, $\theta_2 = \frac{\xi_2}{\sqrt{gl_2 m_2}}$, приводящая квадратичные формы к виду

$$T = \frac{1}{2}(a'_{11}\dot{y}_1^2 + 2a'_{12} + a'_{22}\dot{y}_2^2),$$

$$R = \frac{1}{2}(b'_{11}\dot{y}_1^2 + 2b'_{12} + b'_{22}\dot{y}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2),$$

$$a'_{11} = \frac{l_1}{g}, \quad a'_{22} = \frac{l_2}{g}, \quad a'_{12} = \sqrt{l_1 l_2}\mu, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$b'_{11} = \frac{r}{(l_1 l_2)a'_{22}}, \quad b'_{22} = \frac{r}{(l_1 l_2)a'_{11}}, \quad b'_{12} = -\frac{r}{(l_1 l_2)a'_{12}}.$$

Построим, следуя [3], ортогональное преобразование, приводящее первую матрицу к диагональному виду. Для этого надо найти собственное число λ_1 и единичный собственный вектор e_1, e_2 из решения системы

$$\begin{pmatrix} a'_{11} - \lambda_1 & a'_{11} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Второе собственное число λ_2 находится из аналогичного уравнения. Второй собственный вектор ортогонален первому. Они имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{2g}(l_1 + l_2 - (l_1 - l_2)\sqrt{1 + M}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2g}(l_1 + l_2 + (l_1 - l_2)\sqrt{1 + M}),$$

$$e_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + M}}\right)},$$

$$e_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + M}}\right)}, \quad M = \frac{4l_1 l_2\mu}{(l_1 - l_2)^2}.$$

Преобразование $\xi_1 = e_1 y_1 + e_2 y_2$, $\xi_2 = -e_2 y_1 + e_1 y_2$ приводит первую и вторую матрицы к диагональному виду. Собственные значения матрицы R с точностью до множителя $r/(l_1 l_2)$ совпадают с собственными значениями матрицы T, но меняются местами.

В преобразованных переменных функции T, R, Π и N примут вид

$$T = \frac{1}{2}\left(\lambda_1\dot{y}_1^2 + \lambda_2\dot{y}_2^2\right), \quad R = \frac{r}{2l_1 l_2}\left(\lambda_2\dot{y}_1^2 + \lambda_1\dot{y}_2^2\right),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right),$$

$$N = \frac{a\omega^2}{\sqrt{g}}\Big(\sqrt{m_2 l_2}(-e_2 y_1 + e_1 y_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)l_1}(e_1 y_1 + e_2 y_2)\Big),$$

а система уравнений приведется к виду (4), в которой

$$A_1 = \frac{r}{l_1 l_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad A_2 = \frac{r}{l_1 l_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad B_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad B_2 = \frac{1}{\lambda_2},$$

$$E_1 = \frac{a\omega^2}{\lambda_1\sqrt{g}}(-e_2\sqrt{l_2 m_2} + e_1\sqrt{l_1(m_1 + m_2)}),$$

$$E_2 = \frac{a\omega^2}{\lambda_2\sqrt{g}}(e_1\sqrt{l_2 m_2} + e_2\sqrt{l_1(m_1 + m_2)}).$$

Подставляя найденные коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2, E_1, E_2 в формулы (5), получим решение для установившихся колебаний маятника, а в формулы (7) – решение для переходного процесса. С помощью (6) находится амплитудная характеристика в переменных y_1, y_2. В исходных переменных решение выражается через функции y_1, y_2:

$$\theta_1 = \frac{e_1 y_1 + e_2 y_2}{\sqrt{gl_1(m_1 + m_2)}}, \quad \theta_2 = \frac{-e_2 y_1 + e_1 y_2}{\sqrt{gl_2 m_2}}. \tag{8}$$

