ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 500, с. 57–64

МЕХАНИКА

УДК 531.44

О РАВНОВЕСИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ ОДНОЙ ТОЧКОЙ НА ШЕРОХОВАТУЮ ПЛОСКОСТЬ

© 2021 г. Г. М. Розенблат[1,*]

Представлено академиком РАН В. Ф. Журавлёвым 24.05.2021 г.
Поступило 29.05.2021 г.
После доработки 07.08.2021 г.
Принято к публикации 20.08.2021 г.

Рассматривается задача о возможном и обязательном (в смысле Джеллетта) равновесии твердого тела, которое контактирует одной своей точкой с шероховатой плоскостью и находится под действием произвольной системы сил. Распределения масс в теле (т.е. центральный тензор инерции и положение центра масс тела относительно точки опоры) предполагаются произвольными. В точке контакта тела с опорой (односторонняя связь) действует сила сухого трения, подчиняющаяся классическому закону Кулона–Эйлера. Получены необходимые и достаточные условия обязательного равновесия. Эти условия выражаются простыми аналитическими формулами. Приводится сравнение с соответствующими результатами для плоского случая, полученными ранее.

Ключевые слова: сухое трение, статическое равновесие, точечный контакт, обязательное равновесие, односторонняя связь

DOI: 10.31857/S2686740021050096

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о возможных и обязательных условиях равновесия твердого тела при наличии сухого трения восходят к Дж.Х. Джеллетту [1]. Возможное равновесие означает существование таких сил трения покоя и нормальных реакций связей, подчиняющихся закону Кулона–Эйлера, которые в состоянии статически уравновесить приложенную к телу систему сил (т.е. удовлетворить обычным уравнениям статики для твердого тела, в предположениях закона Кулона для возникающих сил трения покоя). Обязательное равновесие (при наличии возможного равновесия) означает отсутствие возможности начала безотрывного скольжения тела из рассматриваемого состояния с нулевыми начальными скоростями.

В данной работе изучается равновесие твердого тела, которое контактирует одной своей точкой с шероховатой плоскостью (точечный контакт с трением и односторонней связью). К телу приложена произвольная система внешних сил. Для рассматриваемой модели задача об обязательном равновесии решается следующим образом. Обозначим через O точку контакта тела с опорой (см. рис. 1). Пусть эта точка начинает двигаться с произвольным ускорением w_O в опорной плоскости так, что тело совершает безотрывное ускоренное движение с нулевыми начальными скоростями. Кроме того, тело начинает вращаться с некоторым угловым ускорением ε.

В результате такого движения в точке опоры возникает сила сухого трения скольжения, которая подчиняется следующему классическому закону Кулона (в модификации Пэнлеве [2] для начала скольжения):

$$F_{fr} = -\frac{fNw_O}{|w_O|}, \qquad (1)$$

где f – коэффициент трения, $w_O \neq 0$ – вектор ускорения точки O, $N > 0$ – нормальная реакция в точке O. Отметим, что при наличии вращения тела вокруг нормали к опорной плоскости закон (1) является весьма приближенным, а для более точного анализа должны использоваться более совершенные модели (см., например, модель трения Контенсу–Журавлёва [3, 4]).

Вводим неподвижную систему координат $Oxyz$, для которой ось Oz совпадает с нормалью к опорной плоскости, а плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью (см. рис. 1). Далее, при условии нулевых начальных скоростей точек тела, составляем 6 уравнений динамики для введенных ускорений (три уравнения для движения центра масс и три уравнения для кинетического момента относительно центра масс тела). В этих

[1] *Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия*
**E-mail: gr51@mail.ru*

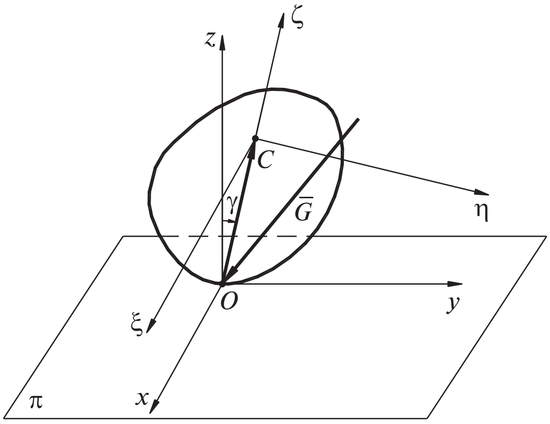

Рис. 1. Твердое тело, опирающееся одной точкой на шероховатую плоскость: π — опорная плоскость; O — точка опоры; C — центр масс тела; G — вектор равнодействующей всех активных внешних сил; $Oxyz$ – система координат с началом в опорной точке O, для которой ось Oz направлена по нормали к плоскости π, плоскость Oxy совпадает с плоскостью π, а вектор OC лежит в плоскости Oyz; $C\xi\eta\zeta$ – система координат с началом в центре масс C, для которой ось $C\zeta$ направлена по вектору OC, а ось $C\xi$ параллельна оси Ox; γ – угол, образуемый вектором OC с положительным направлением оси Oz.

