

УДК 533.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ СЖИМАЕМОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ С ОДНОРОДНЫМ ВДУВОМ ДЛЯ ЧИСЕЛ ПРАНДТЛЯ ГАЗА $Pr = 0.1..1.0$

© 2022 г. Академик РАН А. И. Леонтьев<sup>1,2,\*</sup>, В. Г. Луцки<sup>1,\*\*</sup>, М. С. Макарова<sup>1,\*\*\*</sup>

Поступило 13.10.2021 г.

После доработки 02.12.2021 г.

Принято к публикации 03.12.2021 г.

Проведено численное исследование сжимаемого ламинарного пограничного слоя на проницаемой пластине с однородным вдувом для чисел Прандтля газа  $Pr = 0.1..1.0$ . Рассмотрены режимы, при которых температура вдуваемого газа ниже температуры адиабатной непроницаемой стенки. Для ряда температур торможения набегающего потока подтверждено существование минимума температуры проницаемой стенки, при этом величина минимума ниже температуры вдуваемого газа. Для случая, когда минимум температуры проницаемой стенки с уменьшением температуры вдуваемого газа, смещаясь ближе к сечению критического вдува, наконец совпадает с ним, введена величина критической температуры адиабатной проницаемой стенки. Была уточнена полученная ранее критерияльная зависимость от чисел Прандтля, Маха и температуры торможения, позволяющая оценить диапазон температур вдуваемого газа, при котором возможно существование минимума температуры проницаемой стенки.

**Ключевые слова:** адиабатная стенка, критический вдув, число Прандтля, ламинарный сжимаемый пограничный слой

DOI: 10.31857/S2686740022010102

В инженерных методиках расчета сжимаемого пограничного слоя при определении теплового потока в стенку  $q_w$ , для повышения точности определения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  при обтекании сверхзвуковым потоком поверхностей сложной формы [1, 2], а также при исследовании процессов энергоразделения высокоскоростных газовых потоков [3, 4] в качестве определяющей температуры используется величина адиабатной температуры стенки  $T_{aw0}$  [5]:

$$q_w = \alpha(T_{aw0} - T_w),$$

где

$$T_{aw0} = T_e + r \frac{U_e^2}{2C_p} = T_e \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right),$$

$T_w$  – температура стенки,  $\gamma$ ,  $C_p$ ,  $T_e$ ,  $U_e$ ,  $M$  – показатель адиабаты, изобарная теплоемкость, статическая температура, скорость и число Маха набегающего потока,  $r = (T_{aw0} - T_e)/(T_e^* - T_e)$  – коэффициент восстановления температуры,  $T_e^*$  – температура торможения. Проблеме определения величин  $T_{aw0}$  и  $r$  посвящена обширная литература [1–4]. В общем случае их значения зависят от чисел Маха  $M$ , Прандтля  $Pr$ , Рейнольдса  $Re_x$  набегающего потока, формы обтекаемой поверхности, наличия транспирации газа на стенке (например, вдува), типа теплоносителя и т.д. При обтекании проницаемых поверхностей со вдувом в задаче появляются два дополнительных параметра – температура вдуваемого газа  $T_j$  и интенсивность вдува  $j_w = (\rho v)_w / (\rho U)_e$  [6]. В качестве теплоносителей теплообменных аппаратов и рабочих тел энергоустановок могут быть использованы газы в широком диапазоне значений молекулярного числа Прандтля  $Pr$  [7, 8]. Малые ( $Pr < 0.2 \div 0.7$ ) числа Прандтля могут быть реализованы в газовых смесях легкого и тяжелого газов [9], а большие ( $Pr > 1$ ) – в перегретом водяном паре ( $Pr \approx 3.4$ ) и в смеси продуктов сгорания топлива керосин–кислород [10, 11]. Проблема снижения температуры стенки

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: leontiev\_27@mail.ru

\*\*E-mail: vgl\_41@mail.ru

\*\*\*E-mail: mariia.makarova@gmail.com

$T_w$  актуальна при исследовании методов улучшения теплозащиты высоконагруженных элементов энергоустановок [12].

