

УДК 517.977

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ ПОДВИЖНЫХ МАСС ДЛЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ТЕЛА

© 2022 г. Академик РАН Ф. Л. Черноушко<sup>1,\*</sup>

Поступило 14.12.2021 г.

После доработки 14.12.2021 г.

Принято к публикации 18.02.2022 г.

Предложен новый способ управления ориентацией твердого тела при помощи нескольких вспомогательных масс, движущихся относительно тела. Заданная переориентация достигается путем трех плоских поворотов, в каждом из которых движется одна масса. Алгоритм допускает значительную свободу размещения подвижных масс в теле.

*Ключевые слова:* динамика твердого тела, управление движением, ориентация

DOI: 10.31857/S268674002202002X

Подвижные массы, расположенные внутри твердого тела, могут использоваться для изменения его ориентации в пространстве. Плоские движения таких систем, управляемых при помощи вспомогательных внутренних масс, рассматривались в ряде работ в связи с управлением мобильными капсульными роботами [1–5]. Если мобильный робот с внутренними подвижными массами совершает быстрый поворот относительно центра масс, то в ряде случаев влиянием внешних сил и моментов за время поворота можно пренебречь и считать, что на систему не действуют внешние силы и моменты. Это происходит, если силы взаимодействия корпуса робота и подвижных внутренних масс значительно превосходят внешние силы. Такая ситуация может иметь место также для поворотов космических аппаратов и других подвижных объектов.

При отсутствии внешних сил уравнения движения системы значительно упрощаются, что дает возможность построить оптимальные алгоритмы поворота и в явном виде получить оптимальные траектории [6, 7]. В важном случае, когда внутренняя масса мала по сравнению с массой несущего тела [6], оптимальная траектория подвижной массы в случае плоского поворота оказывается дугой окружности. Алгоритм пространственной переориентации тела при помощи одной подвижной массы, предложенный в работе [8] на основе оптимальных плоских поворотов, предполагает движение этой массы в окрестности

центра масс несущего тела, что может быть неудобно по конструктивным соображениям. В работе [9] предложено использовать несколько подвижных масс для управления ориентацией тела. Показано, что при этом имеется большая свобода выбора областей, в которых движутся внутренние массы, но требуется синхронизация движений этих масс. В данной работе также используется несколько подвижных масс и сохраняется значительная свобода выбора по их размещению в теле. Однако предлагаемый ниже алгоритм переориентации не требует синхронизации движения, так как здесь всегда движется только одна из внутренних масс.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваемая механическая система состоит из твердого тела  $P$  массы  $M$  и  $n$  материальных точек  $Q_i$  массы  $m_i, i = 1, \dots, n$ . Точки  $Q_i$  могут двигаться относительно тела  $P$  под действием двигателей (актюаторов), взаимодействуя с телом  $P$ , но не с внешней средой. Внешние силы, действующие на систему, считаем пренебрежимо малыми. Обозначим через  $C$  центр масс тела  $P$ , а через  $O$  — центр масс всей системы. Предполагаем, что в начальный момент  $t = 0$  система покоится. Тогда ее центр масс  $O$  неподвижен и может быть принят в качестве начала координат неподвижной системы  $Ox_1x_2x_3$ . Введем также систему координат  $Sx_1x_2x_3$ , связанную с телом  $P$ , и обозначим через  $\mathbf{r}_i = CQ_i$  радиус-вектор подвижной точки  $Q_i$  в системе координат  $Sx_1x_2x_3$  (см. рис. 1).

Скорость точки  $Q_i$  относительно системы координат  $Sx_1x_2x_3$  будем обозначать через  $\dot{\mathbf{r}}_i$ . Тогда,

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: chern@ipmnet.ru

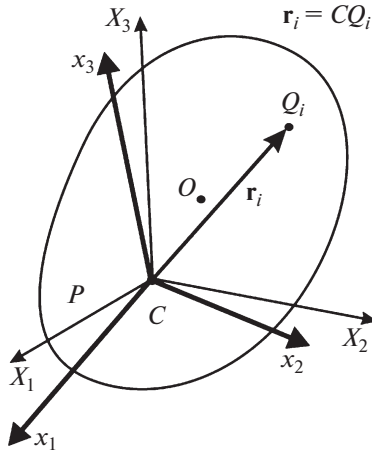


Рис. 1. Механическая система.

