ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2022, том 503, с. 23–27

ФИЗИКА

УДК 517.955.4+537.876.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНОВОДАХ

© 2022 г. Б. А. Пламеневский[1], А. С. Порецкий[1,*], О. В. Сарафанов[1]

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 11.10.2021 г.
Поступило 11.10.2021 г.
После доработки 11.10.2021 г.
Принято к публикации 29.11.2021 г.

Волновод занимает область $G \subset \mathbb{R}^3$ с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность и описывается нестационарной системой Максвелла с идеально проводящими краевыми условиями. Для соответствующей стационарной задачи со спектральным параметром определяются собственные функции непрерывного спектра и матрица рассеяния. Вычисляются волновые операторы, определяется оператор рассеяния, и описывается его связь с матрицей рассеяния. Доказательство основано на расширении системы Максвелла до уравнения вида $i\partial_t\Psi(x,t) = \mathcal{A}(x, D_x)\Psi(x,t)$ с эллиптическим оператором $\mathcal{A}(x, D_x)$. С этим уравнением связывается начально-краевая задача, для которой строится теория рассеяния. Из полученных результатов извлекаются сведения об исходной системе Максвелла.

Ключевые слова: волновод, система Максвелла, матрица рассеяния, волновые операторы, оператор рассеяния

DOI: 10.31857/S2686740022010138

ВОЛНОВОД И ОПЕРАТОРЫ

Пусть G – область в $\mathbb{R}^3$, совпадающая вне большого шара с объединением конечного числа попарно непересекающихся полуцилиндров $\Pi_+^q = \{(y,z)\colon y \in \Omega^q, z \in \mathbb{R}_+\}$, $q = 1,\ldots,\mathcal{T}$; граница ∂G гладкая. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} i\partial_t\psi^1(x,t) = i\varepsilon^{-1}(x)\operatorname{rot}\psi^2(x,t),\\ \operatorname{div}(\mu(x)\psi^2(x,t)) = 0,\\ i\partial_t\psi^2(x,t) = -i\mu^{-1}(x)\operatorname{rot}\psi^1(x,t),\\ \operatorname{div}(\varepsilon(x)\psi^1(x,t)) = 0, \quad x \in G, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} \psi^1_\tau(x,t) = 0, \quad (\mu(x)\psi^2(x,t))_\nu = 0,\\ x \in \partial G, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{2}$$

и начальными условиями

$$\psi^1(x,0) = \psi^1_0(x), \quad \psi^2(x,0) = \psi^2_0(x), \quad x \in G. \tag{3}$$

Здесь $\psi^1(x,t)$ и $\psi^2(x,t)$ – трехкомпонентные векторы, обозначающие электрическое и магнитное поля. При этом ψ^1_τ – касательная составляющая поля ψ^1 на ∂G, а $(\mu\psi^2)_\nu$ – нормальная составляющая поля $\mu\psi^2$. Предполагается, что матрицы $\varepsilon(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ размера 3×3 с элементами $\varepsilon_{j,l}(\cdot)$ $\mu_{j,l}(\cdot) \in C^1(\overline{G})$ являются положительно определенными, т.е. $\langle\varepsilon(x)\xi,\xi\rangle \geq c\langle\xi,\xi\rangle$ и $\langle\mu(x)\xi,\xi\rangle \geq c\langle\xi,\xi\rangle$ при всех $\xi \in \mathbb{C}^3$, где c – положительная постоянная, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$. Кроме того, при некотором $\delta > 0$ в каждом цилиндрическом выходе $G \cap \Pi_+^q$ выполняются условия стабилизации

$$\begin{gathered} \left|\varepsilon_{j,l}(y,z) - \varepsilon^q_{j,l}(y)\right| + \left|\nabla(\varepsilon_{j,l}(y,z) - \varepsilon^q_{j,l}(y))\right| = O(e^{-\delta z}),\\ |\mu_{j,l}(y,z) - \mu^q_{j,l}(y)| + |\nabla(\mu_{j,l}(y,z) - \mu^q_{j,l}(y))| = O(e^{-\delta z}),\\ z \to +\infty; \end{gathered} \tag{4}$$

здесь (y, z) – локальные координаты в $G \cap \Pi_+^q$.

