

УДК 532.516: 532.574.4

## РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ СИММЕТРИИ И ИХ СВЯЗЬ С ПЕРЕХОДНЫМИ И ТУРБУЛЕНТНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

© 2021 г. В. Г. Приймак<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Г.С. Голицыным 14.07.2021 г.

Поступило 21.07.2021 г.

После доработки 01.08.2021 г.

Принято к публикации 02.08.2021 г.

Общепринятая математическая модель, описывающая ламинарно-турбулентный переход в круглой трубе, основана на полной системе уравнений Навье–Стокса. Рассчитанная динамика хаотична и слишком сложна для расшифровки сценариев перехода к турбулентности и построению на этой основе более простых физических моделей. В работе исследуется возможность упрощения математической модели, ограничивающей динамику зеркальной и вращательной симметриями скорости. Показано, что в обоих случаях переходные и турбулентные течения не могут быть правильно рассчитаны, что делает недостаточно обоснованным использование ограничений симметрии при построении более простых моделей турбулентности.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, решения с ограничениями симметрии, ламинарно-турбулентный переход, течение в круглой трубе

DOI: 10.31857/S2686740021050084

Задача об устойчивости течения Пуазейля в трубе является тестовой для исследования докритического перехода. В отсутствие ограничений симметрии течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе  $\Omega = \{\mathbf{r} = (r, \varphi, x): 0 \leq r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, |x| < \infty\}$  описывается здесь уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \Pi + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = [v, w, u]$  – скорость,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ ,  $\Pi = \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}$ ,  $p$  – давление,  $\Delta$  – векторный лапласиан,  $\nu$  и  $\rho$  – постоянные кинематическая вязкость и плотность.

Уравнения (1) дополняются начальными условиями для скорости. В качестве граничных условий используются периодичность в осевом и азимутальном направлениях и условие прилипания на стенке

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r, \varphi, x, t) &= \mathbf{v}(r, \varphi, x + X, t), \\ \mathbf{v}(r, \varphi, x, t) &= \mathbf{v}(r, \varphi + 2\pi, x, t), \quad \mathbf{v}|_{r=R} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $X$  – параметр математической модели.

Для переменной  $\Pi$ , которую можно трактовать как множитель Лагранжа для условия несжимаемости, не требуется задания граничных условий. Расчеты проводятся при условии постоянства расхода жидкости

$$U(t) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi u(r, \varphi, x, t) = \text{const.}$$

Пространственная дискретизация краевой задачи включает тригонометрическую аппроксимацию методом Галёркина по переменным  $x, \varphi$ :

$$\mathbf{v} = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \mathbf{v}_{nm}(r, t) \exp(i\alpha_m x + in\varphi), \quad (2)$$

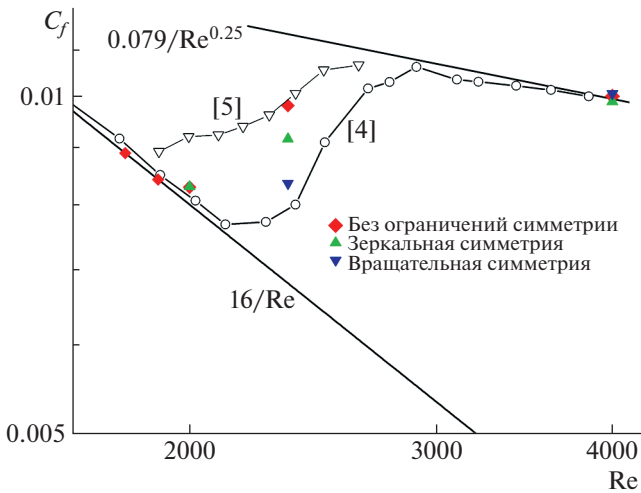
$$\mathbf{v}_{nm}^* = \mathbf{v}_{-n, -m}, \quad i^2 = -1, \quad \alpha_m = \frac{2\pi m}{X},$$

и чебышевскую псевдоспектральную аппроксимацию с узлами коллокации  $r_j = R \cos\left(\frac{\pi j}{2Q}\right), j = 0, 1, \dots, Q$ , по  $r$ .