В работе авторов [13] путем численного исследования турбулентного пограничного слоя на проницаемой пластине в сверхзвуковом потоке воздуха ( $Pr = 0.7$ ) при однородном вдуве с заданной температурой охладителя получен результат, состоящий в том, что при некоторых значениях температуры вдуваемого газа  $T_j$  на проницаемой стенке образуется область, в которой температура стенки  $T_w$  становится ниже величины  $T_j$ . При этом температура проницаемой стенки  $T_w$  проходит через минимум в данной области, и данный минимум с уменьшением температуры вдуваемого газа  $T_j$  смещается дальше по потоку в сторону сечения критического вдува.

С целью исключить влияние турбулентности на течение в пограничном слое и подтвердить обнаруженный в [13] эффект, в [14] проведено численное исследование сжимаемого ламинарного пограничного слоя на проницаемой пластине с вдувом для малых и больших чисел Прандтля ( $Pr = 0.3$  и  $3.0$ ). В [15] исследуемый диапазон чисел Прандтля был ограничен лишь малыми числами Прандтля  $Pr < 1.0$ , однако подробно исследовано влияние параметра интенсивности вдува  $j_w$  и числа Маха  $M$  набегающего потока. Впервые введено определение критической температуры  $T_{wcr}$  – это температура вдуваемого газа, при которой минимум зависимости температуры стенки  $T_w(Re_x)$  совпадает с температурой адиабатной проницаемой стенки  $T_{aw}$  при критическом вдуве.

Полученная в [15] критериальная зависимость  $K$  позволяет обобщить полученные результаты простым алгебраическим выражением и для данных значений  $Pr$ ,  $M$  и  $T_e^*$  оценить диапазон температур вдуваемого газа, при котором возможно существование обнаруженного эффекта и определить значение  $T_{wcr}$ .

Целью настоящей работы является уточнение критериальной зависимости  $K$ , полученной в [15], учетом влияния температуры торможения набегающего потока  $T_e^*$  и сравнительный анализ полученных результатов.

Постановка задачи принималась как в [14, 15]. Для расчета течения и теплообмена в сверхзвуковом ламинарном пограничном слое на плоской проницаемой пластине использована система уравнений неразрывности, движения и энергии [6]. Граничные условия принимались следующим образом:

На проницаемой стенке  $y = 0$ :

$$u = 0, \quad \rho v = (\rho v)_w, \quad C_p(\rho v)_w(T_w - T_j) = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w.$$

На внешней границе пограничного слоя  $y = \delta(x)$ :

$$u = U_e, \quad T = T_e.$$

В начальном сечении ( $x = 0$ ) пограничный слой задавался с ламинарным профилем скорости  $\frac{u}{U_e}$  и температурой

$$\frac{T}{T_e} = \frac{1}{2} \sqrt{Pr} (\gamma - 1) M^2 \left[ 1 - \left( \frac{u}{U_e} \right)^2 \right].$$

Число Рейнольдса потери импульса составляло  $Re_\theta = \frac{\rho_e U_e \theta}{\mu_e} = 10$ .

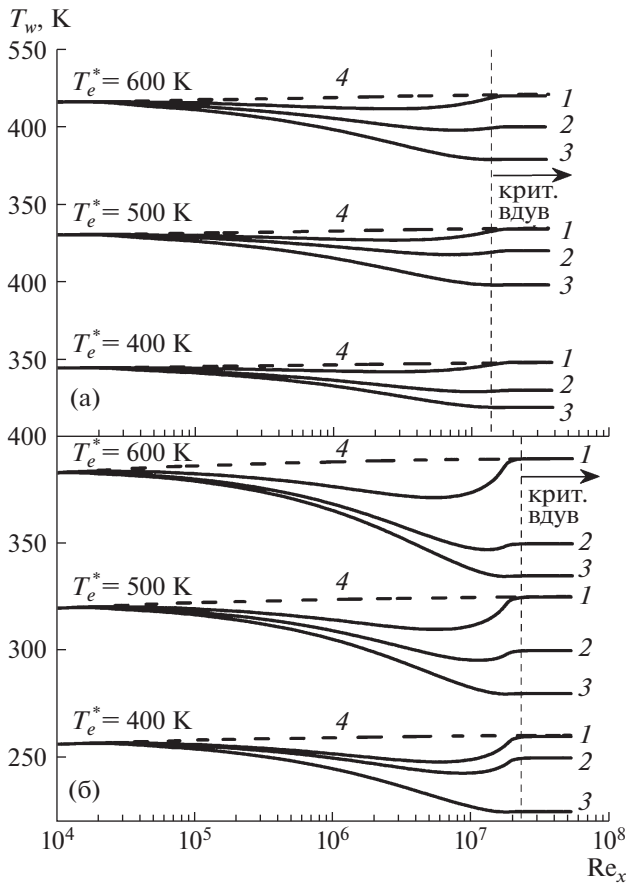
Теплофизические свойства среды ( $\rho, \mu, \lambda, C_p$ ) задавались в виде таблицы в зависимости от температуры и давления.

