

УДК 533.6.01; 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ ОСЕВОГО ПОТОКА ВИХРЕВЫМИ СЛЕДАМИ НА ЛОПАСТИ НЕЖ

© 2021 г. В. Л. Окулов^{1,*}

Представлено академиком РАН С. В. Алексеенко 12.05.2021 г.

Поступило 17.05.2021 г.

После доработки 22.10.2021 г.

Принято к публикации 25.10.2021 г.

Представлены результаты аналитического моделирования системы винтовых вихрей, сходящих с концов вращающихся лопастей ротора НЕЖ, предложенного Н.Е. Жуковским. В работе построено аналитическое решение для определения скорости торможения потока на лопасти, индуцированной вихревым следом. Впервые для моделирования вихревой системы следа использовалась модель с равномерным распределением завихренности в ядре каждого концевой вихря, сходящего с лопастей ротора НЕЖ. Решение получено с помощью обобщения на многовихревую систему лопастных вихрей метода Дайсона, применявшегося ранее только для отдельного винтового вихря. Данный результат может быть использован при построении теоретических и численных моделей, для оценки оптимальной производительности роторов и предсказания возникновения эрозии и обледенения на их лопастях. Результаты работы представляют интерес для фундаментального понимания и описания поведения потоков с системой винтовых вихрей в роторной аэродинамике и других исследованиях, где в закрученных течениях возникают многовихревые структуры винтовой формы, например, в ядрах торнадо, в вихревых аппаратах и циклонных сепараторах, в камерах сгорания и др.

Ключевые слова: вихревые следы, осевая турбина, вращающаяся лопасть, концевой вихрь, система винтовых вихрей, вихревые структуры

DOI: 10.31857/S2686740021060122

В вихревой теории ротора моделирование винтообразных вихревых следов, сходящих с кромок лопастей, важно, так как они определяют скорость, индуцируемую следом на лопасти, что позволяет правильно определить режим работы и производительность ротора [1]. Знание распределения скоростей вдоль лопасти необходимо для расчета аэроупругих характеристик, оценки эрозии и обледенения лопастей, допустимых сроков эксплуатации ветрогенераторов.

Создание вихревой теории ротора в начале XX в. было стимулировано развитием авиации, а сейчас ее развитие связано с применением возобновляемых источников энергии в гидро- и ветроэнергетике [2, 3]. В 1912 г. Жуковский [4] строит модель ротора на основе использования лопасти с постоянной циркуляцией (лопасть НЕЖ – название предложено Н.Е. Жуковским), генерирующей вихревую систему за ротором из концевых винтовых вихрей с конечным ядром, сходящих с

концов каждой вращающейся лопатки, и одного прямолинейного центрального вихря с суммарной циркуляцией (рис. 1). Генерация энергии ротором прямо связана с торможением потока в плоскости ротора [1]. Отметим, что центральный вихрь в модели НЕЖ не влияет на торможение в силу отсутствия генерации им осевой компоненты скорости. Из-за сложности задачи по определению скоростей, индуцированных концевыми винтовыми вихрями, Николай Егорович не завершил ее решение. В [4] он пишет: “Основная идея присоединенных вихрей, положенная в основание этой статьи, позволила бы вести все вычисления, опираясь на истинные скорости относительного движения жидкости, но анализ этот вышел бы очень сложным”.

В дальнейшем оптимальная концепция ротора НЕЖ с постоянным распределением циркуляции вдоль лопасти была использована Кавадой в [5], но, в отличие от Жуковского, его решение для вихревой системы моделировалось с помощью бесконечно тонких – сингулярных концевых винтовых вихрей [6]. Скорость торможения вдоль лопасти в [5] бралась, отступая от сингулярности на малое расстояние, эквивалентное размеру ядра, а ее изменением при замене конечного рас-