уравнениях будут присутствовать ровно 6 неизвестных величин: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, w_{Ox}, w_{Oy}, N$. При решении полученной системы необходимо учесть, что $N > 0, |w_O| > 0$. Тогда условия, при которых полученная система уравнений вместе с указанными неравенствами несовместна, при наличии возможного равновесия, и будут представлять собой условия обязательного равновесия.

В настоящей работе такие условия при произвольных параметрах системы получены в рамках классической модели Кулона (1). Некоторые результаты решения рассматриваемой задачи для частных случаев распределения масс в твердом теле были получены ранее в работах [5, 6]. Отметим, что вопросы неединственности и парадоксальности для задач равновесия и движения в механике твердых тел с сухим трением рассматриваются также в работах [7–11].

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается твердое тело (см. рис. 1), опирающееся одной своей точкой O на шероховатую плоскость, которая создает силу сухого трения в соответствие с моделью Кулона (1). Пусть к телу приложена произвольная система сил, которая обеспечивает возможное (статическое) его равновесие. Известно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы эта система сил приводилась в точке O к равнодействующей G, линия действия которой проходит через точку контакта O (см. рис. 1) и лежит внутри конуса трения для точки O (угол полураствора этого конуса равен углу трения $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$, а ось конуса направлена по нормали к плоскости). Причем, так как связь в точке O является односторонней, должно быть выполнено условие $G_z < 0$. Таким образом, сила G удовлетворяет неравенствам

$$G_x^2 + G_y^2 \le f^2 G_z^2, \quad G_z < 0. \tag{2}$$

Пусть C – центр масс тела. Без ограничения общности будем считать, что вектор OC лежит в плоскости Oyz (в системе координат $Oxyz$, описанной во введении). Обозначим через γ – угол, образуемый вектором OC с положительным направлением оси Oz (см. рис. 1). Будем считать, что $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (это также не умаляет общности). Введем систему координат $C\xi\eta\zeta$, для которой ось $C\zeta$ направлена по вектору OC, плоскость $C\eta\zeta$ совпадает с плоскостью Oyz, а ось $C\xi$ параллельна оси Ox. Таким образом, система координат $C\xi\eta\zeta$ получена из системы $Oxyz$ поворотом на угол γ вокруг оси Ox по часовой стрелке и параллельным переносом на вектор OC (см. рис. 1).

Пусть ψ – угол отклонения вектора G от плоскости $C\eta\zeta$. Поясним более подробно: ψ – угол, образуемый вектором G с его ортогональной проекцией на плоскость $C\eta\zeta$. На рис. 1 этот угол не изображен, отметим лишь, что в общем случае угол ψ не совпадает с углом между векторами G и CO. Для проекции вектора G на ось $C\xi$ получим

$$G_\xi = G \sin\psi. \tag{3}$$

Для модуля проекции вектора G на плоскость $C\eta\zeta$ имеем $G_{\zeta\eta} = G\cos\psi$. Пусть φ – угол, образуемый направлением проекции $G_{\zeta\eta}$ с положительным направлением оси $C\zeta$ (если $\varphi = 0$, то угол ψ совпадает в точности с углом между направлением вектора G и вектором OC). Тогда получим для проекций вектора G на оси $C\eta$ и $C\zeta$ следующие выражения:

$$G_\eta = -G\cos\psi\sin\varphi, \quad G_\zeta = -G\cos\psi\cos\varphi. \tag{4}$$

Запишем условия того, что вектор G принадлежит конусу трения. Для этого в системе координат $C\xi\eta\zeta$ подсчитаем угол между единичным вектором e_z оси Oz и единичным вектором e_G оси вектора $(-G)$. Используя (3) и (4), имеем

$$\begin{gathered} e_G = (-\sin\psi, \cos\psi\sin\varphi, \cos\psi\cos\varphi)^{\mathrm{T}}, \\ e_z = (0, -\sin\gamma, \cos\gamma)^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) получаем для косинуса угла δ между векторами e_z, e_G соотношение

$$\cos\delta = \cos\psi\cos(\gamma+\varphi).$$

Из последнего соотношения вытекает, что условие $|\mathrm{tg}\delta| < f$ выполнено при соблюдении неравенства

$$\cos^2\psi\cos^2(\gamma+\varphi) > (1+f^2)^{-1}. \tag{6}$$

Таким образом, постановка задачи такова. Пусть сила G, приложенная к твердому телу, удовлетворяет условиям (2) и проходит через точку контакта O. Углы φ, ψ, которыми задается указанным выше образом ее линия действия, тогда удовлетворяют соотношениям (6). В этом случае реализуется возможное (статическое) равновесие тела. Требуется определить дополнительные условия, которые обеспечивают обязательное равновесие тела, как это было описано выше во введении.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЧАЛЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ТЕЛА

