

УДК 532.51

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИКЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОМЕЩЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

© 2021 г. Е. Н. Журавлева^{1,2,*}, член-корреспондент РАН Н. М. Зубарев^{3,4,**},
О. В. Зубарева^{3,***}, Е. А. Карabut^{1,2,****}

Поступило 25.08.2021 г.

После доработки 25.08.2021 г.

Принято к публикации 20.10.2021 г.

Представлены точные решения классической задачи о плоском нестационарном потенциальном течении несжимаемой жидкости со свободной границей. Жидкость занимает полубесконечную полосу, ограниченную свободной границей (сверху) и (с боков) двумя твердыми вертикальными стенками, сближающимися с постоянной скоростью. Решения найдены для ситуации, когда капиллярность и гравитационные силы отсутствуют, а движение жидкости полностью обусловлено движением стенок. В решениях уравнений движения неизбежно возникают сингулярности за конечное время: это время ограничено сверху моментом столкновения стенок. Рассмотрены примеры точных решений, соответствующие формированию пузырей, точек заострения и капель.

Ключевые слова: нестационарные течения, свободные границы, точные решения, формирование особенностей за конечное время

DOI: 10.31857/S2686740021060171

Несмотря на почти двухвековую историю задачи о плоском нестационарном потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей [1], известно лишь малое число ее точных частных решений. Наиболее известный класс точных решений — течения с линейным полем скоростей — был открыт Дирихле [2]. Классификация таких решений для двумерного случая была осуществлена акад. Л.В. Овсянниковым [3] и М.С. Longuet-Higgins [4]. Свободная граница для соответствующих течений представляет собой кривую второго порядка: эллипс, гиперболу, параболу и, в вырожденном случае, прямую. В наших работах [5, 6] был найден класс нестационар-

ных течений с нелинейным полем скоростей, позволяющий снять указанное ограничение на геометрию границы. Независимо аналогичный класс решений был найден акад. В.Е. Захаровым [7]. Существенным недостатком этих решений является, как это было названо в [7], их “экзотичность”: для описываемых ими течений скорость жидкости стремится к бесконечности на периферии. Как следствие, построенные течения представляют скорее академический, чем практический интерес.

В настоящей работе показано, что проблему с условиями на бесконечности можно устранить, рассматривая комбинированные граничные условия, где, в отличие от [5–7], граница жидкости не является целиком свободной. Нам удалось найти точные нетривиальные решения задачи о плоском нестационарном потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, помещенной между двумя сближающимися непроницаемыми твердыми вертикальными стенками. Движение жидкости происходит как по инерции, так и под действием движущихся стенок. Такая задача оказывается чрезвычайно удобной для исследования формирования особенностей на свободной поверхности жидкости.

Для плоских течений идеальной несжимаемой жидкости уравнение неразрывности и условие

¹ Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

³ Институт электрофизики Уральского отделения
Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

⁴ Физический институт им. П.Н. Лебедева
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: zhuravleva_e@mail.ru

**E-mail: nick@iep.uran.ru

***E-mail: olga@iep.uran.ru

****E-mail: eakarabut@gmail.com

потенциальности записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ – x -я и y -я компоненты вектора скорости жидкости, соответственно; x, y и t – декартовы координаты и время. Уравнения (1) представляют собой соотношения Коши–Римана для функции $U(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t)$, называемой комплексной скоростью. Это означает, что $U(z, t)$ является аналитической функцией от комплексной переменной $z = x + iy$ в занимаемой жидкостью области.

Динамика жидкости в отсутствие внешних сил определяется уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

где $p(x, y, t)$ – давление, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости. Сверху жидкость ограничена свободной границей, которая состоит из одних и тех же частиц жидкости для любого t . Если свободная граница задана уравнением $h(x, y, t) = 0$, то на ней должно выполняться следующее (кинематическое) условие:

$$\frac{dh}{dt} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad h(x, y, t) = 0, \quad (4)$$

где $\frac{d}{dt}$ обозначает полную производную. Помимо него, на свободной поверхности должно выполняться динамическое граничное условие:

$$p = \text{const}, \quad h(x, y, t) = 0. \quad (5)$$

Обозначим абсолютное значение скорости каждой стенки за V ($V > 0$). Их положения задаются уравнениями $x = \pm Vt$, т.е. они сталкиваются в момент $t = 0$ (нас будет интересовать поведение жидкости при $t < 0$). Кинематические условия на стенках имеют вид $u|_{x=\pm Vt} = \pm V$, или, в комплексной форме,

$$\text{Re} U = \pm V, \quad \text{Re} z = \pm Vt. \quad (6)$$

Наконец, на бесконечной глубине $y \rightarrow -\infty$ потребуем $v \rightarrow -\frac{y}{t}$, т.е. в результате сближения стенок жидкость выдавливается вниз.