Расчеты проводились в той же постановке, что и в [14, 15]. Пластина обтекалась потоком газа с постоянными сверхзвуковой скоростью  $U_e$  (соответствующей заданному числу Маха  $M$ ) и температурой торможения  $T_e^*$ . Начальный участок пластины длиной, соответствующей числу Рейнольдса  $Re_x = \frac{\rho_e U_e x}{\mu_e} = 2 \times 10^4$ , полагался непроницаемым и адиабатным. Далее следовал проницаемый участок, на котором задавался вдув газа с постоянной интенсивностью вдува  $j_w$ .

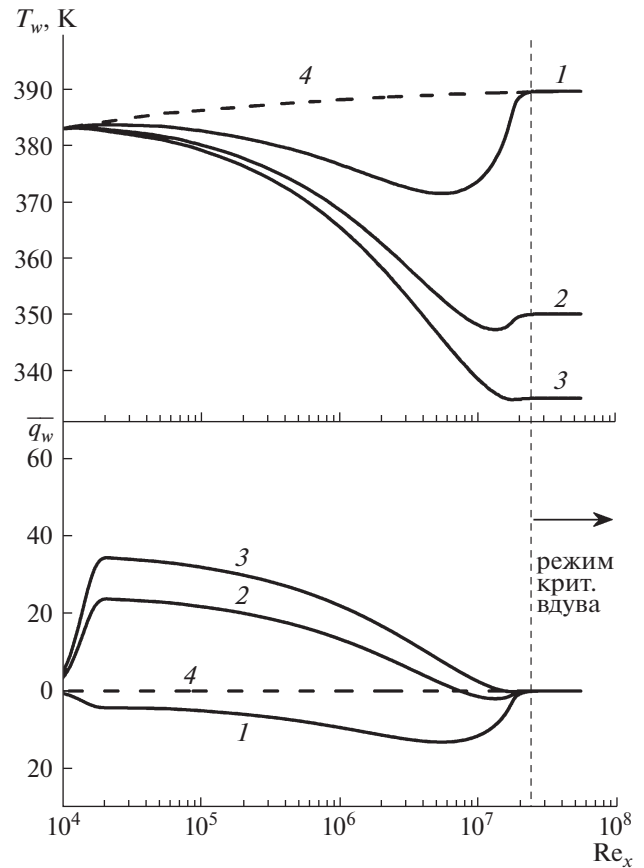
Ниже представлены результаты расчетов числа Прандтля  $Pr = 0.3$  при интенсивности вдува  $j_w = 0.0002$  и числе Маха  $M = 3.0$ .

На рис. 1 приведено изменение температуры стенки  $T_w$  по длине для ряда значений температуры вдуваемого газа  $T_j$ , которая варьировалась в диапазоне значений: от величины, равной температуре теплоизолированной (адиабатной) непроницаемой стенки  $T_{aw0}$  (линии 1), до критической температуры вдуваемого газа  $T_{wcr}$  (линии 3), в зависимости от температуры торможения набегающего потока  $T_e^*$ . Линия 2 –  $T_{int}$ , промежуточная температура вдуваемого газа  $T_{wcr} < T_{int} < T_{aw0}$ . В зависимости приведены для двух чисел Прандтля  $Pr = 0.7$  и  $Pr = 0.3$ .

