ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 33–37

МЕХАНИКА

УДК 521.13

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЧАСТОТ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУХПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧИ

 В. М. Буданов[1],*

Представлено академиком РАН В.А. Левиным 13.09.2021 г.
Поступило 16.09.2021 г.
После доработки 16.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Рассматривается задача о движении вокруг массивного центрального тела (звезды) двух других тел (планет) со сравнимыми массами, которые существенно меньше массы центрального тела. Предполагается, что движение планет происходит в одной плоскости по орбитам, близким к круговым. Движение планет строится непосредственно в полярных координатах с применением метода неопределенных частот, предложенного автором, и являющегося модификацией метода последовательных приближений. Получено первое приближение, представляющее собой для каждой планеты сумму равномерного кругового движения и малых квазипериодических добавок. Последние представляют собой сумму периодических компонент, периоды которых равны периодам круговых движений обоих тел, а также их суммам и разностям. При этом периоды круговых движений изменяются по сравнению с тем, что дает третий закон Кеплера: период внутренней планеты увеличивается, а внешней – уменьшается. Второй особенностью построенного приближенного решения является отсутствие вековых возмущений.

Ключевые слова: двухпланетная задача, метод последовательных приближений

DOI: 10.31857/S2686740021060043

Двухпланетная задача является вариантом задачи трех тел, движущихся под действием взаимного притяжения. При этом распределение масс таково, что можно говорить о движении двух тел относительно центрального. Классической задачей является движение Юпитера и Сатурна вокруг Солнца, если пренебречь влиянием других тел Солнечной системы. История вопроса и подробный обзор работ в данной области приведен в [1], описания базовых методов и подходов – в [2–4]. Здесь мы отметим три факта. Первый факт – практически все современные аналитические исследования основываются на уравнениях для оскулирующих элементов орбит. При этом явно или неявно используется третий закон Кеплера, который строго выполняется только для задачи двух тел. Второй факт – вековые составляющие непременно присутствуют при описании движений планет и являются существенными на длительных временах. Третий факт – аналитические подходы практически полностью вытеснены численными методами в задачах, требующих современной точности. В данной работе строится модель плоского движения в гелиоцентрической системе координат исходя непосредственно из уравнений движения под действием сил взаимного притяжения [2, 3]. Рабочими являются полярные координаты каждой из планет – расстояние до Солнца и угол отклонения от фиксированного направления. Методом неопределенных частот [5] строится первое приближение в виде квазипериодического решения, не содержащего вековых членов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем систему, состоящую из трех тел S, Q, R (материальных точек) с массами m_s, m_q, m_r, находящихся в одной плоскости и движущихся под действием гравитационных сил с гравитационной постоянной γ. Ограничиваемся рас-

[1] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vlbudanov@gmail.com*

смотрением систем типа “звезда и две планеты”. Считаем, что масса центрального тела S значительно больше масс двух других и расстояние до него от общего центра масс мало по сравнению с расстояниями до двух других тел, которые движутся по орбитам разного размера.

Будем рассматривать движение в “гелиоцентрической” системе координат с началом в центральном теле и неподвижными направлениями осей. Радиус-векторы первого и второго тел обозначим $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, тогда уравнения движения имеют вид [2, 3]

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\gamma\frac{m_s + m_q}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q} + \gamma m_r\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right),$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\frac{m_s + m_r}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} - \gamma m_q\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|^3} + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3}\right).$$

В качестве характерного расстояния возьмем средний радиус орбиты S ближнего тела. Изменив масштаб времени $t \to \sqrt{\frac{\gamma m_s}{S^2}}t$, введя отношения масс $\mu_q = \frac{m_q}{m_s}$, $\mu_r = \frac{m_r}{m_s}$ и переходя к полярным координатам (q,φ), (r,ψ), приходим к системе, которая есть предмет настоящего исследования:

$$\begin{gathered}\ddot{q} - q\dot{\varphi}^2 = -\frac{1+\mu_q}{q^2} + \\ + \frac{\mu_r}{u^3}(r\cos(\varphi-\psi) - q) - \frac{\mu_r}{r^2}\cos(\varphi-\psi), \\ q\ddot{\varphi} + 2\dot{q}\dot{\varphi} = -\frac{\mu_r}{u^3}r\sin(\varphi-\psi) + \frac{\mu_r}{r^2}\sin(\varphi-\psi), \\ \ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = -\frac{1+\mu_r}{r^2} + \\ + \frac{\mu_q}{u^3}(q\cos(\varphi-\psi) - r) - \frac{\mu_q}{q^2}\cos(\varphi-\psi), \\ r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} = \frac{\mu_q}{u^3}q\sin(\varphi-\psi) - \frac{\mu_q}{q^2}\sin(\varphi-\psi).\end{gathered} \tag{1}$$

Для расстояния между планетами здесь введено обозначение $u = |\mathbf{r}-\mathbf{q}|$. Система (1) является точной. Заметим, что при $\mu_r = \mu_q = 0$ получаем уравнения невозмущенного кеплеровского движения, допускающие стационарные решения с постояннымирадиусами и частотами обращения при выполнении третьего закона Кеплера $q^3\omega^2 = 1 = r^3\vartheta^2$. При выбранных масштабах времени и расстояний для невозмущенного кругового движения ближнего тела имеем $q = \omega = 1$. Далее для системы (1) построим в первом приближении модель движения, учитывающего взаимные возмущения планет.

ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ

Решение системы (1) будем искать в виде

$$\begin{gathered}\varphi = \omega t + \alpha, \quad \psi = \vartheta t + \beta, \\ q = Q(1+\tilde{q}), \quad r = R(1+\tilde{r}).\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь Q, R — заданные средние радиусы орбит, ω, ϑ — некоторые постоянные, но заранее не определенные частоты, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$, α, β — новые переменные, описывающие отклонения от круговых орбит и имеющие нулевые средние значения. Считаем, что $|\tilde{q},\tilde{r},\alpha,\beta| \ll 1$. Поскольку также $(\mu_q,\mu_r) \ll 1$, то при вычислении u учтем только основное движение

$$\begin{gathered}u^2 = Q^2 + R^2 - 2QR\cos\eta = U^2(1-\sigma\cos\eta), \\ \frac{1}{u^3} = \frac{1}{U^3}(a_0 + a_1\cos\eta + a_2\cos 2\eta) \equiv \frac{1}{U^3}\chi(\eta).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения $\eta = \phi - \psi \approx (\omega - \vartheta)t = \delta t$, $U = \sqrt{Q^2 + R^2}$ и $\sigma = \frac{2QR}{Q^2 + R^2}$. Коэффициенты a_0, a_1, … зависят от одного параметра σ и являются коэффициентами ряда Фурье функции

$$\frac{1}{(1-\sigma\cos\eta)^{3/2}} = a_0 + a_1\cos\eta + a_2\cos 2\eta + \ldots \tag{4}$$

Отметим, что параметр $\sigma \le 1$, но в общем случае малым считаться не может, как и коэффициенты.

С учетом сделанных предположений в первом приближении и учете первых двух гармоник в возмущающей силе система (1) приобретает вид

$$\begin{gathered}\ddot{\tilde{q}} - \omega^2 - 2\omega\dot{\alpha} - \tilde{q}\omega^2 = \\ = -\frac{1+\mu_q}{Q^3} + \frac{2}{Q^3}\tilde{q} + \frac{\mu_r}{U^3}\chi(\eta)\left(\frac{R}{Q}\cos\eta - 1\right) - \frac{\mu_r}{R^2Q}\cos\eta, \\ \ddot{\alpha} + 2\omega\dot{\tilde{q}} = -\frac{\mu_r}{U^3}\frac{R}{Q}\chi(\eta)\sin\eta + \frac{\mu_r}{R^2Q}\sin\eta, \\ \ddot{\tilde{r}} - \vartheta^2 - 2\vartheta\dot{\beta} - \tilde{r}\vartheta^2 = \\ = -\frac{1+\mu_r}{R^3} + \frac{2}{R^3}\tilde{r} + \frac{\mu_q}{U^3}\chi(\eta)\left(\frac{Q}{R}\cos\eta - 1\right) - \frac{\mu_q}{RQ^2}\cos\eta, \\ \ddot{\beta} + \frac{2}{R}\vartheta\dot{\tilde{r}} = \frac{\mu_q}{U^3}\frac{Q}{R}\chi(\eta)\sin\eta - \frac{\mu_q}{RQ^2}\sin\eta.\end{gathered} \tag{5}$$