Сформулированная задача допускает точное частное решение, для которого свободная поверхность жидкости – плоская. Жидкость занимает полубесконечную полосу $y < 0$ и $Vt < x < -Vt$. Отрезок $y = 0$ и $Vt < x < -Vt$ является свободной границей. По мере возрастания t (напомним, что

$t < 0$) ширина полосы уменьшается и при $t = 0$ она становится нулевой – стенки сталкиваются. Комплексная скорость задается автомодельным соотношением

$$U = \frac{z}{t}. \quad (7)$$

В этом случае для давления и компонент скорости имеем

$$p = -\frac{\rho y^2}{t^2}, \quad u = \frac{x}{t}, \quad v = -\frac{y}{t},$$

что, как несложно убедиться, обеспечивает выполнение уравнений (1)–(6). Понятно, что к моменту $t = 0$ в результате столкновения стенок поле скоростей становится сингулярным. Описываемое (7) нестационарное течение с плоской свободной границей и линейным полем скоростей было ранее изучено в [3, 4].

В работе [6] было продемонстрировано, что определенного прогресса в описании плоских течений со свободной границей можно достичь, применяя преобразование годографа, т.е. используя величину U в качестве независимой переменной, а переменную z в качестве неизвестной функции. Это преобразование оказывается удобным для рассматриваемой в настоящей работе задачи, поскольку движущиеся границы $x = \pm Vt$ области, занимаемой жидкостью в плоскости z , после перехода в плоскость годографа U становятся фиксированными: $u = \pm V$.

Точное частное решение (7) после преобразования годографа, очевидно, примет вид

$$z = Ut. \quad (8)$$

Это выражение определяет невозмущенное (базовое) решение задачи. Понятно, что возмущенное течение в общем случае представимо в виде

$$z = Ut + f(U, t), \quad (9)$$

где f – некоторая функция, определяющая отклонение течения от автомодельного (8). В настоящей работе мы покажем, что широкий класс точных решений задачи можно найти, ограничиваясь рассмотрением ситуации, когда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, т.е. возмущение f не зависит от времени явно.

Итак, будем искать решение для возмущенного течения в виде

$$z = Z(U, t) = Ut + F(U), \quad (10)$$

где F – неизвестная функция комплексной скорости U . При этом мы не будем требовать малости возмущения F , т.е. будем рассматривать эволюцию возмущений произвольной амплитуды и формы.

Рассмотрим, совместно ли представление (10) с исходными уравнениями движения (1)–(6). Из (6) сразу видно, что на прямых $u = \pm V$ в плоско-

сти годографа U должно быть выполнено следующее условие:

$$\operatorname{Re}F(U)|_{u=\pm V} = 0. \quad (11)$$

Если выбрать удовлетворяющую ему функцию F , то это автоматически обеспечит выполнение кинематических условий на движущихся стенках $x = \pm Vt$.

Обсудим теперь условия на свободной поверхности жидкости. Перепишем уравнение (10) через обратную функцию $G = F^{-1}$:

$$U(z, t) = G(z - Ut). \quad (12)$$

Несложно сообразить, что неявное выражение (12) – это известное решение уравнения Хопфа

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

получаемое методом характеристик. Покажем, что течение, задаваемое (13) или (10), обеспечивает выполнение и кинематического (4), и динамического (5) условий.

Уравнения Эйлера (2) и (3) можно записать в комплексном виде как

$$\frac{dU}{dt} \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad (14)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Разность (14) и (13) дает:

$$2iv \frac{\partial U}{\partial z} \equiv -2i \operatorname{Im} U \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Отсюда сразу видно, что для течения, описываемого уравнением Хопфа (13), на поверхности $\operatorname{Im} U \equiv -v = 0$ будет выполнено условие $\nabla p = 0$,

где $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Тогда на этой поверхности $p = \text{const}$, что автоматически обеспечивает выполнение динамического граничного условия (5).

Выполнение кинематического условия (4) немедленно следует из (14), где при нулевой правой части

будет $\frac{dU}{dt} = 0$, т.е. для рассматриваемого нами течения жидкие частицы на поверхности $\operatorname{Im} U \equiv -v = 0$

движутся без ускорения. В частности, $\frac{dv}{dt} = 0$, что и является кинематическим граничным условием (4) при выборе функции $h \equiv v$. Таким образом, условие $v = 0$ для описываемого формулой (10) течения задает свободную поверхность в плоскости годографа.