¹ Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: vokulov@mail.ru

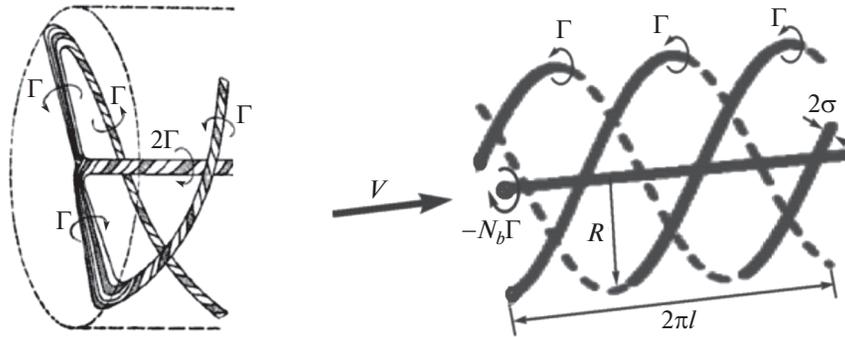


Рис. 1. Вихревая система ротора НЕЖ (слева – адаптирован оригинальный рисунок Н.Е. Жуковского [4]) и вихревая система идеального следа с концевыми винтовыми вихрями радиуса $a = R + \sigma$ и с шагом винта $L = 2\pi l$ (справа).

пределения завихренности в ядре на сингулярное решение пренебрегалось. Преимущество сингулярного представления концевых винтовых вихрей Кавадой связано с законченной аналитической формой его решения, поэтому для роторов НЕЖ его продолжают использовать до сих пор [7–9]. Приближенность решения Кавады, связанная с использованием сингулярного решения вместо решения для вихрей с конечным ядром (см. различие на рис. 5 в [10]), привела к необходимости рассмотрения незавершенного решения Жуковского по моделированию винтового вихря с постоянным распределением циркуляции в конечном ядре [4]. В [11] такое решение было построено для ротора НЕЖ, но для упрощения предлагалось рассматривать конечное ядро только у одного концевого вихря, сходящего с рассматриваемой лопасти, а вклад вихрей от других лопастей из-за их удаленности считать приближенно, как в решении Кавады [5], только через их сингулярное представление. Такое предположение вполне оправдано для достаточно тихоходных роторов, с быстроходностью $\lambda < 4$ ($\lambda = \frac{\Omega R}{V}$, где Ω – угловая скорость, а R – радиус ротора, а V – скорость набегающего потока [12]). В этом случае вихревая система состоит из достаточно удаленных друг от друга винтовых витков, когда искажения при замене распределенной завихренности в ядре винтового вихря на эквивалентную сингулярность затухают раньше их взаимодействия со следующим витком. В данном исследовании впервые построено и исследовано поле скоростей, генерируемое системой концевых вихрей; определено влияние конечного размера для всех вихревых ядер следа и проведено сопоставление нового решения с сингулярным решением [5] и аппроксимацией [11].

В рассматриваемой задаче для N -лопастного ротора НЕЖ радиуса R оси вихревой системы следа из N полубесконечных концевых вихрей точно совпадают с винтовыми линиями радиуса

$a = R + \sigma$, увеличенным на радиус σ вихревого ядра. Шаг винта $L = 2\pi l$ соответствует полному витку винтовой линии (рис. 1). Относительная скорость замедления потока в следе u_z^* в плоскости ротора определяется формулой

$$u_z^* = 1 - \frac{1}{2} \frac{U_z^*}{V}, \tag{1}$$

где V – скорость набегающего потока, а скорость от полубесконечной вихревой системы за ротором определяется через половинное значение скорости U_z , индуцированной полной бесконечной вихревой системой [1, 3].

Для определения в (1) скорости U_z на лопасти вне вихревых ядер используем метод Дайсона [13], в соответствии с которым для одиночной винтовой вихревой трубки [14] было выполнено интегрирование по сечению ядра в объемном интеграле с помощью операторов сдвига. В результате задача о влиянии конечного ядра в объемном интеграле сводится к разложению на линейные интегралы и представляется в виде мультипольных разложений на оси вихревого ядра $U_z = u_z + v_z \dots$. Главный член разложения индуцирует скорость u_z и состоит из цепочки монополюсных особенностей с интенсивностью, равной циркуляции Γ винтового вихря. Следующий вклад дает скорость v_z , индуцированная цепочкой диполей интенсивности d , зависящая только от распределения завихренности в ядре. В [14] для равномерного распределения завихренности найдено

$$d = -\frac{3\Gamma\sigma^2}{16\pi}. \tag{2}$$

В [15] установлено, что для определения поля скорости U_z , индуцированного объемным винтовым вихрем с равномерным распределением завихренности вне его ядра σ , достаточно использовать две компоненты: u_z с циркуляцией Γ и v_z с моментом d , определенным по (2).