как показано в работе [9] на основе законов сохранения импульса и кинетического момента всей системы, справедливо следующее уравнение:

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - (M + m)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) \times \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) \right] + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость тела  $P$ ,  $\mathbf{J}$  – тензор инерции тела  $P$  относительно его центра масс  $C$  и введено обозначение

$$m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (2)$$

Уравнение (1) связывает угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  тела  $P$  с характеристиками движения точек  $Q_i$  относительно этого тела – их положениями  $\mathbf{r}_i$  и скоростями  $\dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Представим векторы  $\mathbf{r}_i(t)$  в виде

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i^0 + \boldsymbol{\rho}_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}_i^0$  – постоянные векторы, задающие положения точек  $Q_i$  в начальный момент  $t = 0$ :

$$\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(0), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

а векторы  $\boldsymbol{\rho}_i$  определяют смещения точек  $Q_i$  из начального состояния. Обозначим через  $Q^0$  материальные точки массы  $m_i$ , находящиеся постоянно в начальном состоянии, т.е. при  $\boldsymbol{\rho}_i = 0$ .

Наложим следующее условие на векторы  $\mathbf{r}_i^0$ :

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^0 = 0, \quad (5)$$

означающее, что центр масс совокупности всех точек  $Q_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , находится в центре масс  $C$  тела  $P$ . Эту совокупность обозначим через  $Q^0$ ; ее можно рассматривать как твердое тело массы  $m$ , определенной равенством (2), с центром масс в точке  $C$ .

Подставим соотношения (3) в уравнение (1) и преобразуем полученное уравнение, используя равенство (5). Получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - (M + m)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) \times \\ & \times \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \right] + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^0) + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i^0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \mathbf{r}_i^0 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^0)] + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Третье слагаемое в уравнении (6) представляет собой кинетический момент виртуального твердого тела  $Q^0$  относительно его центра масс  $C$  и может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i^0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^0) = \mathbf{J}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{J}^0$  – тензор инерции твердого тела  $Q^0$  относительно его центра масс  $C$ .

Обозначим через  $\mathbf{J}^*$  тензор инерции твердого тела  $P + Q^0$ , состоящего из тел  $P$  и  $Q^0$ , относительно их общего центра масс  $C$ :

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J} + \mathbf{J}^0. \quad (8)$$

Принимая во внимание уравнения (7) и (8), перепишем уравнение (6) в виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}^* \cdot \boldsymbol{\omega} - (M + m)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) \times \left[ \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i [2\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i^0 \boldsymbol{\rho}_i) - \boldsymbol{\rho}_i(\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i^0) - \mathbf{r}_i^0(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}_i) + \mathbf{r}_i^0 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i] + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

### ЗАДАЧА ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ

В начальный момент  $t = 0$  система, состоящая из тела  $P$  и материальных точек  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , находится в покое. Требуется, при помощи движений

точек  $Q_i$ , осуществить в некоторый (нефиксированный) момент времени  $T$  заданную конечную ориентацию тела  $P$  в пространстве. В этот момент  $T$  тело  $P$  и точки  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , должны находиться в состоянии покоя, причем все точки  $Q_i$  должны вернуться в начальное положение относительно тела  $P$ . Таким образом, должны быть выполнены краевые условия

$$\begin{aligned} \omega(0) = \omega(T) = 0, \quad \rho_i(0) = \rho_i(T) = 0, \\ \dot{\rho}_i(0) = \dot{\rho}_i(T) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Направим оси системы координат  $Sx_1x_2x_3$  вдоль главных центральных осей инерции твердого тела  $P + Q^0$ . Требуемая переориентация может быть осуществлена путем трех последовательных плоских поворотов тела вокруг осей  $Sx_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Обозначим через  $e_i$  орты этих осей. Потребуем, чтобы для каждого из этих поворотов выполнялись краевые условия (10). Тогда все повороты можно рассматривать аналогичным образом. Для определенности рассмотрим поворот вокруг оси  $Sx_3$ .

### ПЛОСКИЙ ПОВОРОТ

В работе [9] предлагается выбирать векторы  $\rho_i$  в (3) одинаковыми и полагать  $\rho_i(t) = \rho(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . При этом имеется большая свобода в размещении подвижных точек  $Q_i$  внутри тела  $P$ , однако, ввиду равенств  $\rho_i(t) = \rho(t)$ , необходимо осуществить синхронизацию движений этих точек.