Дальнейший анализ течений, описываемых выражением (10) с условием (11), существенно использует тот факт, что область, занимаемая жидкостью, оказывается неизменной в плоскости годографа U ; в ней жидкость занимает полубесконечную полосу:

$$v < 0, \quad -V < u < V. \quad (15)$$

Рассмотрим, какие ограничения на функцию F накладывает требование, что комплексная скорость U должна являться голоморфной функцией переменной z в занимаемой жидкостью области (аналитичность функции U вытекает из условий (1)). Из свойств обратных функций следует, что при выполнении условия $\frac{\partial Z}{\partial U} \neq 0$ функция U не будет иметь особых точек в области течения. В терминах функции F это соответствует тому, что F должна быть аналитична и для нее

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} \neq -t \quad (16)$$

в области (15). Последнее означает, что особые точки, задаваемые условием $\frac{\partial F}{\partial U} = -t$, должны находиться вне области течения. Условие (16) легко выполнимо. Если производная $\frac{\partial F}{\partial U}$ финитна в области (15) (здесь принципиально важно, что занимаемая жидкостью область фиксирована в плоскости U), то условие (16) будет автоматически выполняться при достаточно больших $|t|$. Действительно, пусть функция F выбрана таким образом, что в полуполосе (15) справедливо условие

$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right) \leq T$, где T – некоторая положительная величина. Тогда условие $\frac{\partial F}{\partial U} = -t$, задающее особые точки, в принципе не может выполняться в области течения при $t < -T$. При этом условие (16) может быть нарушено при малых $|t|$ (при $-T < t < 0$), т.е. когда стенки уже достаточно сильно приблизятся друг к другу. При выходе особой точки на границу области (15) решение будет разрушаться, что может сопровождаться формированием особенностей на свободной поверхности жидкости [8–13].

Итак, нами продемонстрировано, что если мы возьмем аналитическую функцию F , удовлетворяющую необременительным условиям (11) и (16), то неявное выражение (10) дает точное решение рассматриваемой задачи (1)–(6). Это решение можно интерпретировать как описывающее динамику возмущений базового течения (8). Для найденных решений амплитуда возмущений произвольна, и, как следствие, они задают нелинейную эволюцию возмущений вплоть до формирования различного рода особенностей. Поскольку на свободной границе $v = 0$, то ее эволюция задается параметрическим уравнением $z = ut + F(u)$ или, в вещественном виде, уравнениями

$$x = ut + \operatorname{Re}F(u), \quad y = \operatorname{Im}F(u), \quad (17)$$

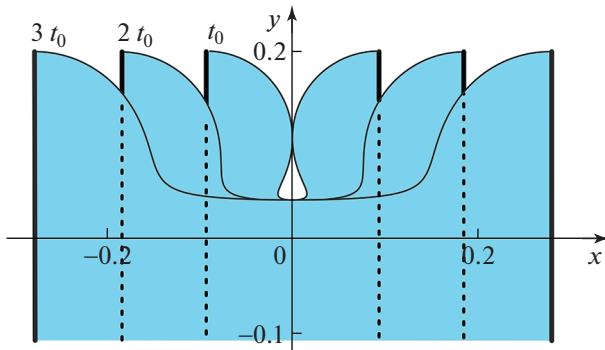


Рис. 1. Образование пузыря на свободной границе. Течение описывается уравнениями (10) и (18) при $a = -0.1$, $b = -1.5$, $V = 2$. Представлены последовательные моменты времени $t = 3t_0, 2t_0, t_0$, где $t_0 \approx -0.0463$ – момент разрушения решения. Вертикальные лучи соответствуют твердым стенкам.

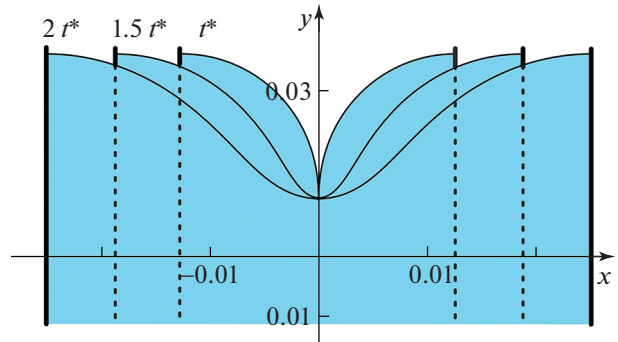


Рис. 2. Образование заостренной лунки в жидкости со свободной поверхностью. Течение описывается уравнениями (10) и (18) при $a = -0.1$, $b = -4$, $V = 2$. Представлены последовательные моменты времени $t = 2t^*, 1.5t^*, t^*$, где $t^* \approx -0.0063$ – момент разрушения решения.