Пусть J – симметричная положительно определенная матрица инерции тела для точки C в системе $C\xi\eta\zeta$, а $B = J^{-1}$ – обратная ей матрица, которая также является симметричной и положительно определенной. Элементы матрицы B будем далее обозначать b_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$.

Пусть возникает начальное скольжение точки O с ускорением w_O в плоскости Oxy. Обозначим: $w = |w_O| > 0$ – модуль этого ускорения, α – угол, который образует вектор ускорения w_O с положительным направлением оси Ox. Пусть при таком движении ε_ξ, ε_η, ε_ζ – проекции вектора углового ускорения тела на оси системы $C\xi\eta\zeta$.

К телу в процессе возникающего движения приложены три силы:

1) сила нормальной реакции $N > 0$, направленная по оси Oz,

2) сила трения скольжения, направленная против вектора w_O, расположенная в плоскости Oxy и равная по модулю fN,

3) сила G – равнодействующая всех внешних сил, приложенных к телу, которая проходит через точку контакта O и удовлетворяет условиям (2).

Тогда уравнения движения центра масс тела C в проекциях на оси системы $C\xi\eta\zeta$ имеют вид (массу тела m и расстояние OC считаем единичными, G – модуль равнодействующей внешних сил):

$$\begin{gathered}
w\cos\alpha + \varepsilon_\eta = G\sin\psi - fN\cos\alpha,\\
w\sin\alpha\cos\gamma - \varepsilon_\xi =\\
= -G\cos\psi\sin\varphi - fN\sin\alpha\cos\gamma - N\sin\gamma,\\
w\sin\alpha\sin\gamma = -G\cos\psi\cos\varphi - fN\sin\alpha\sin\gamma + N\cos\gamma.
\end{gathered} \tag{7}$$

Уравнения теоремы об изменении кинетического момента тела относительно центра масс в системе $C\xi\eta\zeta$ дают следующие выражения для проекций вектора углового ускорения ε тела на оси системы $C\xi\eta\zeta$:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_\xi = b_{11}M_1 + b_{12}M_2,\\
\varepsilon_\eta = b_{12}M_1 + b_{22}M_2, \quad \varepsilon_\zeta = b_{31}M_1 + b_{32}M_2,\\
M_1 = N(-\sin\gamma - f\sin\alpha\cos\gamma) - G\cos\psi\sin\varphi,\\
M_2 = Nf\cos\alpha - G\sin\psi.
\end{gathered} \tag{8}$$

В (8) параметры b_{ij} – суть элементы матрицы $B = J^{-1}$. Подставляя (8) в (7) и обозначая

$$g = \frac{G}{N}, \quad u = f + \frac{w}{N}, \tag{9}$$

получим следующие три уравнения:

$$\begin{gathered}
u\cos\alpha - b_{12}(\sin\gamma + f\sin\alpha\cos\gamma +\\
+ g\cos\psi\sin\varphi) + b_{22}(f\cos\alpha - g\sin\psi) = g\sin\psi,\\
u\sin\alpha\cos\gamma - b_{12}(f\cos\alpha - g\sin\psi) +\\
+ b_{11}(\sin\gamma + f\sin\alpha\cos\gamma + g\cos\psi\sin\varphi) =\\
= -g\cos\psi\sin\varphi - \sin\gamma,\\
u\sin\alpha\sin\gamma = \cos\gamma - g\cos\psi\cos\varphi.
\end{gathered} \tag{10}$$

Так как должны быть выполнены неравенства $w > 0$, $N > 0$, то из (9) следует, что выполняются неравенства

$$g > 0, \quad u > f. \tag{11}$$

Из последнего уравнения системы (10) находим g:

$$g = \cos\gamma\frac{1 - u\sin\alpha\,\mathrm{tg}\gamma}{\cos\psi\cos\varphi} > 0. \tag{12}$$