Для того чтобы связать с задачей (1)–(3) самосопряженный оператор, нам понадобятся разложения Вейля пространства L_2 на “соленоидальное” (“бездивергентное”) и “градиентное” подпространства (см., например, [2])

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: poras1990@list.ru*

$$
\begin{aligned}
L_2(G,\mathbb{C}^3,\varepsilon) &= \mathcal{J}(\tau,\varepsilon)\oplus\mathcal{G}(\tau),\\
L_2(G,\mathbb{C}^3,\mu) &= \mathcal{J}(\nu,\mu)\oplus\mathcal{G}(\nu).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь $L_2(G,\mathbb{C}^3,\varepsilon)$ и $L_2(G,\mathbb{C}^3,\mu)$ – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\varepsilon\cdot,\cdot)$ и $(\mu\cdot,\cdot)$. “Градиентное” подпространство $\mathcal{G}(\tau)$ – замыкание в $L_2(G,\mathbb{C}^3,\varepsilon)$ линеала $\{\nabla p\colon p\in C_c^\infty(G)\}$. Наконец, “градиентное” подпространство $\mathcal{G}(\nu)$ определяется равенством

$$\mathcal{G}(\nu)=\{\nabla p : p\in H^1_{\mathrm{loc}}(G),\nabla p\in L_2(G)\}.$$

В пространстве $L_2(G,\mathbb{C}^6,\varpi) := L_2(G,\mathbb{C}^3,\varepsilon)\times\times L_2(G,\mathbb{C}^3,\mu)$ с весом $\varpi:=\operatorname{diag}(\varepsilon,\mu)$ выделим подпространство $\mathcal{H}:=\mathcal{J}(\tau,\varepsilon)\times\mathcal{J}(\nu,\mu)$. Оператор M в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{M}(x,D_x)=\begin{pmatrix}0 & i\varepsilon^{-1}(x)\mathrm{rot}\\ -i\mu^{-1}(x)\mathrm{rot} & 0\end{pmatrix}$$

на области определения

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}(M):=\{U=(u^1,u^2): u^1\in\mathcal{J}(\tau,\varepsilon),\\
\mathrm{rot}u^1\in L_2(G,\mathbb{C}^3),\mathrm{div}(\varepsilon u^1)\in L_2(G),u^1_\tau=0 \text{ на } \partial G,\\
u^2\in\mathcal{J}(\nu,\mu),\mathrm{rot}u^2\in L_2(G,\mathbb{C}^3),\\
\mathrm{div}(\mu u^2)\in L_2(G),(\mu u^2)_\nu=0 \text{ на } \partial G\},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

является самосопряженным и называется оператором Максвелла [2].

ТОЧЕЧНЫЙ И НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТРЫ

Число k – собственное значение, если существует ненулевое решение $U\in\mathcal{D}(M)$ уравнения $MU=kU$. Собственные значения оператора M имеют конечную кратность и могут сгущаться разве лишь на бесконечности. Говорят, что число k принадлежит непрерывному спектру, если образ оператора $M-kI$ не замкнут в $L_2(G,\mathbb{C}^6,\varpi)$. При $k\neq 0$ это происходит в том и только в том случае, если существует решение $U=(u^1,u^2)\notin L_2(G,\mathbb{C}^6,\varpi)$ задачи

$$
\begin{gathered}
i\varepsilon^{-1}(x)\mathrm{rot}u^2(x)-ku^1(x)=0,\quad \mathrm{div}(\mu(x)u^2(x))=0,\\
-i\mu^{-1}(x)\mathrm{rot}u^1(x)-ku^2(x)=0,\\
\mathrm{div}(\varepsilon(x)u^1(x))=0,\quad x\in G,\\
u^1_\tau(x)=0,\quad (\mu(x)u^2(x))_\nu=0,\quad x\in\partial G,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