На рис. 2 представлены зависимости температуры стенки  $T_w$  и безразмерного теплового потока в стенку  $\bar{q}_w$  по длине пластины  $Re_x$  для ряда значений температуры вдуваемого газа  $T_j$  для случая  $Pr = 0.3$ ,  $M = 3.0$ ,  $j_w = 0.0002$ ,  $T_e^* = 600$  К.



**Рис. 1.** Изменение по длине температуры стенки  $T_w$  при однородном вдуве газа для двух чисел Прандтля  $Pr = 0.7$  (а) и  $Pr = 0.3$  (б) ( $M = 3.0$ ,  $j_w = 0.0002$ ) и трех значений температур торможения  $T_e^*$  и вдуваемого газа  $T_j$  (см. табл. 1): 1 –  $T_j = T_{aw0}$ ; 2 –  $T_j = T_{int}$ ; 3 –  $T_j = T_{wcr}$ ; 4 –  $j_w = 0$ ,  $q_w = 0$ .



**Рис. 2.** Изменение по длине температуры стенки  $T_w$  и безразмерного теплового потока в стенку  $\bar{q}_w$  для ряда значений температуры вдуваемого газа ( $Pr = 0.3$ ,  $M = 3.0$ ,  $j_w = 0.0002$ ,  $T_e^* = 600$  К): 1 –  $T_j = T_{aw0} = 389$  К; 2 –  $T_j = T_{int} = 350$  К; 3 –  $T_j = T_{wcr} = 335$  К; 4 –  $j_w = 0$ ,  $q_w = 0$ .

В [15] была предложена критериальная зависимость  $K(Pr) \sim Pr^{-0.7}$  для нахождения критической температуры проницаемой стенки  $T_{wcr}$  при известных числах Маха, Прандтля и температурах торможения и термодинамической, и показано, что с точностью  $\pm 8\%$  зависимость  $K(Pr) \approx 1$  в диапазоне чисел Маха  $M = 3..5$ ,  $Pr = 0.1..1.0$ .

В данной работе эта зависимость уточнена с учетом влияния температуры торможения набегающего потока  $T_e^*$ . В табл. 1 приведены основные параметры расчета, которые показывают, что отношение величин  $T_e^*$ ,  $T_e$ ,  $T_{aw0}$ ,  $T_{wcr}$  остается постоянным, не зависящим от температуры торможения потока. На рис. 3 отложена зависимость вида  $\frac{T_{wcr} - T_e}{T_e^* - T_e}$  от числа Прандтля  $Pr$ . Уточненная

формула для критериальной зависимости  $K$  выглядит так:

$$K = \frac{T_{wcr} - T_e}{T_e^* - T_e} Pr^{-0.75}.$$

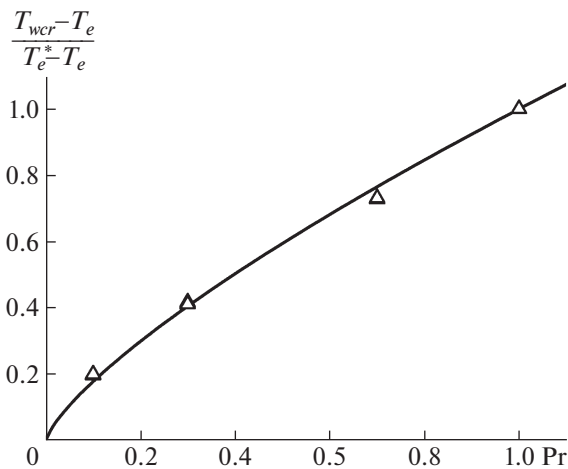
Проанализируем полученные результаты. Как видно из рис. 1, 2, при значениях температур вдуваемого газа  $T_j < T_{aw0}$  на проницаемой стенке образуется область, в которой температура проницаемой стенки меньше температуры вдуваемого газа  $T_w < T_j$ , при этом величина  $T_w$  проходит через минимум в данной области, и данный минимум с уменьшением температуры вдуваемого газа  $T_j$  смещается дальше по потоку в сторону сечения критического вдува, пока не совпадет с ним (линии 3  $T_j = T_{wcr}$ ). При этом тепловой поток в стенку  $\bar{q}_w$  меняет знак (рис. 2), а на стенке образуются два сечения, в которых выполняются условия