Уравнение (12), в силу обозначений (9), определяет нормальную реакцию N. Таким образом, задача свелась к решению двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных u, α:

$$\begin{gathered}
[(u + b_{22}f)\cos\alpha + (-b_{12}f\cos\gamma)\sin\alpha] -\\
- g[b_{12}\cos\psi\sin\varphi + (1 + b_{22})\sin\psi] = b_{12}\sin\gamma,\\
[(u + b_{11}f)\sin\alpha\cos\gamma + (-b_{12}f)\cos\alpha] +\\
+ g[b_{12}\sin\psi + (1 + b_{11})\cos\psi\sin\varphi] = -(1 + b_{11})\sin\gamma.
\end{gathered} \tag{13}$$

В системе (13) переменная g дается формулой (12), и должны быть выполнены неравенства (11). Кроме того, необходимо учитывать, что, в силу положительной определенности матрицы B, выполняются следующие неравенства

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0. \tag{14}$$

Задача об обязательном равновесии тела тогда сводится к поиску условий, при которых система (13) с неравенствами (11), (12) и (14) не имеет решений относительно неизвестных α, u.

Преобразуем систему (13), вводя для краткости записи формул обозначения

$$x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha, \quad v = \frac{u}{f}, \quad a = \mathrm{tg}\gamma, \quad b = \mathrm{tg}\varphi, \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{tg}\psi}{\cos\varphi}. \tag{15}$$

Отметим, что для обозначений (15), в силу исходных предположений, должны соблюдаться следующие условия:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad v \ge 1, \quad a > 0.$$

Подставляя величину g из (12) в уравнения (13), с учетом обозначений (15), получим линейную относительно x, y систему уравнений второго порядка:

$$xc_{11} + yc_{12} = h_1, \quad xc_{21} + yc_{22} = h_2. \tag{16}$$

В (16) для краткости записи введены обозначения

$$\begin{gathered} c_{11} = v\left[b_{12}ab + (1 + b_{22})\varepsilon a\right] - b_{12}, \\ c_{12} = \frac{(v + b_{22})}{\cos\gamma}, \\ c_{21} = v\left[1 - (1 + b_{11})ab - b_{12}\varepsilon a\right] + b_{11}, \\ c_{22} = -\frac{b_{12}}{\cos\gamma}, \\ h_1 = \frac{\left[b_{12}(a + b) + (1 + b_{22})\varepsilon\right]}{f}, \\ h_2 = -\frac{\left[(1 + b_{11})(a + b) + b_{12}\varepsilon\right]}{f}. \end{gathered} \tag{17}$$

Решение (по формулам Крамера) линейной системы второго порядка (16) имеет вид

$$x = \frac{\Delta_x(v)}{\Delta(v)}, \quad y = \frac{\Delta_y(v)}{\Delta(v)}. \tag{18}$$

В (18) определитель и миноры для системы (16) даются следующими формулами:

$$\begin{gathered} \Delta(v) = \frac{(k_2v^2 + k_1v + k_0)}{\cos\gamma}, \\ k_2 = (1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1, \quad k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22}, \\ k_1 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)ab - b_{12}\varepsilon a - b_{11} - b_{22}, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \Delta_x(v) = \frac{(l_1v + l_0)}{\cos\gamma}, \quad \Delta_y(v) = (m_1v + m_0), \\ l_1 = \frac{\left[(1 + b_{11})(a + b) + b_{12}\varepsilon\right]}{f}, \\ l_0 = \frac{\left[(b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(a + b) - b_{12}\varepsilon\right]}{f}, \\ m_1 = -\frac{\left[b_{12}(a + b) + (1 + b_{22})\varepsilon + a^2\varepsilon((1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12}^2)\right]}{f}, \\ m_0 = \frac{\left[b_{12}(a + b) + \varepsilon(b_{12}^2 - b_{11} - b_{11}b_{22})\right]}{f}. \end{gathered} \tag{20}$$

Далее рассмотрим некоторые частные случаи расположения равнодействующей G относительно твердого тела.

3. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ G ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР МАСС ТЕЛА И ТОЧКУ КОНТАКТА

В этом случае вектор G направлен по вектору CO. Тогда имеем, с учетом обозначений (15), $\varphi = \psi = 0 \to b = \varepsilon = 0$. Уравнения (16) и неравенство (12) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} xc_{11} + yc_{12} = \frac{b_{12}a}{f}, \quad xc_{21} + yc_{22} = -\frac{(1 + b_{11})a}{f}, \\ g = 1 - vfxa > 0, \quad v > 1, \end{gathered} \tag{21}$$

где, согласно (15) и (17), введены обозначения

$$\begin{gathered} x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha, \quad c_{11} = -b_{12}, \quad c_{12} = \frac{(v + b_{22})}{\cos\gamma}, \\ c_{21} = v + b_{11}, \quad c_{22} = -\frac{b_{12}}{\cos\gamma}. \end{gathered} \tag{22}$$