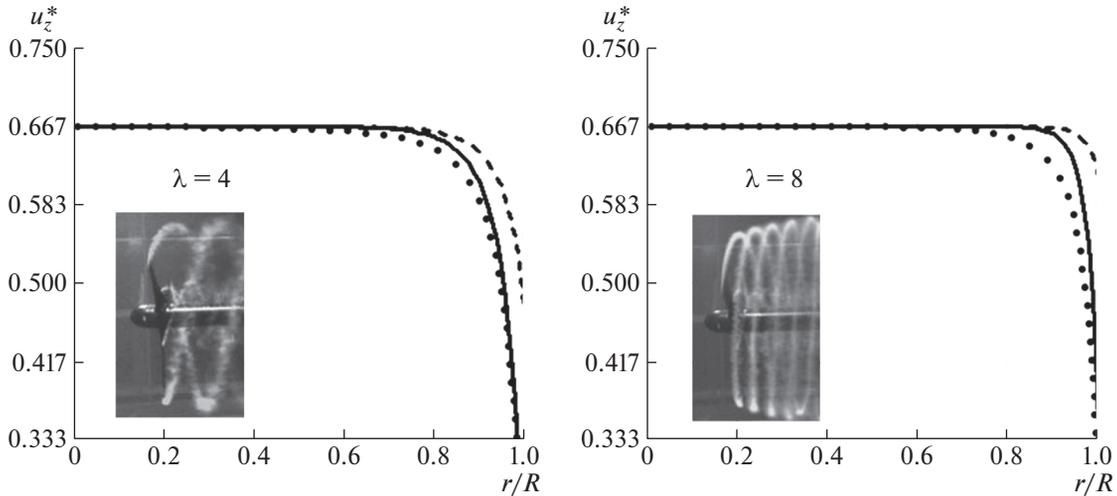


Рис. 2. Торможение осевой скорости вдоль лопасти (r/R) трехлопастной турбины при быстроходности $\lambda = 4$ (слева) и $\lambda = 8$ (справа) для концевых винтовых вихрей следа радиуса $a = R + \sigma$. Штриховые линии – сингулярное распределение завихренности на оси для всех вихрей в следе [5]; пунктирные линии – расчетный вихрь с конечным размером ядра, а остальные сингулярные [11]; сплошные линии – все винтовые вихри в следе имеют конечный размер ядер (данная работа).

Решения для представления следа за ротором вихревой системы из N винтовых вихрей в цилиндрических координатах (r, θ, z) или в винтовых переменных $(r, \chi = \theta - z/l)$ получается суммированием поля скоростей для монополярных и дипольных нитей из [14], сдвинутых друг от друга равномерно на угол $\theta = 2\pi/N$. Полученные соотношения удается упростить циклическим суммированием монополярной и логарифмической сингулярности (см. (16) и (17) в [9])

$$u_z = \frac{\Gamma}{2\pi l} \left(\left\{ \begin{matrix} N \\ 0 \end{matrix} \right\} - A \operatorname{Re} \left[\frac{\pm N e^{\pm \xi N}}{1 - e^{\pm \xi N}} + B \ln(1 - e^{\pm \xi N}) \right] \right). \quad (3)$$

Аналогично, для суммирования дипольных сингулярностей удается найти сумму

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{\mp \xi + i(2\pi n/N)}}{(e^{\mp \xi} - e^{i(2\pi n/N)})^2} = \frac{N^2 e^{\pm \xi N}}{(1 - e^{\pm \xi N})^2}$$