где горизонтальная скорость u играет роль параметра ($-V < u < V$). Вместе с уравнениями $x = \pm Vt$ для стенок, уравнения (17) определяют область течения.

Рассмотрим в качестве примера течение (10) с $2V$ -периодической функцией F , задаваемой выражением:

$$F(U) = \frac{ia}{b - \exp\left(\frac{i\pi U}{V}\right)}, \quad (18)$$

где a и b – вещественные постоянные (условие (11), очевидно, выполнено). Соответствующее течение симметрично относительно прямой $x = 0$. При $a < 0$ и $b < -1$ возмущение свободной поверхности, задаваемое (18), направлено вниз – см. рис. 1 и 2. Стенки толкают перед собой волны, которые при столкновении захватывают пузырь (этот режим реализуется при $b^* < b < -1$, где $b^* = -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$), либо образуют заостренную лунку (при $b \leq b^*$).

Динамика образования пузыря продемонстрирована на рис. 1. Разрушение течения происходит в момент $t_0 \approx -0.0463$ в результате того, что граница становится самопересекающейся (в одной точке сталкиваются две свободные поверхности). Соответственно, решение существует при $t \leq t_0$.

Динамика формирования точки заострения на границе жидкости показана на рис. 2. Она образуется при выходе на свободную поверхность особой точки из области вне течения в момент $t^* = \frac{\pi a}{V(1-b)^2}$. Решение задачи в этом случае существует ограниченное время $t \leq t^* < 0$.

Возмущение свободной поверхности направлено вверх при $a > 0$ и $b > 1$ (рис. 3). В этом случае

наблюдается тенденция к образованию капли за счет вытеснения жидкости вследствие сближения твердых стенок. Решение существует ограниченное время $t \leq t^{**}$, где $t^{**} = -\frac{\pi a}{V(1+b)^2}$ – момент его

разрушения (поле скоростей становится многозначным). В зависимости от значения параметра b можно выделить два сценария. При $1 < b < b^{**}$, где $b^{**} = 2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, формирующаяся капля “не помещается” между стенками, и для продолжения решения до момента t^{**} стенки необходимо ограничить сверху на высоте $y = \frac{a}{1+b}$. Решение тогда напоминает выдавливание мороженого из вафельного бrikета – см. рис. 3. На рис. 4 мы видим, что особенности, исходно расположенные вне жидкости, с ростом t приближаются к свободной границе, меняя ее форму. В момент t^{**} они касаются границы, разрушая решение. В случае же $b \geq b^{**}$ (второй сценарий) капля “помещается” между вертикальными стенками вплоть до момента “коллапса” t^{**} .

Таким образом, уже при использовании относительно простого выражения (18) для входящей в точное решение (10) произвольной функции F , мы получаем достаточно сложные и интересные нестационарные течения жидкости со свободной поверхностью, приводящие за конечное время к формированию различного рода особенностей – каплей, пузырей, заострений. Как отмечалось выше, существенным недостатком исследованных ранее в [5–7] течений с неограниченной свободной поверхностью являлось “экзотическое”, инфинитное поведение поля скоростей на периферии. Это затрудняло использование полученных ранее точных решений для описания реальных течений. В настоящей работе, где жидкость ограничена

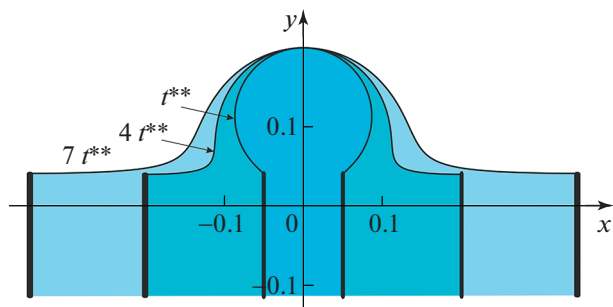


Рис. 3. Динамика образования капли. Течение описывается уравнениями (10) и (18) с $a = 0.1$, $b = 1.5$, $V = 2$. Представлены три области с разной заливкой, соответствующие жидкости для разных моментов времени $t = 7t^{**}$, $4t^{**}$, t^{**} . Здесь $t^{**} \approx -0.025$ – момент разрушения решения.