Заметим, что коэффициенты уравнений (1) пропорциональны  $1/r$  и  $1/r^2$ . Наличие особенностей на оси трубы не связано с физикой течения, является следствием использования цилиндрических координат, и требует подходящей регуляри-

<sup>1</sup> Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: vgpriymak@mail.ru



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента сопротивления  $C_f = -\frac{\langle \partial p / \partial x \rangle_{r\varphi x t} R}{\rho U^2}$  от числа Рейнольдса для режимов течений без ограничений симметрии, с зеркальной и вращательной симметриями;  $\langle \partial p / \partial x \rangle_{r\varphi x t}$  – усредненный по пространству и времени градиент давления. Нижняя  $C_f = 16/Re$  и верхняя  $C_f = 0.079/Re^{0.25}$  прямые отвечают соответственно ламинарному закону сопротивления и закону сопротивления Блазиуса.

зации для сохранения спектральной точности. С этой целью здесь используются интерполяционные полиномы для  $\mathbf{v}_{nm}(r, t)$  приближенно следующие асимптотике аналитических функций при  $r \rightarrow 0$  [1, теорема 1]. В итоге обеспечивается не-сингулярность уравнений Навье–Стокса и их дивергенции.

Численное моделирование на основе рассмотренной математической модели адекватно описывает (см. [2]) как перемежаемые, так и установившиеся турбулентные режимы течений при числах Рейнольдса  $1950 \leq Re \leq 4000$ ,  $Re = \frac{2RU}{v}$ . Расчеты проводятся на больших промежутках времени, с высоким пространственным разрешением, и очень трудоемки. При этом рассчитанная динамика хаотична и сложна для расшифровки сценариев перехода к турбулентности.

Между тем, математическая модель имеет богатую группу симметрии  $O(2)_\varphi \times SO(2)_x$  (индексы  $\varphi, x$  отвечают азимутальному вращению и сдвигу вдоль оси трубы), которая потенциально может быть использована как для упрощения самой математической модели, так и при построении более простых, чем уравнения Навье–Стокса, физических моделей ламинарно-турбулентного перехода. Здесь мы анализируем результаты и возможности использования двух популярных

случаев симметрии, ограничивающих динамику зеркальной (отражение относительно  $\varphi = 0$ )

$$[v, w, u](r, \varphi, x, t) = [v, -w, u](r, -\varphi, x, t), \quad (3)$$

и вращательной ( $\pi$ -периодичность)

$$[v, w, u](r, \varphi, x, t) = [v, w, u](r, \varphi + \pi, x, t) \quad (4)$$

симметриями.

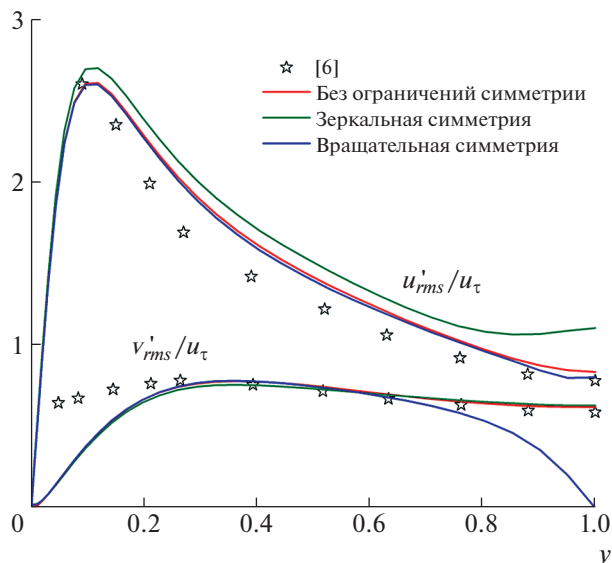
Чтобы выяснить, существуют ли долгоживущие статистически стационарные решения уравнений Навье–Стокса с ограниченной динамикой и какова их связь с переходными и турбулентными течениями, при  $Re = 2000, 2350$  и  $4000$  проведены расчеты трех видов – без ограничений симметрии, с зеркальной и вращательной симметриями. Указанным  $Re$  отвечают (см. [3]) различные стадии перехода к турбулентности. В предыдущей работе [1] кратко рассмотрен лишь случай зеркальной симметрии (3) при  $Re = 4000$ .