Решение системы (21) относительно неизвестных x, y таково:

$$x = -\frac{\mu_1[(1+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2]}{\Delta},$$
$$y = \frac{\mu_2 b_{12}(v-1)}{\Delta}, \tag{23}$$

где обозначено

$$\mu_1 = \frac{(\text{tg}\gamma)}{f}, \quad \mu_2 = \sin\gamma, \quad v = \frac{u}{f},$$
$$\Delta = (v+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2. \tag{24}$$

В силу неравенств (6), (11) и (14) для введенных в (24) параметров имеют место неравенства

$$0 < \mu_1 \le 1, \quad 0 < \mu_2 \le 1, \quad v > 1, \quad \Delta > 0. \tag{25}$$

Утверждение 1. Решение (23) системы (21) при $v \ge 1$ и условии статического (возможного) равновесия удовлетворяет строгому неравенству

$$x^2 + y^2 < 1. \tag{26}$$

Доказательство утверждения 1 сводится к непосредственной проверке неравенства (26) для величин *x, y*, даваемых выражениями (23). Приведем кратко основные моменты. Неравенство (26) эквивалентно следующему неравенству:

$$[(v+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2]^2 >$$
$$> \mu_1^2[(1+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2]^2 + \tag{27}$$
$$+ \mu_2^2 b_{12}^2 (v-1)^2, \quad v \in (1,\infty).$$

В силу неравенств (25), неравенство (27) следует из неравенства

$$[(v+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2]^2 >$$
$$> [(1+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2]^2 + \tag{28}$$
$$+ b_{12}^2 (v-1)^2, \quad v \in (1,\infty).$$

Представляя левую часть неравенства в виде

$$[(v-1)(v+b_{22}) + (1+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2]^2,$$

получим, что (28) эквивалентно неравенству

$$(v-1)(v+b_{22})^2 + 2(v+b_{22}) \times$$
$$\times [(1+b_{11})(v+b_{22}) - b_{12}^2] > (v-1)b_{12}^2, \quad v \in (1,\infty). \tag{29}$$

Неравенство (29), с использованием неравенств (14), проверяется непосредственно. Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Утверждение 1 кажется достаточно очевидным. Однако ниже будет показано, что для сколь угодно малого отклонения равнодействующей G от направления вектора OC существуют такие распределения масс в теле, при которых может начаться проскальзывание, и, следовательно, равновесие не будет обязательным.

Следствие 1. *Пусть произвольное твердое тело опирается одной своей точкой на шероховатую плоскость, коэффициент сухого трения которой равен f. Если система внешних сил, приложенных к этому твердому телу, удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Система внешних сил приводится в точке опоры к равнодействующей G.*

2. *Вектор G образует с нормалью к опорной плоскости угол γ, для которого $|\text{tg}\gamma| < f$, а проекция вектора G на эту нормаль является отрицательной.*

3. *Линия действия вектора G проходит через центр масс тела.*

Тогда из утверждения 1 *следует, что тело находится в состоянии статического равновесия (возможное равновесие), которое к тому же является и обязательным.*

Нарушение одного из условий 1 или 2 приводит к нарушению статического равновесия, а нарушение условия 3 может привести к нарушению обязательного равновесия (даже при сохранении возможного равновесия).

Следствие 2. *Из утверждения* 1 *следует также, что положение равновесия тяжелого твердого тела, опирающегося одной своей точкой на шероховатую наклонную плоскость, является всегда (т.е. при любых распределениях масс в теле) обязательным, если угол наклона плоскости не превосходит угла трения. В этом случае заведомо, при возможном равновесии, равнодействующая (сил тяжести) проходит через центр масс и точку опоры.*

4. ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ РАСПОЛОЖЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ G

В этом случае считаем, что нормаль к опорной плоскости (ось Oz), вектор OC и равнодействующая G лежат в одной плоскости (т.е. в плоскости $C\eta\zeta$ или Oyz). Тогда получим $\psi = 0$ и $\varepsilon = \dfrac{\text{tg}\psi}{\cos\varphi} = 0$. Уравнения (16), с учетом обозначений (17), и неравенства (6), (12) приобретают вид

$$x[v(abb_{12}) - b_{12}] + y\left(\frac{v+b_{22}}{\cos\gamma}\right) = b_{12}d,$$
$$x\{v[1 - ab(1+b_{11})] + b_{11}\} + y\left(-\frac{b_{12}}{\cos\gamma}\right) = -(1+b_{11})d, \tag{30}$$

$$|\text{tg}(\gamma+\varphi)| = \left|\frac{a+b}{1-ab}\right| < f, \quad g = \frac{\cos\gamma}{\cos\varphi}(1 - vxfa) > 0. \tag{31}$$