причем $|U(x)|\le C(|x|+1)^N$, $N<\infty$; такое решение называется собственной функцией непрерывного спектра. Точка $k=0$ является особенной и здесь не обсуждается; счетное число точек не дает вклада в абсолютно непрерывную часть оператора и потому условие $k\neq 0$ не мешает построению теории рассеяния. При всех k, за исключением изолированных “пороговых” значений, собственные функции непрерывного спектра являются ограниченными. Пороги расположены симметрично относительно нуля и накапливаются только на ∞. Если все сечения Ω^q цилиндрических выходов – односвязные области, то непрерывный спектр оператора M – множество $(-\infty,-\tau_1]\cup[\tau_1,+\infty)$; здесь $\tau_1>0$ – наименьший положительный порог. Если хотя бы одно из сечений Ω^q неодносвязно, непрерывный спектр заполняет всю вещественную ось. Обозначим через $\mathcal{E}_c(k)$ линейную оболочку собственных функций непрерывного спектра, отвечающих числу k; $\dim\mathcal{E}_c(k)<\infty$ при всех k. Если k не является собственным числом, то $\varkappa(k):=\dim\mathcal{E}_c(k)$ называется кратностью непрерывного спектра в точке k. Если же k есть точка непрерывного спектра и собственное значение, то положим $\varkappa(k):=\dim\left(\mathcal{E}_c(k)/\mathcal{E}_p(k)\right)$, где $\mathcal{E}_c(k)/\mathcal{E}_p(k)$ – фактор-пространство, $\mathcal{E}_p(k)$ – подпространство собственных функций, отвечающих числу k. Функция $k\mapsto\varkappa(k)$ четная и кусочно постоянная с разрывами на порогах. Здесь и всюду далее предполагается, что число k отлично от порогов и нуля.

По определению $\mathcal{H}^p$ – замыкание линейной оболочки собственных функций оператора M, а $\mathcal{H}^c$ – ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ к $\mathcal{H}^p$. Пусть, кроме того, $X\mapsto E(X)$ обозначает спектральную меру оператора M. По определению $\mathcal{H}^{ac}$ состоит из таких элементов $f\in\mathcal{H}^c$, что функция $k\mapsto(E(-\infty,k)f,f)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Пространства $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{H}^c$ и $\mathcal{H}^{ac}$ являются подпространствами $\mathcal{H}$ и приводят оператор M.

ВОЛНЫ. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

В каждом цилиндре $\Pi^q=\Omega^q\times\mathbb{R}$, $q=1,\ldots,\mathcal{T}$, рассмотрим задачу вида (7) с заменой $\varepsilon_{j,l}(y,z)$ и $\mu_{j,l}(y,z)$ на $\varepsilon^q_{j,l}(y)$ и $\mu^q_{j,l}(y)$ из (4). Если искать решения этой модельной задачи в виде $(y,z)\mapsto\exp(i\lambda z)\varphi(y)$ с вещественными λ, то оказывается, что на интервале $k\in(\tau',\tau'')$ между соседними порогами τ',τ'' существует конечное число линейно независимых решений

$$U_j^\pm(y,z;k)=N_j^\pm(k)\exp(i\lambda_j^\pm(k)z)\varphi_j^\pm(y,k),\tag{8}$$

где $y \in \Omega^q$, $z \in \mathbb{R}$, а $j = 1,\dots,\kappa^q$. При этом функции $k \mapsto N_j^{\pm}(k), \lambda_j^{\pm}(k), \varphi_j^{\pm}(\cdot,k)$ являются вещественно-аналитическими на интервале $k \in (\tau',\tau'')$ и $\mp(\lambda_j^{\pm})'(k) > 0$. Поток энергии, переносимый волной U_j^+ (U_j^-) через сечение Ω^q в направлении оси z, отрицательный (положительный). Поэтому волна U_j^+ (U_j^-) называется приходящей из $+\infty$ (уходящей в $+\infty$). Число $N_j^{\pm}(k)$ выбирается так, чтобы плотность потока энергии, переносимой каждой волной, была равна единице.