и с ее помощью записать индуцируемую скорость v_z в виде

$$v_z = -\frac{2d}{Rl^2} A \sqrt{l^2 + a^2} \operatorname{Re} \left[\frac{N^2 e^{\pm \xi N}}{(1 - e^{\pm \xi N})^2} \pm B \frac{N e^{\pm \xi N}}{1 - e^{\pm \xi N}} \right], \quad (4)$$

$$\text{где } e^{\xi} = \frac{r e^{\sqrt{1+(r/l)^2}} (1 + \sqrt{1+(a/l)^2})}{a e^{\sqrt{1+(R/l)^2}} (1 + \sqrt{1+(r/l)^2})}; \quad A = \frac{\sqrt{l^2 + a^2}}{\sqrt{l^2 + r^2}};$$

$$B = \frac{l}{24} \left(\frac{9a^2 + 2l^2}{(l^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3r^2 - 2l^2}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \right).$$

В (3) и (4) использованы двухуровневые обозначения $\left\{ \begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix} \right\}$ или “ \pm ”, где верхний символ соответствует значению $r < a$, а нижний: $r \geq a$.

Расчет u_z^* с применением только уравнения (3) в определении U_z дает скорость в приближении Кавады [5] в форме сингулярной модели вихревой системы, уточненной в [8]. Расчет u_z^* по (3) с коррекцией поля скоростей (4) при $N = 1$ только для одного расчетного вихря соответствует полу-сингулярной аппроксимации [11], а точная сумма (3) и (4) дает искомое решение, учитывающее распределение завихренности в каждом ядре концевых вихрей. Все три аналитических решения: первые два – для приближенных моделей следа и третье, полученное в данном сообщении, для точной модели НЕЖ явно включают геометрические параметры вихревой системы. Это позволяет определить и проанализировать их влияние на изменения торможения потока и сравнить разные модели.

На рис. 2 показано сравнение трех описанных моделей следа при расчете осевой скорости торможения для трехлопастного ротора при значениях быстроходности 4 ($l = 0.1875$) и 8 ($l = 0.0875$), $\sigma = 0.07$, $\Gamma = \frac{4\pi RV}{3}$ для $a = 1.07$. Важно отметить, что концевая треть лопасти ($\frac{r}{R} > 0.67$) производит более 50% от общей мощности турбины. В связи с этим предпринимаются многочисленные попытки для создания более точных моделей следа. Обычно уточнения за счет применения новых мо-

делей составляют всего несколько процентов, а иногда только их долей, как это показано для ротора Беца–Гольдштейна в [9]. В данной работе для ротора НЕЖ получено большее различие для новой модели следа при использовании очевидного обобщения на конечный размер ядер у всех концевых вихрей (сплошные линии) по сравнению с существовавшими моделями при их полном либо частичном сингулярном представлении вихревой системы. Эти различия составляют 3 и 7% для быстроходностей ротора 4 и 8. Разница при росте быстроходности ротора связана с уменьшением расстояния между соседними витками концевых вихрей, показанная на фотографиях рис. 2. При более плотном расположении витков концевых вихрей становится существенным влияние других вихрей, сходящих с соседних лопастей, что требует использования предложенной здесь модели следа за ротором НЕЖ.

Таким образом, впервые получено аналитическое представление решения для определения поля скоростей, индуцированного системой винтовых вихрей за ротором НЕЖ с равномерным распределением завихренности в ядрах всех вихрей, предполагавшееся Н.Е. Жуковским в оригинальной модели ротора НЕЖ. С его помощью явно вычисляется и анализируется скорость торможения набегающего потока на лопастях при различных значениях параметров вихревых структур в следе: их числе, размере ядер и винтового шага. Для режимов работы роторов с быстроходностью 8, оптимальной при эксплуатации промышленных ветрогенераторов, разница по сравнению с более простыми моделями следа достигает 7%, что превышает результаты последних подобных модернизаций следа за ротором Беца–Гольдштейна [9].