Рассмотрим здесь другую возможность, при которой только одна из масс  $Q_i$  всегда находится в движении. Положим

$$\rho_k(t) \neq 0, \quad \rho_i(t) = 0, \quad i \neq k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Подставляя соотношения (11) в уравнение (9), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* \cdot \omega - (M + m)^{-1} m_k^2 \rho_k \times (\omega \times \rho_k + \dot{\rho}_k) + \\ + m_k [2\omega(\mathbf{r}_k^0 \rho_k) - \rho_k(\omega \mathbf{r}_k^0) - \mathbf{r}_k^0(\omega \rho_k) + \mathbf{r}_k^0 \times \dot{\rho}_k] + \\ + m_k \rho_k \times (\omega \times \rho_k + \dot{\rho}_k) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассматривая плоский поворот вокруг оси  $Sx_3$ , положим, что точка  $Q_k^0$  лежит в плоскости  $Sx_1x_2$ . Тогда вектор  $\mathbf{r}_k^0$  можно представить в виде

$$\mathbf{r}_k^0 = r_k^0 (\cos \beta_k \mathbf{e}_1 + \sin \beta_k \mathbf{e}_2), \quad (13)$$

где  $r_k^0$  — длина вектора, а  $\beta_k$  — угол его ориентации в плоскости  $Sx_1x_2$ .

Как показано в [6], оптимальными по быстродействию траекториями подвижной массы в важном случае, когда эта масса мала по сравнению с массой тела, являются дуги окружностей. Соглас-

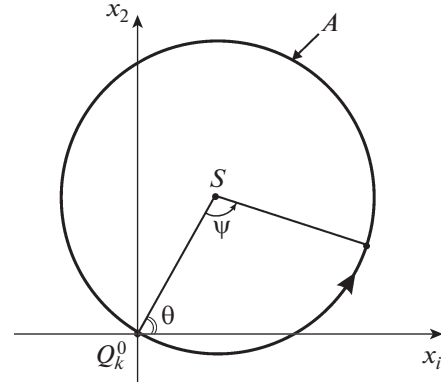


Рис. 2. Плоский поворот.

но краевым условиям (10), следует выбрать траекторию вектора  $\rho_k(t)$  в виде замкнутой окружности  $A$  радиуса  $a$ , проходящей через точку  $Q_k^0$  в плоскости  $Sx_1x_2$  (рис. 2).

Определим координаты центра  $S$  окружности  $A$  формулами

$$x_1^S = a \cos \theta, \quad x_2^S = a \sin \theta, \quad x_3^S = 0. \quad (14)$$

Здесь  $a$  и  $\theta$  — произвольные постоянные. Движение вектора  $\rho_k$  по окружности  $A$  зададим в виде

$$\begin{aligned} \rho_k = a [\cos \theta - \cos(\theta + \psi)] \mathbf{e}_1 + \\ + a [\sin \theta - \sin(\theta + \psi)] \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\psi$  — угол, определяющий положение конца вектора  $\rho_k$  на окружности  $A$  (рис. 2). Дифференцируя равенство (15), получим

$$\dot{\rho}_k = a \dot{\psi} [\sin(\theta + \psi) \mathbf{e}_1 - \cos(\theta + \psi) \mathbf{e}_2]. \quad (16)$$

При плоском вращении тела  $P + Q^0$  вокруг оси  $Sx_3$ , которая является главной центральной осью этого тела, имеем

$$\omega = \omega \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{J}^* \cdot \omega = I \omega \mathbf{e}_3, \quad \omega = \dot{\phi}, \quad (17)$$

где  $I$  — момент инерции тела  $P + Q^0$  вокруг оси  $Sx_3$ ,  $\phi$  — угол поворота этого тела.

Подставим векторы  $\mathbf{r}_k^0$ ,  $\rho_k$  и  $\dot{\rho}_k$  из соотношений (13), (15), (16) в уравнение (12). Заметим, что справедливы равенства  $\omega \mathbf{r}_k^0 = \omega \rho_k = 0$  и все векторы в уравнении (12) коллинеарны  $\mathbf{e}_3$ . Поэтому данное уравнение сводится к скалярному уравнению

$$\begin{aligned} I \dot{\phi} + m_k \left(1 - \frac{m_k}{M + m}\right) a^2 (2\dot{\phi} + \dot{\psi})(1 - \cos \psi) + \\ + 2m_k a r_k^0 \dot{\phi} [\cos(\theta - \beta_k) - \cos(\theta + \psi - \beta_k)] - \\ - m_k a r_k^0 \dot{\psi} \cos(\theta + \psi - \beta_k) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Угол  $\theta$ , определяющий согласно (14) положение окружности  $A$  (см. рис. 2), произволен, и можно принять  $\theta = \beta_k$ . Тогда уравнение (18) можно записать в виде

$$I\dot{\varphi} + m_k v a^2 (2\dot{\varphi} + \dot{\psi})(1 - \cos \psi) + m_k a r_k^0 [2\dot{\varphi}(1 - \cos \psi) - \dot{\psi} \cos \psi] = 0, \quad (19)$$