Вернемся к задаче (7) в области G. На интервале (τ',τ'') между соседними порогами τ' и τ'' существует базис в пространстве собственных функций непрерывного спектра $\mathcal{E}_c(k)/\mathcal{E}_p(k)$, состоящий из вещественно-аналитических функций $k \mapsto Y_j^+(\cdot,k)$, $j = 1,\dots,\kappa$, с асимптотикой

$$Y_j^+(x,k) = U_j^+(x,k) + \sum_{l=1}^{\kappa} S_{jl}(k) U_l^-(x,k) + O(e^{-\alpha|x|}), \quad j = 1,\dots,\kappa, \tag{9}$$

при $|x| \to \infty$. Здесь $\alpha = \alpha(k) > 0$ – достаточно малое число, которое ограничивается скоростью стабилизации коэффициентов ($\alpha < \delta$ из (4)) и расстоянием от k до порога; на любом отрезке $[k',k''] \subset (\tau',\tau'')$ число α можно выбрать не зависящим от k. Через U_j^+ и U_j^- обозначены приходящие и уходящие волны, введенные в цилиндрах $\Pi^1,\dots,\Pi^{\mathcal{T}}$ и пронумерованные сквозным индексом $j = 1,\dots,\kappa$, $\kappa = \kappa^1 + \dots + \kappa^{\mathcal{T}}$. При этом считается, что каждая из этих волн дается выражением (8) в Π_+^q для некоторого q и равна нулю в Π_+^r при $r \neq q$. При переходе через порог набор волн и их нумерация меняются.

Матрица $S(k) = \|S_{jl}(k)\|$ является унитарной и называется матрицей рассеяния. Матрица-функция $k \mapsto S(k)$ определена на всем непрерывном спектре, за исключением порогов, и является вещественно-аналитической на каждом интервале между соседними порогами. Далее нам понадобится еще один базис в пространстве собственных функций непрерывного спектра $\mathcal{E}_c(k)/\mathcal{E}_p(k)$, заданный формулами

$$Y_j^-(\cdot,k) = \sum_{l=1}^{\kappa(k)} S_{jl}^*(k) Y_l^+(\cdot,k), \qquad j = 1,\dots,\kappa(k). \tag{10}$$

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА И СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА M

Обозначим через ρ_α гладкую положительную функцию в G, в каждом цилиндрическом выходе совпадающую с $e^{\alpha|x|}$, где α – число из (9), не зависящее от k. Введем пространство $L_{2,\alpha}(G,\mathbb{C}^6,\varpi) = \{f : \rho_\alpha f \in L_2(G,\mathbb{C}^6,\varpi)\}$ и положим $\mathcal{H}(\alpha) := \mathcal{H} \cap L_{2,\alpha}(G,\mathbb{C}^6,\varpi)$.

Л е м м а 1. *Пусть отрезок $[k',k''] \subset \sigma_c(M)$ свободен от порогов и нуля, $[k',k''] \supset X$ – произвольный интервал и $f,g \in \mathcal{H}(\alpha) \cap \mathcal{H}^c$. Тогда*

$$(E(X)f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_X \sum_{j=1}^{\kappa} (f,Y_j^+)(Y_j^+,g)\,dk$$

и мера $X \mapsto (E(X)f,g)$ абсолютно непрерывна.

С л е д с т в и е 1. *Пространства $\mathcal{H}^c$ и $\mathcal{H}^{ac}$ совпадают. Таким образом, абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(M)$ совпадает с непрерывным спектром $\sigma_c(M)$, а сингулярно непрерывного спектра нет.*

Пусть $\tau_1,\tau_2,\dots$ – последовательность положительных порогов, пронумерованных в порядке возрастания, тогда $\tau_{-j} := -\tau_j$ – отрицательные пороги; положим также $\tau_0 = 0$. Пусть еще κ_j – кратность непрерывного спектра на интервале (τ_j,τ_{j+1}), а $\{Y_l^+(\cdot,k)\}_{l=1}^{\kappa_j}$ и $\{Y_l^-(\cdot,k)\}_{l=1}^{\kappa_j}$ – базисы собственных функций непрерывного спектра на (τ_j,τ_{j+1}). Для $f \in \mathcal{H}(\alpha) \cap \mathcal{H}^{ac}$ и $k \in (\tau_j,\tau_{j+1})$, $j \in \mathbb{Z}$, введем вектор-столбцы

$$(\Phi^{\pm}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}((f,Y_1^{\pm}(\cdot,k)),\dots,(f,Y_{\kappa_j}^{\pm}(\cdot,k)))^t.$$