В (30), (31), как и ранее, введены обозначения

$$x = \sin\alpha, \quad y = \cos\alpha, \quad v = \frac{u}{f},$$
$$a = \mathrm{tg}\gamma, \quad b = \mathrm{tg}\varphi, \quad d = \frac{(a+b)}{f}. \tag{32}$$

Решая линейную систему (30) относительно x, y, получим в данном случае из (18)–(20) следующие выражения:

$$x = \frac{l_1 v + l_0}{k_2 v^2 + k_1 v + k_0}, \quad y = \frac{m_1 v + m_0}{k_2 v^2 + k_1 v + k_0},$$
$$k_2 = (1 + b_{11})ab - 1,$$
$$k_1 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)ab - b_{11} - b_{22}, \tag{33}$$
$$k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22},$$
$$l_1 = (1 + b_{11})d, \quad l_0 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)d,$$
$$m_1 = -b_{12}d\cos\gamma, \quad m_0 = b_{12}d\cos\gamma.$$

Решение (33) является корректным для тех $v \in (1, +\infty)$, при которых выполнено тригонометрическое равенство $x^2 + y^2 = 1$ и соблюдаются неравенства (31). Из (33) получим

$$F(v) = x^2 + y^2 = \frac{(l_1 v + l_0)^2 + (m_1 v + m_0)^2}{(k_2 v^2 + k_1 v + k_0)^2}. \tag{34}$$

Таким образом, дело сводится к возможности решения уравнения

$$F(v) = 1, \quad v \in (1, +\infty), \tag{35}$$

где $F(v)$ определяется формулами (33), (34). При этом должны выполняться неравенства (31).

Утверждение 2. *Уравнение* (35) *имеет решения только при соблюдении неравенств*

$$1 < (1 + b_{11})ab < 1 + b_{11}. \tag{36}$$

Замечание 2. Условия обязательности равновесия (нарушения неравенств (36)) в рассматриваемом плоском случае эквивалентны неравенству

$$(1 + b_{11})ab < 1. \tag{37}$$

Кроме того, должно соблюдаться первое неравенство из (31) – условие возможного равновесия. Отметим, что для случая из пункта 4 (равнодействующая G проходит через центр масс тела) имеем $b = \mathrm{tg}\varphi = 0$, и неравенство (37) обязательного возможного равновесия выполнено заведомо. Таким образом, подтвержден результат из пункта 4.

Замечание 3. Отметим, что случай $ab = \mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\varphi > 1$ для нарушения неравенств (36) не реализуется при наличии односторонней связи в точке опоры O, так как тогда равнодействующая G имеет положительную проекцию на нормаль Oz и не выполнены условия возможного равновесия.

Доказательство утверждения 2. Основная идея доказательства состоит в следующем. Уравнение (35), где функция $F(v)$ определяется соотношениями (34) и (33), имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, стоящий в знаменателе выражения (34), имеет хотя бы один вещественный корень на интервале $1 < v < +\infty$. Действительно, пусть $v_1 > 1$ – вещественный корень функции $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$. Несложная проверка позволяет установить следующие свойства функции $F(v)$:

$$F(1) = \frac{(a+b)^2}{f^2(1-ab)^2} < 1, \quad F(v_1 - 0) = +\infty,$$
$$F(v_1 + 0) = +\infty, \quad F(+\infty) = 0. \tag{38}$$

Из (38) и свойств решений, даваемых формулами (33), следует, что уравнение (35) имеет как минимум два решения на интервалах $(1, v_1 - 0)$ и $(v_1 + 0, +\infty)$. Причем на этих решениях величина x из формул (33) принимает значения разных знаков. Таким образом, на одном из этих значений будет заведомо выполнено второе неравенство из (31). Отметим, что трехчлен $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$ не может иметь два корня на указанном интервале изменения v (меньший корень всегда меньше единицы).

Далее, несложный анализ (который здесь, в силу громоздкости, опускается) корней квадратного уравнения $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0 = 0$, где коэффициенты задаются формулами из (33), приводит к неравенствам (36). Таким образом, если и только если выполнены условия (36), то рассматриваемое квадратное уравнение заведомо имеет в точности один корень на интервале $1 < v < +\infty$, и обязательное равновесие не реализуется.