**Таблица 1.** Соотношение величин  $T_e^*$ ,  $T_e$ ,  $T_{aw0}$ ,  $T_{wcr}$  для ряда значений числа Pr

Pr	$T_e^*$ , К	$T_e$ , К	$T_{aw0}$ , К	$T_{wcr}$ , К	$T_{int}$ , К	$\frac{T_{wcr}}{T_{aw0}}$	$\frac{T_e^*}{T_{aw0}}$	$\frac{T_{wcr} - T_e}{T_e^* - T_e}$
0.1	400.0	100.0	188.0	159.0	170.0	0.8	2.5	0.2
	500.0	125.0	235.0	199.0	220.0	0.8	2.5	0.2
	600.0	150.0	281.0	240.0	260.0	0.8	2.5	0.2
0.3	400.0	100.0	260.0	224.0	250.0	0.9	1.8	0.4
	500.0	125.0	325.0	280.0	300.0	0.9	1.8	0.4
	600.0	150.0	389.0	335.0	350.0	0.9	1.8	0.4
0.7	400.0	100.0	348.0	319.0	330.0	0.9	1.3	0.7
	500.0	125.0	434.0	398.0	420.0	0.9	1.3	0.7
	600.0	150.0	520.0	479.0	500.0	0.9	1.3	0.7
1.0	400.0	100.0	400.0	400.0	—	1.0	1.0	1.0
	500.0	125.0	500.0	500.0	—	1.0	1.0	1.0
	600.0	150.0	600.0	600.0	—	1.0	1.0	1.0

адиабатности, и проникаемая стенка становится теплоизолированной ( $\bar{q}_w = 0$ ,  $T_w = T_j = T_{aw}$ , где  $T_{aw}$  — адиабатная температура проникаемой стенки).

Данный эффект наблюдается при однородном вдуве газа в сверхзвуковой поток для всех чисел Pr < 1, для которых всегда температура адиабатной непроницаемой стенки  $T_{aw0}$  ниже температуры торможения потока  $T_e^*$ . Чем ниже число Pr, тем сильнее наблюдаемый эффект и тем ниже критическая температура адиабатной проникаемой стенки  $T_{wcr}$  по отношению к  $T_{aw0}$  и  $T_e^*$  (см. табл. 1). Уменьшение числа Прандтля также сдвигает сечение критического вдува вниз по потоку в область более высоких чисел Рейнольдса  $Re_x$ .



**Рис. 3.** Уточнение критериальной зависимости  $K$ , полученной в [15]: треугольники — расчет, линия — аппроксимация полученных расчетных данных вида  $Pr^{0.75}$ .

Наличие двух сечений по длине проникаемой пластины, в которых выполняются условия адиабатности ( $\bar{q}_w = 0$ ,  $T_w = T_j = T_{aw}$ ), наблюдается только в диапазоне  $T_{wcr} < T_j < T_{aw0}$ . При  $T_j < T_{wcr}$  температура проникаемой стенки  $T_w$  монотонно убывает от значения адиабатной температуры непроницаемой стенки  $T_{aw0}$  до температуры вдуваемого газа  $T_j$  в критическом сечении, при значениях  $T_j > T_{aw0}$  — возрастает.

При значении Pr = 1 данный эффект не наблюдается. При Pr > 1 (в этом случае  $T_{aw0} > T_e^*$ ) наблюдается “перевернутый” эффект (см. [14]). Равенство температур  $T_w = T_j = T_{aw}$  ( $\bar{q}_w = 0$ ) наблюдается в диапазоне температур вдуваемого газа выше температуры адиабатной непроницаемой стенки  $T_j > T_{aw0}$ . С повышением температуры вдуваемого газа  $T_j$  размер области, в которой  $T_w > T_j$ , так же, как и для случая Pr < 1, уменьшается и смещается ближе к сечению критического вдува, пока не совпадет с ним.