Функции $k \mapsto (\Phi^{\pm}f)(k)$ заданы на $\sigma_c(M)$, за исключением порогов. Из формул (10) вытекает, что $(\Phi^- f)(k) = S^t(k)(\Phi^+ f)(k)$. Пусть $\mathfrak{h}$ – пространство, элементами которого являются функции $\mathbb{R} \ni k \mapsto g(k) \in \mathbb{C}^{\kappa(k)}$, со скалярным произведением

$$(g,h)_{\mathfrak{h}} = \int_{\mathbb{R}} \langle g(k),h(k)\rangle_{\mathbb{C}^{\kappa(k)}}\,dk = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{l=1}^{\kappa_j} g_l(k)\overline{h_l(k)}\,dk.$$

Для любых $f,g \in \mathcal{H}(\alpha) \cap \mathcal{H}^{ac}$ справедлива формула $(\Phi^{\pm}f,\Phi^{\pm}g)_{\mathfrak{h}} = (f,g)_{\mathcal{H}}$. Поэтому отображения $\Phi^{\pm}$ продолжаются по непрерывности на $\mathcal{H}^{ac}$. Так как функции $Y_l^{\pm}$ ортогональны любой собственной функции, то $\Phi^{\pm}$ определены на $\mathcal{H}^p$ и $\Phi^{\pm}|_{\mathcal{H}^p} = 0$.

Лемма 2. *Справедливы соотношения* $(\Phi^{\pm})^*\Phi^{\pm} = P^{ac}$, $\Phi^{\pm}(\Phi^{\pm})^* = I$, $\Phi^{\pm}M = k\Phi^{\pm}$, *где* P^{ac} – *проектор на* $\mathcal{H}^{ac}$.

ВОЛНОВОЙ ОПЕРАТОР. ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ

Пусть $G_0^q \subset G \cap \Pi_+^q$ – область с гладкой границей, на достаточно большом расстоянии совпадающая с $G \cap \Pi_+^q$. Положим $G_0 := \cup_q G_0^q$. В области G_0 построим разложения Вейля вида (5) и определим соответствующее пространство $\mathcal{H}_0$. Через M_0 обозначим оператор в $\mathcal{H}_0$, заданный дифференциальным выражением $\mathcal{M}(x, D_x)$ на области определения $\mathcal{D}(M_0)$, которая получается из (6) заменой G на G_0, ниже M_0 играет роль невозмущенного оператора. Множества порогов, кратность непрерывного спектра и наборы приходящих и уходящих волн для волноводов G и G_0 совпадают. Собственные функции непрерывного спектра в волноводе G_0 обозначим через $Y_{0l}^{\pm}$, а соответствующие спектральные преобразования – через $\Phi_0^{\pm}$.

Пусть χ – срезка в G_0, равная единице при $|x| \geq t_0$ и нулю при $|x| \leq t_0 - 1$, где t_0 – достаточно большое положительное число. Оператор отождествления $\mathcal{X} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ действует как композиция оператора умножения на χ, оператора продолжения нулем на G и проектирования из $L_2(G, \mathbb{C}^6, \varpi)$ на $\mathcal{H}$. Волновые операторы $W^{\pm}$ определяются соотношением $W^{\pm}f := \lim_{t\to\pm\infty} e^{iMt}\mathcal{X}e^{-iM_0t}f$ для $f \in \mathcal{H}^{ac}(M_0)$.

Теорема 1. *Справедливы равенства* $W^{\pm}f = (\Phi^{\mp})^*\Phi_0^{\mp}f$.