Все расчеты проведены по алгоритму [1]; в трубе длиной  $X = 120\pi R$ ; с  $(Q + 1) \times (2N + 1) \times (2M + 1) = 33 \times 81 \times 2401$  спектральными модами по  $r, \varphi, x$ ; на больших промежутках времени  $T \approx 3 \times 10^4 R/U$ ; с использованием графического ускорителя Tesla K80.

Рисунок 1 может рассматриваться как карта рассчитанных режимов течений. Каждой темной точке на плоскости  $(C_f, Re)$ , где  $C_f$  – коэффициент сопротивления, соответствует статистически стационарная стадия одного из численных решений настоящей работы. Экспериментальные черно-белые точки из [4, 5] служат, скорее, не для количественного сопоставления с расчетами, а для указания примерных границ области ламинарно-турбулентного перехода.

Оказалось, что при  $Re = 4000$  (однородный вдоль трубы турбулентный режим) значения  $C_f$  практически совпадают для решений уравнений Навье–Стокса без ограничений симметрии, с зеркальной и вращательной симметриями. Напротив, в области деления турбулентных клубов (puffs) и образования цепочек дочерних клубов ( $Re = 2350$ ) значения коэффициента сопротивления существенно различаются для решений различной симметрии. И, наконец, при  $Re = 2000$  (область изолированных клубов, окруженных ламинарным течением) значения  $C_f$  снова совпадают у решений общего вида и решений с зеркальной симметрией. Решений с вращательной симметрией при  $Re = 2000$  рассчитать не удалось.

Уточним, что при  $Re = 2000$  нами рассматривался режим с единственным турбулентным клубом на длине периодичности  $X$ . Для контроля, мы показываем также рассчитанные при  $Re = 1800$  и  $1900$  режимы, которые совпадают с течением Пуазейля и отвечают ламинарному закону сопро-



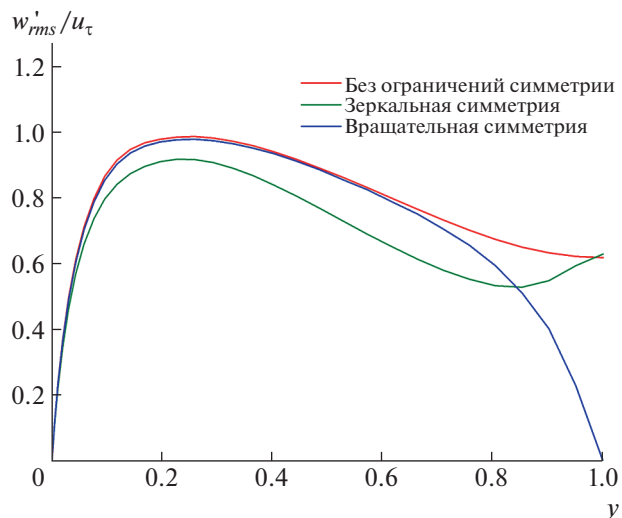
**Рис. 2.** Среднеквадратичные пульсации продольной  $u$  и радиальной  $v$  компонент скорости как функции расстояния  $y = 1 - r/R$  от стенок трубы ( $u_\tau$  – динамическая скорость). Изображены также данные эксперимента [6].

тивления  $C_f = 16/Re$ . Такие режимы удовлетворяют, конечно, условиям симметрии (3) и (4).

На рис. 2 сопоставляются профили среднеквадратичных пульсаций продольной и радиальной компонент скорости, рассчитанные при  $Re = 4000$  без ограничений симметрии, с зеркальной симметрией и с вращательной симметрией. Несмотря на совпадение значений  $C_f$ , мы видим, что использование в расчетах соотношений симметрии (3), (4) является довольно рискованным решением: некоторые характеристики течения не могут быть правильно вычислены, в то время как другие лишь слабо чувствительны к ограничениям симметрии. То же верно и в области ядра турбулентных клубов при  $Re = 2000$  и  $2350$ .

Аналогичная картина наблюдается для распределений среднеквадратичных пульсаций азимутальной компоненты скорости (рис. 3) и продольной компоненты завихренности (рис. 4), полученных в расчетах с различными предположениями о симметрии течения.