сближающимися с постоянной скоростью V стенками, проблема расходимости устранена. Горизонтальная скорость всегда финитна: она относится к интервалу $-V < u < V$, определяемому движением стенок. Полученные новые решения имеют ясный физический смысл и, по нашему мнению, войдут в весьма ограниченный список демонстрационных примеров точно решаемых задач гидродинамики.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 19-01-00096 и 19-08-00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1847. V. 8. P. 441–445.
2. *Dirichlet G.L.* Untersuchungen über ein problem der hydrodynamik // *J. Reine Angew. Math.* 1861. V. 58. P. 181–216.
3. *Овсянников Л.В.* Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967. С. 3–75.
4. *Longuet-Higgins M.S.* A class of exact, time-dependent, free-surface flows // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 55. № 3. P. 529–543.
5. *Karabut E.A., Zhuravleva E.N.* Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 754. P. 308–331. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.401>
6. *Зубарев Н.М., Карабут Е.А.* Точные локальные решения для формирования особенностей на свободной поверхности идеальной жидкости // *Письма в ЖЭТФ.* 2018. Т. 107. № 7. С. 434–439. <https://doi.org/10.7868/S0370274X18070056>
7. *Захаров В.Е.* Интегрирование уравнений глубокой жидкости со свободной поверхностью // *Теорети-*
8. *Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* Surface singularities of ideal fluid // *Phys. Lett. A.* 1993. V. 182. P. 387–393. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90413-T](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90413-T)
9. *Baker G.R., Xie C.* Singularities in the complex physical plane for deep water waves // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 685. P. 83–116. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.283>
10. *Lushnikov P.M.* Structure and location of branch point singularities for Stokes waves on deep water // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 800. P. 557–594. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.405>
11. *Lushnikov P.M., Zubarev N.M.* Exact solutions for non-linear development of a Kelvin-Helmholtz instability for the counterflow of superfluid and normal components of Helium II // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 120. P. 204504. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.204504>
12. *Журавлева Е.Н., Пухначев В.В.* Задача о деформации вязкого слоя // *Доклады РАН. Физика, технические науки.* 2020. Т. 490. С. 66–69. <https://doi.org/10.31857/S2686740020010228>
13. *Dyachenko A.I., Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Zakharov V.E.* Short branch cut approximation in two-dimensional hydrodynamics with free surface // *Proc. R. Soc. A.* 2021. V. 477. № 2249. P. 20200811. <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0811>

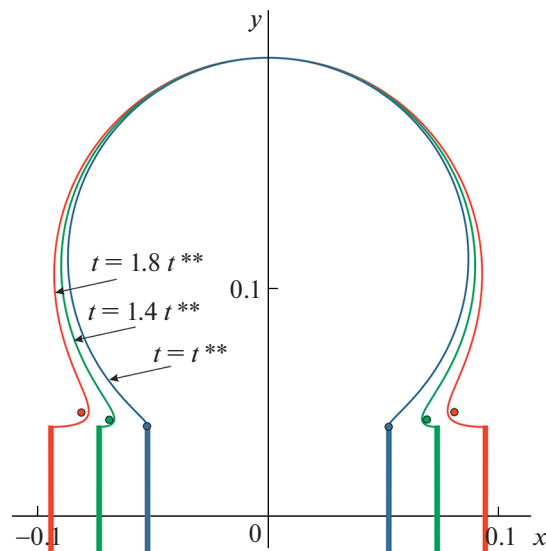


Рис. 4. Положение свободной границы и двух особых точек для трех моментов времени $t = 1.8t^{**}$, $t = 1.4t^{**}$ и $t = t^{**}$, где $t^{**} \approx -0.025$ – момент разрушения решения и, одновременно, момент выхода особых точек на свободную границу.

ческая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 3. С. 327–338.

<https://doi.org/10.4213/tmf9811>

EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF DYNAMICS OF A FLUID WITH A FREE SURFACE LOCATED BETWEEN TWO APPROACHING VERTICAL WALLS

**E. N. Zhuravleva^{a,b}, Corresponding Member of the RAS N. M. Zubarev^{c,d},
O. V. Zubareva^c, and E. A. Karabut^{a,b}**

^a *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

^b *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

^c *Institute of Electrophysics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

^d *Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Exact solutions of a classical problem of a plane unsteady potential flow of an ideal incompressible fluid with a free boundary are presented. The fluid occupies a semi-infinite strip bounded by the free surface (from above) and (from the sides) by two solid vertical walls approaching each other with a constant velocity. The solutions are obtained for a situation where the capillary and gravity forces are absent, and the fluid motion is completely determined by the motion of the walls. Singularities inevitably arise in the solutions of the equations of motion in a finite time: this time is limited from above by the moment of collision of the walls. Examples of exact solutions corresponding to the formation of bubbles, cuspidal points, and droplets are considered.

Keywords: unsteady flows, free boundaries, exact solutions, formation of singularities in a finite time