Вдув инородного легкого газа в сверхзвуковой поток тяжелого (например, гелия или водорода) в поток аргона или ксенона), когда число Прандтля полученной вблизи стенки газовой смеси существенно меньше единицы Pr < 1 [7–9] и переменное по длине, рассмотрен в работе [16]. В этом случае снижение температуры стенки  $T_w$  по сравнению с температурой вдуваемого газа  $T_j$  как для ламинарного, так и, в меньшей степени, для турбулентного пограничного слоя еще сильнее, чем для случая однородного вдува газа с постоянным числом Прандтля.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00234).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neumann R.D., Freeman D.C.* // *J. of Spacecraft and Rockets*. 2012. V. 49. № 6. P. 1080–1087.
2. *Gomes A., Niehuis R.* // *Proc. of ASME Turbo Expo*. 2013. P. 1–8.
3. *Pohlhausen E.* // *ZAMM, Journal Applied Mathematics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1921. V. 1. P. 115–121.
4. *Eckert E.R.G.* // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 1986. V. 13. P. 127–143.
5. *Shirokow M.* // *Technical Physics of the USSR*. 1936. V. 3. № 12. P. 1020.
6. *Hartnett J.P.* *Handbook of heat transfer*. N.Y.: G-M, 1973. 940 p.
7. *El-Genk M.S., Tournier J.M.* // *Energy Convers. Manag.* 2008. V. 49. P. 1882–1891.
8. *Belcher J.R., Slaton W.V., Raspet R., Bass H.E., Lightfoot J.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. V. 105. P. 2677–2684.
9. *Киров В.С., Кожелупенко Ю.Д., Тетельбаум С.Д.* // *Инженерно-физический журнал*. 1974. Т. 26. № 2. С. 226–228.
10. *Александров А.А., Григорьев Б.А.* *Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара*. Справочник. М.: Издательство МЭИ, 1999. 168 с.
11. *Варафтик Н.Б.* *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей*. М.: Наука, 1972. 720 с.
12. *Bunker R.S.* // *J. Heat Transfer*. 2005. V. 127. P. 441–453.
13. *Леонтьев А.И., Луцик В.Г., Макарова М.С.* // *Теплофизика высоких температур*. 2017. Т. 55. №2. С. 255–261.
14. *Леонтьев А.И., Луцик В.Г., Макарова М.С.* // *ДАН*. 2018. Т. 482. № 1. С. 38–41.
15. *Leontiev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S.* // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2020. V. 147. № 118959. P. 1–7.
16. *Луцик В.Г., Макарова М.С.* // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2020. № 5. С. 61–64.

## INVESTIGATION OF COMPRESSIBLE LAMINAR BOUNDARY LAYER ON A PERMEABLE PLATE WITH UNIFORM INJECTION FOR PRANDTL GAS NUMBERS $Pr = 0.1..1.0$

Academician of the RAS A. I. Leontiev<sup>a,b</sup>, V. G. Lushchik<sup>a</sup>, and M. S. Makarova<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

A numerical study of a compressible laminar boundary layer on a permeable plate with uniform injection is carried out for the Prandtl numbers of the gas  $Pr = 0.1..1.0$ . Regimes are considered in which the temperature of the injected gas is lower than the temperature of the adiabatic impermeable wall. For a number of stagnation temperatures, the existence of a minimum in the temperature of the permeable wall was confirmed, with the value of the minimum being lower than the temperature of the injected gas. For the case when the minimum of the temperature of the permeable wall with a decrease in the temperature of the injected gas, moving closer to the critical injection section, and finally coincides with it, the critical temperature of the adiabatic permeable wall is introduced. The previously obtained criterion dependence on the Prandtl and Mach numbers and the stagnation temperature was refined, which makes it possible to estimate the temperature range of the injected gas at which a minimum of the temperature of the permeable wall is possible.

*Keywords:* adiabatic wall, critical injection, Prandtl number, laminar compressible boundary layer