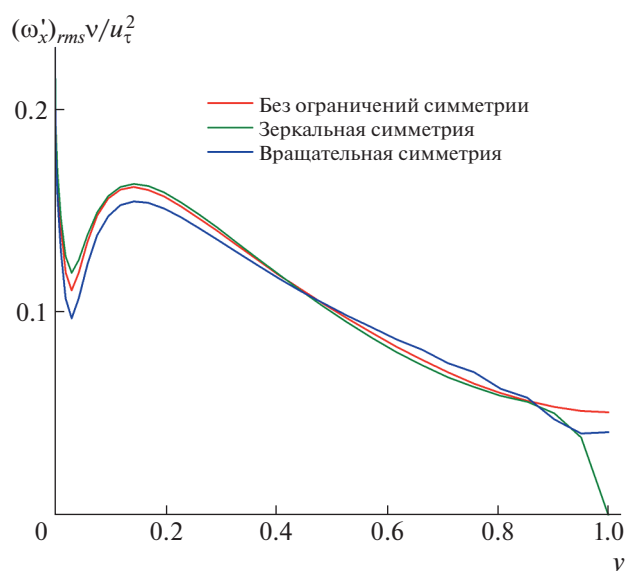
Отметим в этом контексте, что, если начальное поле скорости удовлетворяет условиям симметрии, то эти условия воспроизводятся в произвольный момент времени даже при использовании универсального компьютерного кода. Дело в том, что половина мод Фурье в (2) равна нулю как для условий (3), так и для условий (4), а ошибки округления перестают играть дестабилизирующую роль: результат умножения ненулевого значения переменной на машинный ноль (при вы-



**Рис. 3.** Профили среднеквадратичных пульсаций азимутальной компоненты скорости.

числения квадратичных нелинейных членов) интерпретируется компьютером как машинный ноль. В результате мы можем даже не подозревать, что вычисляем симметричные решения вместо решений общего вида.

В работе показано, что численные решения уравнений Навье–Стокса с ограничениями симметрии (3), (4) могут существовать в области переходных чисел Рейнольдса, но не всегда корректно описывают гидродинамические характеристики течений. Последнее может привести к ошибкам при интерпретации результатов таких расчетов; при расшифровке механизмов лами-



**Рис. 4.** Профили среднеквадратичных пульсаций продольной компоненты завихренности.

нарно-турбулентного перехода; при построении (см., например, [7–9]) упрощенных физических моделей, основанных на соотношениях симметрии.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен О.Г. Чхетиани за полезные обсуждения работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Priymak V.G., Miyazaki T.* Accurate Navier-Stokes investigation of transitional and turbulent flows in a circular pipe // *J. Comput. Phys.* 1998. V. 142. P. 370–411.
2. *Priymak V.G.* Direct numerical simulation of quasi-equilibrium turbulent puffs in pipe flow // *Phys. Fluids.* 2018. V. 30. 064102.
3. *Barkley D.* Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 803. P. 1.
4. *Patel V.C., Head M.R.* Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 38. P. 181–201.
5. *Samanta D., de Lozar A., Hof B.* Experimental investigation of laminar turbulent intermittency in pipe flow // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 681. P. 193–204.
6. *Shemer L., Wygnanski I., Kit E.* Pulsating flow in a pipe // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 153. P. 313–337.
7. *Ritter P., Mellibovsky F., Avila M.* Emergence of spatio-temporal dynamics from exact coherent solutions in pipe flow // *New J. Phys.* 2016. V. 18. 083031.
8. *Никитин Н.В., Пиманов В.О.* О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 1. С. 68–76.
9. *Budanur N.B., Dogra A.S., Hof B.* Geometry of transient chaos in streamwise-localized pipe flow turbulence // *Phys. Rev. Fluids.* 2019. V. 4. 102401.

## NAVIER–STOKES SOLUTIONS WITH SYMMETRY RESTRICTIONS AND THEIR RELATION WITH TRANSITIONAL AND TURBULENT PIPE FLOWS

V. G. Priymak<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*  
Presented by Academician of the RAS G.S. Golitsyn

The prevailing mathematical model describing laminar-turbulent transition in a circular pipe is based on a full system of Navier–Stokes equations. Calculations using this model are very expensive, also the computed dynamics is chaotic and too complex to decode the transition scenario. In the present study we consider certain simplifications, including popular cases restricting the dynamics to reflectional and rotational symmetries. We show that in these two cases transitional and turbulent flows cannot be properly computed.

*Keywords:* Navier–Stokes equations, symmetry restrictions, laminar-turbulent transition, flow in a circular pipe