Если неравенства (36) нарушены, то несложно показать, что корней квадратного уравнения $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0 = 0$ на рассматриваемом интервале $1 < v < +\infty$ нет. Нам осталось показать, что в этом случае уравнение (35) также не имеет решений. Неравенства (36) нарушаются в следующих двух случаях:

$$(1 + b_{11})ab < 1 \quad \text{или} \quad ab > 1.$$

Второе из этих неравенств не реализуется (см. Замечание 3). Пусть выполнено первое неравенство

$$(1 + b_{11})ab < 1.$$

Покажем, что в этом случае производная функции $F(v)$ в указанном интервале является строго отрицательной. Это будет означать монотонное убывание функции $F(v)$ от значения $F(1) < 1$ до значения $F(+\infty) = 0$. Таким образом, уравнение

(35) заведомо не будет иметь решений и реализуется обязательное равновесие. Вычисляем производную от функции $F(v)$ из (34).

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dv} = \frac{g_3v^3 + g_2v^2 + g_1v + g_0}{(k_2v^2 + k_1v + k_0)^3},$$
$$g_3 = -k_2(l_1^2 + m_1^2), g_2 = -3k_2(l_1l_0 + m_1m_0), \quad (39)$$
$$g_1 = k_0(l_1^2 + m_1^2) - 2k_2(l_0^2 + m_0^2) - k_1(l_1l_0 + m_1m_0),$$
$$g_0 = k_0(l_1l_0 + m_1m_0) - k_1(l_0^2 + m_0^2).$$

Используя формулы (33) и неравенство (37), можно показать (подробности здесь опускаем, в силу громоздкости выкладок), что все коэффициенты g_k $(k = 0,1,2,3)$ кубического полинома из (39) являются строго положительными. Функция же $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, в силу отсутствия корней, является строго отрицательной на интервале $v \in (1,+\infty)$. Таким образом, производная из (39) является в итоге отрицательной, а функция $F(v)$ монотонно убывает от значения $F(1) < 1$ до значения $F(+\infty) = 0$. Следовательно, уравнение (35) решений не имеет и реализуется обязательное равновесие. Утверждение 2 доказано.

З а м е ч а н и е 4. Условия (37) обязательного равновесия формально эквивалентны аналогичным условиям, полученным в работе [6] для плоского случая твердого тела (расположенного вместе с внешними силами в плоскости Oyz), где проскальзывание точки опоры допускалось лишь вдоль оси Oy. В данной пространственной задаче это соответствует случаю возможных скольжений при условии $\alpha = \pm\pi/2$ (тогда $x = \pm 1$, $y = 0$). Несложно показать, используя уравнения (30), что при $b_{12} \neq 0$ и $v > 1$ таких решений быть не может. В рассматриваемой пространственной задаче (для такого специального “плоского” расположения равнодействующей G) при нарушении условий обязательности равновесия может возникнуть лишь такое проскальзывание точки опоры, которое не совпадает с осью Oy (т.е. вектор w_O не принадлежит плоскости Oyz). Причина этого несоответствия такова. В работе [6], на самом деле, рассмотрена задача об обязательности возможного равновесия цилиндрического тела, которое опирается на шероховатую плоскость не одной точкой, а целой прямой (т.е. образующей цилиндра, которым на самом деле в данном случае является твердое тело). Однако при $b_{12} = 0$ и условиях (36) система (30) имеет лишь решение $x = -1$, $y = 0$ $(\alpha = -\pi/2)$. Таким образом, только в этом специальном случае (когда $b_{12} = 0$) имеется согласованность и аналогия между пространственной задачей настоящей статьи и плоской задачей, рассмотренной в [6].

5. ПРОИЗВОЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ G

Пусть равнодействующая G проходит через точку опоры O, но, вообще говоря, не принадлежит плоскости Oyz. Тогда угол $\psi \neq 0$. В этом случае результат аналогичен утверждению 2 из пункта 5, но является более громоздким. Справедливо следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 3. *Обязательное равновесие может быть нарушено в том и только в том случае, когда квадратный трехчлен* $\Delta(v)$ *из* (19) *имеет хотя бы один вещественный корень на интервале* $v \in (1,+\infty)$. *Это эквивалентно следующим двум вариантам неравенств:*

1. $$1 - b_{12}\varepsilon a < (1 + b_{11})ab < 1 + b_{11}, \quad (40)$$

2. $$\frac{2 + b_{11} + b_{22} - b_{12}\varepsilon a}{s_2} < ab < \min\left\{1, \frac{1 - b_{12}\varepsilon a}{1 + b_{11}}\right\}, \quad (41)$$

$$\begin{gathered}(abs_2 - 2 - b_{11} - b_{22} + b_{12}\varepsilon a)^2 - \\ - 4\left[(1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1\right]s_1(ab - 1) > 0, \\ s_1 = (1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12}^2, \\ s_2 = (1 + b_{11})(2 + b_{22}) - b_{12}^2.\end{gathered} \quad (42)$$