Оператор рассеяния принимает вид

$$\mathbf{S} = (W^+)^*W^- = ((\Phi^-)^*\Phi_0^-)^*(\Phi^+)^*\Phi_0^+ = (\Phi_0^-)^*S^t\Phi_0^+;$$

здесь учтены соотношения $(\Phi^- f)(k) = S^t(k)(\Phi^+ f)(k)$ и $\Phi^+(\Phi^+)^* = I$. Из леммы 2 следует полнота волновых операторов и унитарность оператора рассеяния на $\mathcal{H}^{ac}(M_0)$.

Схема доказательства. Первым шагом является переход от переопределенной системы (1)–(3) к начально-краевой задаче для уравнения вида $i\partial_t\Psi(x,t) = \mathcal{A}(x, D_x)\Psi(x,t)$ с эллиптическим оператором $\mathcal{A}(x, D_x)$ (об эллиптическом расширении системы Максвелла см., например, [1, 2]). Для полученной задачи развивается схема построения теории рассеяния в волноводах, предложенная и обоснованная в [3] для уравнения шрёдингеровского типа. В частности, доказывается существование и полнота волновых операторов и эти операторы вычисляются в терминах собственных функций непрерывного спектра соответствующей стационарной задачи $\mathcal{A}(x, D_x)\mathcal{U}(x) = k\mathcal{U}(x)$.

Второй шаг состоит в возвращении к исходной задаче (1)–(3); при этом устанавливаются специальные свойства расширенной задачи, связанные с ее происхождением от системы Максвелла. В частности, собственные функции непрерывного спектра расширенной задачи разбиваются на три группы: первая группа отвечает нерасширенной системе Максвелла (7), а две другие возникают в результате процедуры расширения и связаны с задачами Дирихле и Неймана для уравнений акустики [4]. Эти сведения позволяют установить существование и полноту волновых операторов для задачи (1)–(3) и выразить их через собственные функции непрерывного спектра задачи (7).

Комментарий к списку литературы. Математическая теория рассеяния для уравнений шрёдингеровского типа в волноводах обсуждалась в [3]. Обзор результатов для электромагнитных волноводов, описываемых стационарной системой Максвелла, приводится в [4]. Математическая теория рассеяния для нестационарной системы Максвелла во всем пространстве представлена в [5] и [6].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 17-11-01126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Picard R.* On the low frequency asymptotics in electromagnetic theory // J. Reine Angew. Math. 1984. V. 354. P. 50–73.
2. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Самосопряженный оператор максвелла в произвольных областях // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 96–110.
3. *Пламеневский Б.А., Порецкий А.С., Сарафанов О.В.* Математическая теория рассеяния в квантовых волноводах // ДАН. 2019. Т. 489. № 2. С. 142–146.
4. *Пламеневский Б.А., Порецкий А.С.* Система Максвелла в волноводах с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность и неоднородным анизотропным заполнением // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. № 2. С. 89–126.
5. *Yafaev D.R.* Mathematical Scattering Theory, Analytic Theory. Providence: American Mathematical Society, Math. Surveys and Monographs. 2010. V. 158.
6. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.

MATHEMATICAL SCATTERING THEORY IN ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDES

B. A. Plamenevskii[a], A. S. Poretskii[a], and O. V. Sarafanov[a]

[a] *Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

The waveguide occupies a domain $G \subset \mathbb{R}^3$ having several cylindrical outlets to infinity and is described by the non-stationary Maxwell system with perfectly conductive boundary conditions. For the corresponding stationary problem with spectral parameter, the continuous spectrum eigenfunctions and the scattering matrix are defined. We calculate the wave operators, introduce the scattering operator and describe its connection with the scattering matrix. The proof is based on extending the Maxwell system to an equation of the form $i\partial_t\Psi(x,t) = \mathcal{A}(x, D_x)\Psi(x,t)$ with elliptic operator $\mathcal{A}(x, D_x)$. We associate to the equation an initial boundary value problem and develop the scattering theory for the problem. The information on the Maxwell system is derived from the results obtained for the extended problem.

Keywords: waveguide, Maxwell system, scattering matrix, wave operators, scattering operator