В частном случае $l_1 = l_2 = l$ формулы упрощаются:

$$\begin{gathered}
\lambda_{1,2} = \frac{l}{g}(1 \mp \sqrt{\mu}), \quad x_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 \pm y_2)), \\
A_1 = \frac{r}{l^2}\frac{1 + \sqrt{\mu}}{1 - \sqrt{\mu}}, \quad A_2 = \frac{r}{l^2}\frac{1 - \sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}, \\
B_1 = \frac{g}{l(1 - \sqrt{\mu})}, \quad B_2 = \frac{g}{l(1 + \sqrt{\mu})}, \\
E_1 = E_2 = E_0\omega^2, \quad E_0 = a\sqrt{\frac{g}{2l}(m_1 + m_2)}, \\
-e_1 = e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Полное описание колебаний можно получить подстановкой найденных выражений A_i, B_i, E_i в формулы (5), (7).

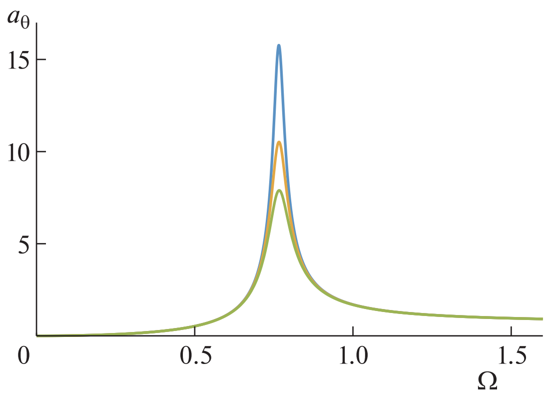

Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика.

Подстановкой (9) в формулу (6) находятся амплитуды нормальных переменных y_1 и y_2 и их наибольшие значения:

$$a_{yi} = \frac{E_0\omega^2}{\sqrt{(B_i-\omega^2)^2 + A_i^2\omega^2}},$$
$$\max(a_{yi}) = \frac{2E_0B_i}{A_i\sqrt{4B_i - A_i^2}}, \quad i = 1, 2,$$

которые достигаются при $\omega = \dfrac{B_1}{\sqrt{B_1 - A_1^2}}$ и $\omega = \dfrac{B_2}{\sqrt{B_2 - A_2^2}}$.

С помощью (9) находится отношение максимальных амплитуд

$$\frac{\max(a_{y_2})}{\max(a_{y_1})} = \frac{(1+\sqrt{\mu})^{3/2}\left(1 - \varepsilon^2\dfrac{(1+\sqrt{\mu})^2}{4(1-\sqrt{\mu})}\right)^{1/2}}{(1-\sqrt{\mu})^{3/2}\left(1 - \varepsilon^2\dfrac{(1-\sqrt{\mu})^2}{4(1+\sqrt{\mu})}\right)^{1/2}},$$
$$\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{gl^3}}.$$

В диапазоне параметров $\mu \in (1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ значение $\max(a_{y2})$ превосходит $\max(a_{y_1})$ более чем в 9 раз. Поэтому для амплитудных характеристик углов вместо формул (8) можно пользоваться упрощенными формулами

$$\theta_1 \approx \mu\theta_2, \quad \theta_2 \approx \frac{y_2}{\sqrt{2glm_2}}. \tag{10}$$

Наибольшие значения амплитуд углов θ_1 и θ_2 достигаются при частоте $\omega = \dfrac{B_2}{\sqrt{B_2 - A_2^2/2}}$. Используя (9) и (10), находим

$$\max(\theta_1) \approx \frac{\max(a_{y_2})}{\sqrt{2gl(m_1+m_2)}} =$$
$$= \frac{a}{2l\varepsilon}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\mu}}}{(1-\sqrt{\mu})}\left(1 - \varepsilon^2\frac{(1-\sqrt{\mu})^2}{4(1+\sqrt{\mu})}\right)^{-1/2}, \tag{11}$$
$$\max(\theta_2) \approx \frac{\max(\theta_1)}{\sqrt{\mu}}.$$

На рис. 2 изображены амплитудно-частотные характеристики для угла θ_2 при $\varepsilon = 0.2, 0.3$ и 0.4 и $m_1 = m_2$. По оси абсцисс откладывается безразмерная частота $\Omega = \dfrac{\omega}{\sqrt{g/l}}$, а по оси ординат — амплитуда угла, отнесенная к величине $\dfrac{a}{l}$. При увеличении диссипационного параметра ε максимум амплитуды уменьшается по закону:

$$\max(\theta_1) \approx 2.23\left(\frac{a}{l}\right)(\varepsilon^2 - 0.012\varepsilon^4)^{-1/2},$$
$$\max(\theta_2) \approx 1.44\max(\theta_1).$$

Приведенные графики приближенных формул (10) неотличимы от графиков, построенных по точным формулам.