Напомним, что в (40)–(42) приняты обозначения

$$a = \mathrm{tg}\gamma, \quad b = \mathrm{tg}\varphi, \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{tg}\psi}{\cos\varphi}.$$

Таким образом, условия обязательного равновесия состоят в том, что нарушены, во-первых, неравенства (40) и, во-вторых, нарушается хотя бы одно из неравенств (41) или (42). Кроме того, должно быть выполнено неравенство (6) – условие возможного равновесия. Отметим, что области параметров, удовлетворяющих либо неравенствам (40), либо неравенствам (41) и (42), являются непустыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 3 аналогично доказательству утверждения 2. Как и выше, при доказательстве утверждения 2, покажем сначала, что при наличии вещественного корня квадратного уравнения $\Delta(v) = 0$ из (19) при $v > 1$, уравнение $x^2 + y^2 = 1$, где x, y определяются формулами (18)–(20), заведомо имеет решения при $v > 1$. Далее, определим условия, при которых уравнение $\Delta(v) = 0$ имеет решения при $v > 1$. Для этого введем переменную $z = v - 1$ и воспользуемся тождеством

$$\Delta(v) = \frac{(q_2z^2 + q_1z + q_0)}{\cos\gamma},$$
$$q_0 = s_1(ab - 1), \quad q_1 = s_2ab - 2 - b_{11} - b_{22} + b_{12}\varepsilon a, \quad (43)$$
$$q_2 = (1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1.$$

В (43) параметры s_1, s_2 введены в формулах (42).

Тогда несложно получаются условия (40)–(42), представляющие собой условия наличия при $z > 0$ вещественных корней квадратного уравнения $q_2z^2 + q_1z + q_0 = 0$ (при введенных в (43) обозначениях для q_0, q_1, q_2).

Если же условия (40)–(42) нарушаются, как это было указано в формулировке утверждения, то мы вычисляем производную по v от выражения $x^2 + y^2$, согласно формуле (39), где параметры k, l, m определяются формулами (19), (20). Затем показываем, что все коэффициенты полинома 3-го порядка $g_3v^3 + g_2v^2 + g_1v + g_0$ являются строго положительными при нарушении неравенств (40)–(42). Подробности здесь опускаются ввиду громоздкости выкладок.

З а м е ч а н и е 5. Области параметров задачи, в которых нарушаются неравенства (40) или (41) (т.е. области обязательного равновесия) могут быть определены численно с использованием стандартных компьютерных приложений. В общем случае для любых конкретных значений параметров задачи с помощью формул (40) или (41) можно определить, является рассматриваемое положение возможного равновесия обязательным или нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джеллетт Д.Х.* Трактат по теории трения. М.: Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. 264 с.
2. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы. 1954. 316 с.
3. *Журавлёв В.Ф.* // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.
4. *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований. 2010. 184 с.
5. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2011. 208 с.
6. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 304 с.
7. *Mamaev I.S., Ivanova T.B.* The dynamics of a rigid body with a sharp edge in contact with an inclined surface in the presence of dry friction // Regul. Chaot. Dyn. 2014. V. 19. P. 116–139.
8. *Vaganian A.* On generalized Coulomb-Amonton’s law in the context of rigid body dynamics // Nonlinear Dyn. 2020. V. 101. P. 2145–2155.
9. *Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М.* Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. / Вступ. Слово Д.М. Климова. М.: ЛЕНАНД, 2017. 240 с.
10. *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // Прикладная математика и механика. 2015. Вып. 3. С. 317–333.
11. *Розенблат Г.М.* О равновесии скамейки Жуковского // ДАН. 2017. Т. 472. № 6. С. 659–665.

ON EQUILIBRIUM OF A SOLID BODY SUPPORTED IN ONE POINT BY A ROUGH PLANE

G. M. Rozenblat[a]

[a] *Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. Ph. Zhuravlev

We consider the problem of possible and necessary (in the sense of Jellett) equilibrium of a rigid body which is contacting by one point with a rough plane. An arbitrary system of external forces applies to this body. The distribution of masses in the body (central inertia tensor and position of center of masses) is supposed to be arbitrary one. There is a force of dry friction in the point of contact (the classic law of Coulomb–Euler). The conditions of such an equilibrium obtained in this article. These conditions presented by simple analytical expressions. The results compared with results received earlier.

Keywords: dry friction, static equilibrium, point contact, necessary equilibrium, unilateral constraint