Данные результаты имеют значение для фундаментального понимания и описания поведения потоков с системой винтовых вихрей в роторной аэродинамике, в том числе для моделирования работы ветрогенераторов в экстремальных условиях. Например, при физическом или численном моделировании обледенения важно знать изменения скорости набегающего потока вдоль всей лопасти. Кроме того, новое решение представляет интерес в других областях гидродинамики, где возникают режимы с многовихревыми винтовыми структурами, например, в ядрах торнадо, в приосевых вихрях вихревых аппаратов, циклонных сепараторов, в камерах сгорания и др.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00205, в соответствии с тематикой международной академической и исследовательской программы по изучению обледенения структур в холодных регионах CoARICE.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wood D.H.* Application of extended vortex theory for blade element analysis of horizontal-axis wind turbines // *Renew. Energy.* 2018. V. 121. P. 188–194.
2. *Sørensen J.* General momentum theory for horizontal axis wind turbines. Springer. 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-22114-4>
3. *Segalini A., Alfredsson P.* A simplified model of propeller and wind-turbine wakes // *J. Fluid Mechanics.* 2013. V. 725. P. 91–116.
4. *Жуковский Н.Е.* Вихревая теория гребного винта, I // *Труды Отделения Физических наук Общества Любителей Естествознания: I.* 1912. Т. 16(1).
5. *Kawada S.* Calculation of induced velocity by helical vortices and its application to propeller theory // *Technical Report 172 Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University.* 1939. <http://repository.tksc.jaxa.jp/pl/dr/IS4146951000/en>.
6. *Fukumoto Y., Okulov V.L., Wood D.H.* The Contribution of Kawada to the Analytical Solution for the Velocity Induced by a Helical Vortex Filament // *Applied Mechanics Reviews.* 2015. V. 67 (6). P. 060801.
7. *Lerbs H.* Moderately loaded propeller with a finite number of blades and an arbitrary distribution of circulation // *Trans SNAME.* 1952. V. 60. P. 73–123.
8. *Morgan B.M., Wrench J.W.-Jr.* Some computation aspects of propeller design // *Methods in Computational Physics.* 1965. V. 4. P. 301–331.
9. *Wood D.H.* Helical vortices and wind turbine aerodynamics // *International Journal of Mathematics for Industry.* 2020 Dec 6; 12 (01): 2050002.
10. *Okulov V., Sørensen J.* The self-induced motion of a helical vortex // *Journal of Fluid Mechanics.* 2020. V. 883. P. A5.
11. *Okulov V.L., Sørensen J.N.* Maximum efficiency of wind turbine rotors using Joukowski and Betz approaches // *Journal of Fluid Mechanics.* 2010. V. 649. P. 497–508.
12. *Hansen M.* Aerodynamics of wind turbines. Routledge, 2015. 188 p. <https://doi.org/10.4324/9781315769981>
13. *Dyson F.W.* The potential of an anchor ring. II // *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* 1893. V. 184. P. 1041–1106.
14. *Fukumoto Y., Okulov V.L.* The velocity field induced by a helical vortex tube // *Physics of Fluids.* 2005. V. 17 (10). P. 107101.
15. *Окулов В.Л., Фукумото Я.* Аналитическое решение для самоиндуцированного движения винтового вихря с гауссовым ядром // *Теплофизика и аэромеханика.* 2020. Т. 27 (4). С. 507–514.

MODELING OF A DECELERATION OF THE AXIAL FLOW BY VORTEX WAKES ON THE NEJ BLADE

V. L. Okulov^a

^a *Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Alekseenko

The results of analytical modeling of the system of tip helical vortices behind the rotating blades of the NEJ rotor are presented (the NEJ was proposed by N.E. Joukowsky). For the first time, the influence of the distribution of vorticity in the core for each tip vortex of the wake on the total deceleration of the velocity in the rotor-plane was taken into account. This result was obtained by extending the Dyson method for determining the induced velocity around a single helical vortex with a constant distribution of vorticity in the core to the many blade vortices in the wake. The greatest effect from the refined description of the vortex system was obtained with an increase in tip speed ratio of the rotor, when the distances between the helical turns of the wake become commensurate with the dimensions of their vortex cores. The proposed analytical solution for predicting the axial velocity induced on the blade gives a more accurate determination of a rotor efficiency and optimal operating regimes, as well as uses it in models to assess possible erosion and icing. These results are important for a fundamental understanding and description of the behavior of flows with a system of helical vortices not only in power engineering, but also in other areas where regimes with many vortex helical structures arise, for example, in tornado cores and for axial vortices in vortex apparatuses; cyclone separators, combustion chambers, etc.

Keywords: vortex wakes, axial turbine, rotating blade, tip vortex, helical vortex system, vortex structures