Осредним систему (5), считая, что добавки $\tilde{q}$, $\tilde{r}$, α, β имеют нулевое среднее. Нетривиальные соотношения возникают только для первого и третьего уравнений. В результате получаем выражения для частот

$$\omega^2 = \frac{1+\mu_q}{Q^3} + \frac{\mu_r}{U^3}\left(a_0 - \frac{R}{2Q}a_1\right),$$
$$\vartheta^2 = \frac{1+\mu_r}{R^3} + \frac{\mu_q}{U^3}\left(a_0 - \frac{Q}{2R}a_1\right). \tag{6}$$

Эти соотношения определяют средние движения. Уравнения для осциллирующих составляющих движения получаем из (5) с учетом (6), оставляя первые две гармоники

$$\begin{gathered}
\ddot{\tilde{q}} - 2\omega\dot{\tilde{\alpha}} - 3\tilde{q}\omega^2 = \frac{\mu_r R}{U^3 Q}\left(\left(a_0 - \frac{Q}{R}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{U^3}{R^3}\right)\times\right.\\
\left.\times\cos\eta + \left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{Q}{R}a_2\right)\cos 2\eta\right),\\
\ddot{\tilde{\alpha}} + 2\omega\dot{\tilde{q}} = -\frac{\mu_r R}{U^3 Q}\times\\
\times\left(\left(a_0 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{U^3}{R^3}\right)\sin\eta + \frac{1}{2}a_1\sin 2\eta\right),\\
\ddot{\tilde{r}} - 2\vartheta\dot{\tilde{\beta}} - 3\tilde{r}\vartheta^2 = \frac{\mu_q Q}{U^3 R}\left(\left(a_0 - \frac{R}{Q}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{U^3}{Q^3}\right)\times\right.\\
\left.\times\cos\eta + \left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{R}{Q}a_2\right)\cos 2\eta\right),\\
\ddot{\tilde{\beta}} + 2\vartheta\dot{\tilde{r}} = \frac{\mu_q Q}{U^3 R}\times\\
\times\left(\left(a_0 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{U^3}{Q^3}\right)\sin\eta + \frac{1}{2}a_1\sin 2\eta\right).
\end{gathered} \tag{7}$$

Заметим, что если массы двух тел пренебрежимо малы, то для каждого из них получаем независимые уравнения. В частности, для тела Q получаем соотношения

$$\ddot{\tilde{q}} - 2\omega\dot{\tilde{\alpha}} - 3\omega^2\tilde{q} = 0,$$
$$\ddot{\tilde{\alpha}} + 2\omega\dot{\tilde{q}} = 0.$$

Эти уравнениия имеют периодические решения с частотой ω:

$$\tilde{q}_0 = \overline{q}\cos(\omega t + \overline{\alpha}), \quad \tilde{\alpha}_0 = -2\overline{q}\sin(\omega t + \overline{\alpha}),$$

где $\overline{q}$, $\overline{\alpha}$ – произвольные постоянные амплитуда и фаза. Это есть первое приближение для эллиптической кеплеровой орбиты.

Поскольку правые части (7) являются явными функциями времени ввиду того, что $\eta = \delta t$, нахождение частных решений не представляет проблемы, и в результате полное решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{q} &= \overline{q}\cos(\omega t + \overline{\alpha}) + b_{11}\cos\delta t + b_{12}\cos 2\delta t,\\
\tilde{\alpha} &= -2\overline{q}\sin(\omega t + \overline{\alpha}) + b_{21}\sin\delta t + b_{22}\sin 2\delta t,\\
\tilde{r} &= \overline{r}\cos(\vartheta t + \overline{\beta}) + b_{31}\cos\delta t + b_{32}\cos 2\delta t,\\
\tilde{\beta} &= -2\overline{r}\sin(\vartheta t + \overline{\beta}) + b_{41}\sin\delta t + b_{42}\sin 2\delta t.
\end{aligned} \tag{8}$$

