ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 29–32

МЕХАНИКА

УДК 533.6.011

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО ТРАНСЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ НЕВОЗМУЩЕННОЙ СКОРОСТИ

© 2021 г. А. Н. Богданов[1,*]

Представлено академиком РАН С.Т. Суржиковым 06.09.2021 г.
Поступило 09.09.2021 г.
После доработки 13.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

С использованием “трехпалубной” модели исследуется неклассический пограничный слой над твердой плоской пластиной при нестационарном свободном вязко-невязком взаимодействии на трансзвуковых скоростях. Особенностью настоящего исследования является выбор квадратичной зависимости продольной составляющей невозмущенной скорости в пограничном слое от поперечной координаты и непостоянство градиента давления. Показано качественное отличие картины течения в рассмотренном случае от случая линейного профиля скорости в пограничном слое.

Ключевые слова: пограничный слой, вязко-невязкое взаимодействие, трансзвуковое течение, асимптотические разложения, нелинейный процесс

DOI: 10.31857/S2686740021060031

Аналитическое исследование устойчивости свободно взаимодействующих на трансзвуковых скоростях вязких и невязких течений проведено на “трехпалубной модели” [1] для пограничного слоя с профилем продольной скорости, линейно зависящим от поперечной координаты: $u_0 = y$ (обзор выполненных работ см., например, [2]). При выборе такого вида профиля невозмущенной скорости уравнения, описывающие развитие возмущений, получаются уникальными по своей относительной простоте – сводятся к уравнению Эйри, что позволяет провести аналитическое исследование в достаточно законченном виде.

На практике при течении вязкого газа даже у плоской поверхности реализуются профили скорости более общего, чем простой линейный, вида. Известный пример автомодельного пограничного слоя на полубесконечной плоской пластине нулевой толщины (задача Блазиуса) [3], хорошо подтверждаемый экспериментально, дает зависимость профиля скорости в нем от комбинации обеих пространственных координат: не слишком близко к началу пластины, – $u_0 = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ (ось x направлена вдоль поверхности пластины). Градиент давления в реальном течении также может не быть тривиально постоянным.

В этой связи представляет интерес рассмотрение поведения малых возмущений в случае профиля скорости другого, отличного от линейного, вида. Следуя путем классических исследований свободного вязко-невязкого взаимодействия [2, 4] и полагая зависимость u_0 только от y, можно, задавая возмущения гармоническими по независимым переменным (t, x), свести задачу к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения (подобно тому, как для линейного профиля было получено уравнение Эйри). Хотя общность и этих результатов существенно ограничена, они освещают некоторые свойства и особенности развития возмущений исследуемых течений и позволяют избежать абсолютизации полученных для линейного профиля результатов.

Наиболее простым вариантом, кроме линейного, в интересующем нас исследовании может служить квадратичный вид профиля скорости $u_0 = y^2$ (в этом случае уравнения несжимаемого пограничного слоя удовлетворяются, если положить $v_0 = 0$ и $p_0 = x$). Заметим здесь, что, исследуя поведение возмущений при выборе конкретного вида профиля скорости, следует иметь в виду трение потока об обтекаемую поверхность, опреде-

[1] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: bogdanov@imec.msu.ru*

ляемое как $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$. Легко видеть, что при $u_0 = y^2$ трение на поверхности есть тождественный ноль, касательная к графику скорости $u_0 = y^2$ на обтекаемой поверхности вертикальна. Примеры течения в пограничном слое с нулевым трением на границе течения известны – поток при степенном законе убывания скорости во внешнем невязком течении [3], струя с прямолинейной осью [5]. Нулевое трение на границе течения является особенностью, главное в которой – возможность отрыва пограничного слоя в точках нулевого трения. Оригинальные соображения о качественном характере течения в окрестности точки отрыва пограничного слоя высказаны Ландау [6].

В случае профиля скорости более общего, квадратичного, вида $u_0 = y^2 + y$ трение на обтекаемой поверхности ($y = 0$) уже отлично от нуля. Случай такого типа, $u_0 = \frac{y^2}{2} + By$, был исследован при сверхзвуковом свободном вязко-невязком взаимодействии для различных величин параметра B [4]. Решение уравнения в случае квадратичного профиля продольной скорости пограничного слоя приведено также в работе Stewartson [7], в связи с изучением отрыва потока. В этой работе уравнение имело 4-й порядок, решение выписывалось в виде ряда по степеням поперечной координаты, ни уравнение, ни полученное решение не ставилось в соответствие с известными типами уравнений или специальных функций.

Исследование устойчивости течений с такого рода профилем невозмущенной скорости не проводилось.

Ниже будет рассмотрен случай квадратичного профиля:

$$u_0 = B\frac{y^2}{2} + y, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = Bx$$

(при $B = 0$ имеем изученный ранее случай линейного профиля [8]).