На параметры задачи следует наложить условие $\max(\theta_2) \ll 1$, чтобы линейная теория колебаний была применима.

3. ТЕОРЕМА ОБ УСЛОВИИ ПРИВЕДЕНИЯ ТРЕХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ К ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Пусть даны три квадратичные формы двух переменных:

$$f_1 = \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2),$$
$$f_2 = \frac{1}{2}(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2),$$
$$f_3 = \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2).$$

Тогда для существования невырожденного преобразования, приводящего их к виду $\frac{1}{2}(a'_{11}y_1^2 + a'_{22}y_2^2)$, $\frac{1}{2}(b'_{11}y_1^2 + b'_{22}y_2^2)$, $\frac{1}{2}(c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2)$, *необходимо и достаточно выполнения условия* (3), *т.е. чтобы определитель* Δ, *составленный из коэффициентов исходных квадратичных форм, обратился в ноль.*

Доказательство. Квадратичные формы от двух переменных образуют векторное пространство размерности 3 из векторов $\mathbf{a}(a_{11}, a_{12}, a_{22})$, $\mathbf{b}(b_{11}, b_{12}, b_{22})$, $\mathbf{c}(c_{11}, c_{12}, c_{22})$. Если квадратичные формы f_1, f_2, f_3 одновременно приводятся к каноническому виду, то линейная оболочка этих форм является подпространством размерности 2 или меньше, а следовательно, три формы линейно зависимы и определитель, составленный из координат векторов **a**, **b**, **c**, равен нулю $\Delta = 0$. Это и есть условие теоремы. Наоборот, если $\Delta = 0$, то f_1, f_2, f_3 линейно зависимы, и при этом f_1, f_2 линейно независимы, то f_3 линейно выражается через f_1, f_2, и тогда достаточно привести к каноническому виду две формы f_1, f_2. Если же f_1 пропорциональна f_2, то задача сводится к приведению двух форм f_2, f_3, что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Теорема непосредственно вытекает из критерия Новикова [4] и тождества для матриц размерности 2:

$$(AB^{-1}C - CB^{-1}A)\det(B) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для вынужденных колебаний диссипативных механических систем с двумя степенями свободы получено простое условие расщепления системы уравнений 4-го порядка на две независимые системы 2-го порядка для линейных осцилляторов. Эта система значительно проще исходной и позволяет получать простое аналитическое решение системы в общем виде.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 2001.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
4. *Новиков М.А.* // Известия вузов. Математика. 2014. № 12. С. 70–82.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965.

ON VIBRATIONAL DISSIPATIVE SYSTEMS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

A. G. Petrov[a]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. F. Zhuravlev

Forced linear oscillations of dissipative mechanical systems with two degrees of freedom under the action of time-periodic forces are considered. The Lagrange equations are expressed in terms of three positive-definite quadratic forms: kinetic energy, dissipative function, and potential energy. A dimple necessary and sufficient condition for simultaneous reducibility to diagonal forms of symmetric matrices of three real quadratic forms of two variables is formulated and proved. The condition was reduced to the equality of the third-order determinant of the coefficients of quadratic forms to zero. In t his case, by linear transformation, the quadratic forms are reduced to the sum of squares, and the equations are split into two independent second-order equations. The solution of the system Is in a general analytical form. The effectiveness of the method is demonstrated by analyzing the forced oscillations of a double pendulum.

Keywords: forced linear oscillations, quadratic forms, canonical form, double pendulum