Окончательно с использованием (8) получаем первое приближение в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}
q_x &= Q(1+\tilde{q})\cos(\omega t + \tilde{\alpha}),\\
q_y &= Q(1+\tilde{q})\sin(\omega t + \tilde{\alpha}),\\
r_x &= R(1+\tilde{r})\cos(\vartheta t + \tilde{\beta}),\\
r_y &= R(1+\tilde{r})\sin(\vartheta t + \tilde{\beta}).
\end{aligned} \tag{9}$$

СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С ЧИСЛЕННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Сравним приближенное решение (8), (9) с результатами численного интегрирования для случая "круговых" орбит, когда первые слагаемые в (8) отсутствуют. Соотношения расстояний возьмем как для полуосей Юпитера и Сатурна, именно, $Q = 1$, $R = \frac{9.55}{5.2} = 1.8365\ldots$ Тогда параметры в (4)–(6) равны

$$\sigma = 0.84, \quad U = 2.09, \quad a_0 = 3.208,$$
$$a_1 = 4.684, \quad a_2 = 3.058, \quad a_3 = 1.9$$

и выражения для частот принимают вид

$$\omega^2 = \frac{1+\mu_q}{Q^3} - 1.09\frac{\mu_r}{U^3},$$
$$\vartheta^2 = \frac{1+\mu_r}{R^3} + 1.93\frac{\mu_q}{U^3}. \tag{10}$$

Видим, что частота обращения Юпитера (Q) уменьшается по сравнению с невозмущенным кеплеровским движением, а частота обращения Сатурна (R) – возрастает. Порядок поправки в (10) отличается на три порядка от основного слагаемого из-за массовых коэффициентов.

Массы планет для наглядности возьмем в 40 раз больше реальных: $\mu_q = 0.04$, $\mu_r = 0.012$. С учетом этих числовых данных (8) принимает вид

$$\begin{gathered}
\tilde{q} = 0.004995\cos\delta t - 0.026321\cos 2\delta t,\\
\tilde{\alpha} = \omega t - 0.015502\sin\delta t + 0.048229\sin 2\delta t,\\
\tilde{r} = 0.034108\cos\delta t + 0.009007\cos 2\delta t,\\
\tilde{\beta} = \vartheta t + 0.001873\sin\delta t - 0.009991\sin 2\delta t,\\
\omega = 1.0191, \quad \vartheta = 0.414522, \quad \delta = 0.604579.
\end{gathered} \tag{11}$$