Для моделирования течения во всей исследуемой области свободного вязко-невязкого взаимодействия используем трехпалубную модель в ее трансзвуковой модификации [8]. В соответствии с выбранной моделью вблизи обтекаемой поверхности течение описывается уравнениями нестационарного несжимаемого пограничного слоя

$$\begin{gathered} u_x + v_y = 0, \quad p_y = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y = -p_x + u_{yy}. \end{gathered} \tag{1}$$

Вдали от поверхности тела течение – невязкое, в рассматриваемой задаче – трансзвуковое, его приближенно можно считать безвихревым и для его описания использовать линейное уравнение Линя–Рейсснера–Цяня (ЛРЦ) [9] для потенциала скорости $\phi(t, x, y)$:

$$\begin{gathered} \delta\phi_{tt} + 2\phi_{xt} + K_\infty\phi_{xx} - \phi_{y_1y_1} = 0, \\ K_\infty = \frac{(M_\infty^2 - 1)}{\delta} = \text{const}. \end{gathered} \tag{2}$$

Внешнее невязкое течение и пограничный слой в трехпалубной модели разделяет некоторое переходное течение. Вывод уравнений, моделирующих это течение и их интегрирование в связи с соответствующими граничными условиями, проведены ранее [8]. Приведем здесь только следующие из общего анализа соответствующие условия сращивания:

$$\begin{gathered} \phi_x(t, x, 0) = -p(t, x), \\ \phi_{y_1}(t, x, 0) = -A_x(t, x) \quad \text{при} \quad y_1 \to 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$u \to u_0 + A(t, x) \quad \text{при} \quad y \to \infty, \tag{4}$$

где $A(t, x)$ – функция мгновенного смещения линий тока переходного течения.

Примем условие ограниченности решения на выходе из исследуемой области: $\phi_{y_1} \to 0$ при $y_1 \to \infty$.

Составляющие скорости течения на поверхности тела удовлетворяют обычным граничным условиям прилипания и непротекания:

$$u(t, x, 0) = 0, \quad v(t, x, 0) = 0. \tag{5}$$

Пусть возмущения в начальный момент времени отсутствуют:

$$t = 0\colon u = B\frac{y^2}{2} + y, \quad v = 0, \quad p = Bx \tag{6}$$

и нет возмущений, приходящих на поверхность с набегающим потоком

$$x = x_0\colon u \to B\frac{y^2}{2} + y, \quad v \to 0, \quad p = Bx. \tag{7}$$

Представив параметры возмущенного течения в виде рядов по степеням амплитуды возмущений δ:

$$\begin{gathered} u = B\frac{y^2}{2} + y + \delta u + \ldots, \\ v = \delta v + \ldots, \quad p = \delta p + \ldots \end{gathered}$$

и подставив их в систему (1), имеем в первом приближении по δ:

$$\begin{gathered} \delta u_x + \delta v_y = 0, \quad \delta p_y = 0, \\ \delta u_t + u_0\delta u_x + \frac{du_0}{dy}\delta v = -\delta p_x + \delta u_{yy}. \end{gathered} \tag{8}$$

Из начальных и граничных условий (4)–(7) получим

$$\begin{gathered}\delta u(0,x,y)=0; \quad \delta u\to 0 \quad \text{при} \quad x\to x_0;\\ \delta u(t,x,0)=0, \quad v_1(t,x,0)=0;\\ \delta u\to A \quad \text{при} \quad y\to\infty.\end{gathered} \tag{9}$$

Для гармонических по x и по t возмущений можно свести систему (8) к одному уравнению, исключая неизвестные амплитуды и их производные из последнего уравнения при помощи первых двух. Получим

$$\begin{gathered}(By+1)\left(\frac{d^3\tilde{u}}{dy^3}-\left(\omega+ik\left(B\frac{y^2}{2}+y\right)\right)\frac{d\tilde{u}}{dy}\right)-\\ -B\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dy^2}-\left(\omega+ik\left(B\frac{y^2}{2}+y\right)\right)\tilde{u}\right)=-Bik\tilde{p},\end{gathered} \tag{10}$$

линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, неоднородное и с переменными коэффициентами. При $B=0$ вместо (10) имеем полученное ранее для линейного профиля уравнение Эйри для $\dfrac{d\hat{u}}{dy}$:

$$\frac{d^3\hat{u}}{dy^3}-(\omega+iky)\frac{d\hat{u}}{dy}=0. \tag{11}$$

Выражения и в первых, и во вторых скобках уравнения (10) сходны с уравнением Эйри (первое –для $\tilde{u}_y$, второе –для $\tilde{u}$), но коэффициенты в них пропорциональны не y, а многочлену $O(y^2)$.