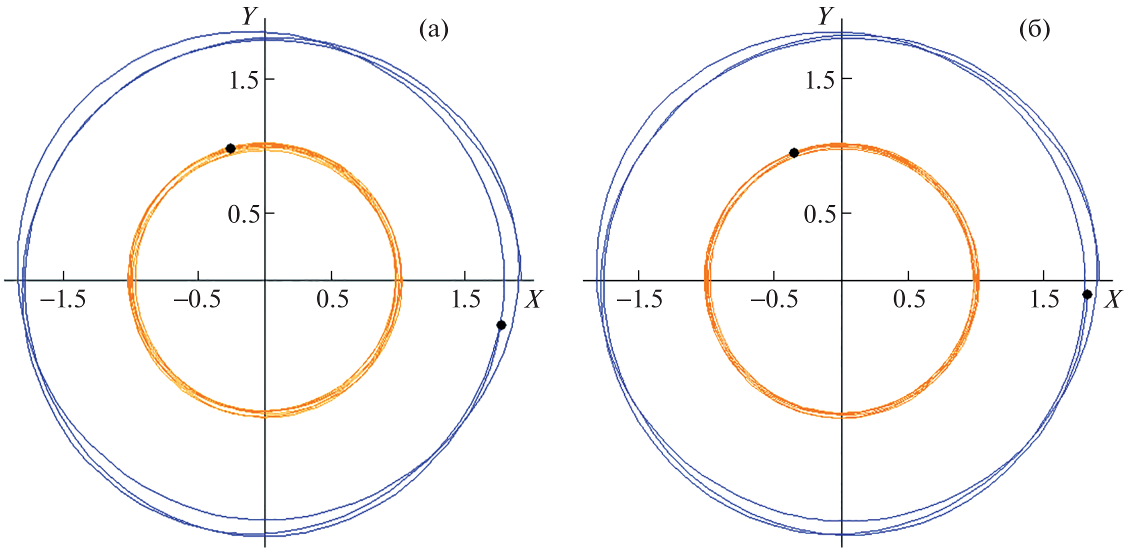

Рис. 1. Аналитическое приближение (а) и результат численного интегрирования (б).

Частоты здесь определены из (10). Кеплеровские оценки частот получаем, отбрасывая в (10) вторые слагаемые

$$\omega_k = 1.0198, \quad \vartheta_k = 0.404194.$$

На рис. 1 сравниваются два решения: аналитическое приближение (9), (11) и результат численного интегрирования на одинаковом интервале времени ($T = 45$). Вначале обе планеты находятся на оси абсцисс, конечные положения отмечены точками. При этом начальные условия для второго решения берутся из первого в нулевой момент времени:

$$\begin{aligned} &q_x(0) = 0.978674, \quad q_y(0) = 0, \\ &\dot{q}_x(0) = 0, \quad \dot{q}_y(0) = 1.04527, \\ &r_x(0) = 1.91572, \quad r_y(0) = 0, \\ &\dot{r}_x(0) = 0, \quad \dot{r}_y(0) = 0.773133. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы видим почти одинаковые графики, отличие наиболее заметно в конечном положении внешней планеты. Ясно, что это отличие связано с оценками частот. При этом для внешней планеты коррекция частоты по (10) весьма существенна — при использовании кеплеровской оценки отставание в конечном положении на данном интервале времени увеличится примерно на 30°.

Заметим также, что если взять начальные условия (12) и вычислить параметры кеплеровской орбиты для внешней планеты, то получим эллиптическую орбиту с длиной полуоси, равной 2.2, вместо среднего радиуса 1.83, что не соответствует реальному движению.

ВЫВОДЫ

Во-первых, применение нового подхода позволило уже в первом приближении получить формулы (6) для оценки частот обращения планет с учетом их гравитационного воздействия друг на друга. Во-вторых, получены формулы, представляющие движение планет в квазипериодическом виде, без секулярных членов. Проведенные численные эксперименты подтверждают корректность предложенной модели, которая может служить альтернативой другим современным методам небесной механики.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке научно-образовательной школы МГУ “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холшевников К.В., Кузнецов А.Д.* Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрономический вестник. 2007. Т. 41. № 4. С. 291–329.
2. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
3. *Брауер Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. М.: Мир, 1964. 516 с.
4. *Емельянов Н.В.* Основы теории возмущений в небесной механике. М.: Физический факультет МГУ, 2015. 126 с.
5. *Буданов В.М.* Метод неопределенных частот. Фундаментальная и прикладная математика. 2018. Т. 22. Вып. 2. С. 59–71.

APPLICATION OF THE UNDEFINED FREQUENCY METHOD FOR THE ANALYSIS OF A TWO PLANET PROBLEM

V. M. Budanov[a]

[a] *Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Levin

The problem of motion of two bodies (planets) with comparable masses around a massive central body (star) is considered in proposition that planet masses are significantly less than the mass of the central body. It is assumed that the movement of the planets occurs in the same plane and orbits are close to circular. The motion of the planets is constructed directly in polar coordinates using the method of undefined frequencies proposed by the author, which is a modification of the method of successive approximations. The first approximation is obtained, which is the sum of uniform circular motion and small quasi-periodic terms for each planet. The latter are the sum of periodic components whose periods are equal to the periods of circular motions of both bodies, as well as their sums and differences. Herewith the periods of circular motions change in comparison with what Kepler's third law gives: the period of the inner planet increases, and the outer one decreases. The second feature of the constructed approximate solution is the absence of secular perturbations.

Keywords: two-planet problem, method of successive approximations