Точное решение уравнения (11) и его подробное обсуждение приведено в [8]. Имея целью исследовать более сложный, не имеющий пока исследованного точного решения, случай квадратичного профиля по аналогии с линейным случаем, рассмотрим приближенное решение уравнения (10). Будем считать коэффициенты в этом уравнении постоянными величинами (допущение, применявшееся и ранее при исследовании задач гидродинамической устойчивости [10]): $\omega+ik\upsilon\equiv\Theta=\mathrm{const}$. Решениями такого уравнения являются две экспоненциальные функции и тривиальное решение (постоянная)

$$\tilde{u}=C_1\exp(\sqrt{\Theta}y)+C_2\exp(-\sqrt{\Theta}y)+C_3. \tag{12}$$

Для выполнения условия ограниченности полученного решения с ростом аргумента положим $C_1=0$. Сравнение решения (12) с известным точным решением (11), выражаемым через функции Эйри

$$\tilde{u}=C\int Ai(\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

показывает, что (12) сохранило качественно сходное с точным решением (функция Ai) поведение – сильное затухание при $\Theta>0$, колебательный характер при $\Theta<0$, отброшенное решение сходно с функцией Bi. Решение (12) не удовлетворяет условию $\tilde{u}(0)=0$, но в данном случае важно поведение решения при $y\neq 0$.

Для квадратичного профиля общим решением однородного уравнения (10) при постоянных коэффициентах будет сумма трех экспоненциальных функций

$$\begin{gathered}\tilde{u}=C_1\exp(\sqrt{\Theta}y)+C_2\exp(-\sqrt{\Theta}y)+\\ +C_3\exp\left(\frac{B}{B\upsilon+1}y\right),\end{gathered} \tag{14}$$

в этом решении $\Theta=\omega+ik\left(B\dfrac{\upsilon^2}{2}+\upsilon\right)$. Для ограниченности решения при $y\to\infty$ вновь положим $C_1=0$. При $B>0$, $B\upsilon+1>0$ по той же причине (неограниченный рост при $y\to\infty$) необходимо положить и $C_3=0$ (при $B<0$, $B\upsilon+1>0$ таких оснований нет и в задаче появляются возмущения неисследованного типа).

Сравнение решений (12) и (14) после выполненного отбора показывает, что определяемый ими рост (затухание) возмущений происходит качественно сходно, количественное отличие лишь в величине волнового числа: k для линейного против $k(B\upsilon+1)$ для нелинейного случая, возмущение с частотой ω для линейного случая отвечает возмущению той же частоты, но с волновым числом, большим в $B\upsilon+1$ раз, для квадратичного профиля.

В уравнении (10) уже видна существенная роль градиента давления – из-за него уравнение становится неоднородным, причем знак неоднородности зависит от вида профиля невозмущенной скорости – знака B. Эта неоднородность определяет еще одно решение, если известна $\varphi_j(y)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения [11]:

$$\varphi(y)=\sum_{j=1}^{3}\varphi_j(y)\int\frac{W_j}{f_jW}dy,$$

где f_j – коэффициенты в (10) при j-й производной искомой функции, W – определитель Вронского, W_j получается из него заменой j-го столбца на $(0, 0, -Bik\tilde{p})$.

В рассматриваемом здесь случае $\varphi_j(y)$ есть экспоненциальные функции

$$\begin{gathered}\varphi_1=\exp(\sqrt{\Theta}y), \quad \varphi_2=\exp(-\sqrt{\Theta}y),\\ \varphi_3=\exp\left(\frac{B}{B\upsilon+1}y\right),\end{gathered} \tag{15}$$

где f_j – постоянные величины ($f_1=\Theta(B\upsilon+1)$, $f_1=-B$, $f_1=B\upsilon+1$).

Полученное решение (15) не ограничено при $y\to\infty$ и потому не соответствует постановке задачи в условиях (1)–(7). Таким образом, в случае профиля невозмущенной скорости вида $u_0 = B\dfrac{y^2}{2} + y$ проведение исследования устойчивости течения, аналогично линейному случаю невозможно – ограниченного решения стационарного обтекания уединенной плоской полупластины при таком профиле невозмущенной скорости не существует.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
2. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
3. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 520 с.
4. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003. 456 с.
5. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 480 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Stewartson K.* Is the singularity at separation removable? // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. № 2. P. 347–364.
8. *Рыжов О.С., Савенков И.В.* Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.
9. *Тзян Х.Ш., Лин Ц.Ц., Рейснер Е.* О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости / Сб. ст. Газовая динамика. М.: Изд. иностр. лит., 1950. С. 183–196.
10. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. 1977. М.: Наука, С. 366.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд. иностр. лит., 1951. 828 с.

TO MATHEMATICAL MODELING INTERACTIVE TRANSONIC BOUNDARY LAYER WITH A NON-LINEAR PROFILE OF UNDISTURBED SPEED

A. N. Bogdanov[a]

[a] *Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academiciam of the RAS S.T. Surzhikov

Using the triple-deck theory, a non-classical boundary layer over a solid flat plate is investigated in the case of unsteady free viscous-inviscid interaction at transonic speeds. A feature of this study is the choice of the quadratic dependence of the longitudinal component of the unperturbed velocity in the boundary layer on the transverse coordinate and the variability of the pressure gradient. A qualitative difference between the flow pattern in the considered case and the case of a linear velocity profile in the boundary layer is shown.

Keywords: boundary layer, viscous-inviscid interaction, transonic flow, asymptotic expansions, nonlinear process