где введено обозначение

$$v = \frac{M + m - m_k}{M + m}. \quad (20)$$

Из уравнения (19) следует, что углы  $\varphi$  и  $\psi$  связаны друг с другом, и эта связь не зависит от закона изменения  $\psi(t)$ . Интегрируя уравнение (19) при начальных условиях

$$\psi(0) = \varphi(0) = 0, \quad (21)$$

вытекающих из условий (10), получим

$$\varphi(t) = \frac{q}{D} \operatorname{Arctg}(D \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}) - \frac{\psi}{2}, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$q = 1 + 2m_k r_k^0 a I^{-1}, \quad D = \sqrt{1 + 4m_k a (r_k^0 + va) I^{-1}}. \quad (23)$$

Когда конец вектора  $\mathbf{p}_k$  движется по замкнутой окружности  $A$ , угол  $\psi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . На интервалах  $\psi \in (0, \pi)$  и  $\psi \in (\pi, 2\pi)$  функция  $\operatorname{tg}(\psi/2)$  изменяется, соответственно, сначала от 0 до  $\pm\infty$ , а затем от  $-\infty$  до 0. При этом  $\operatorname{Arctg}$  в (22) монотонно возрастает от 0 до  $\pi$ , так что при  $\psi = 2\pi$  угол  $\varphi$ , согласно (22), получает приращение

$$\Delta\varphi = \pi \left( \frac{q}{D} - 1 \right). \quad (24)$$

Здесь константы  $q$  и  $D$  определены равенствами (23).

Естественно предполагать, что масса тела  $P$  значительно больше, чем масса  $m_k$  точки  $Q_k$ , и  $m_k (r_k^0)^2 \ll I$ . Тогда, как следует из формул (23), имеем  $q < D$ , и, согласно (24),  $\Delta\varphi < 0$ . Таким образом, тело  $P$  вращается вокруг оси  $Sx_3$  в направлении, противоположном вращению вектора  $\mathbf{p}_k$ , которое выбрано положительным на рис. 2.

Вектор  $\mathbf{p}_k$  может совершить несколько оборотов по окружности  $A$ . При  $N$  оборотах полный угол поворота тела  $P$ , согласно (24), составит

$$|\Delta\varphi| = \frac{N\pi(D - q)}{D}. \quad (25)$$

Константы  $D$  и  $q$ , входящие в правую часть равенства (25), зависят от радиуса  $a$  окружности  $A$ . Представляет интерес случай малых радиусов, в котором движение точки  $Q_k$  происходит в ограниченной области внутри тела  $P$ . Правая часть ра-

венства (25) монотонно зависит от радиуса  $a$  и убывает с уменьшением  $a$ . На основе равенств (23) получим оценку:

$$|\Delta\varphi| \sim 2N\pi v m_k a^2 I^{-1} \quad \text{при } a \rightarrow 0. \quad (26)$$

Следовательно, поворот тела  $P$  на заданный угол  $\Delta\varphi$ , при фиксированных массах и моментах инерции, можно осуществить при малом радиусе  $a$  за счет увеличения числа оборотов  $N$ , причем справедливо соотношение

$$a \sim \sqrt{\frac{|\Delta\varphi| I}{2\pi v m_k N}}.$$

Для осуществления пространственной переориентации плоские повороты вокруг осей  $Sx_1$  и  $Sx_2$  осуществляются аналогично повороту вокруг оси  $Sx_3$ . Для этого две другие подвижные массы должны выполнять плоские повороты в двух других плоскостях, перпендикулярных осям  $Sx_1$  и  $Sx_2$  и проходящим, как и плоскость  $Sx_1x_2$ , через центр масс  $S$  тела  $P$ . Заметим, что оси плоских поворотов являются главными центральными осями тела  $P + Q^0$  и, вообще говоря, отличаются от главных центральных осей тела  $P$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ

Предложенный алгоритм переориентации предполагает поочередное движение трех подвижных масс  $Q_i$  по окружностям в трех плоскостях. Радиусы этих окружностей и число оборотов по ним могут быть различными. Векторы  $\mathbf{r}_i^0$  начальных положений точек  $Q_i$  должны удовлетворять условию (5). В случае трех подвижных масс ( $n = 3$ ) это условие означает, что точки  $Q_i^0$  лежат в одной плоскости, проходящей через центр масс  $S$ . Данное условие представляет собой некоторое ограничение, которое может оказаться неудобным с точки зрения конструкции системы управления. Представляется целесообразным введение еще одной вспомогательной массы, которая остается неподвижной. В случае  $n = 4$  условие (5) означает, что центр масс  $S$  лежит внутри тетраэдра с вершинами в точках  $Q_i^0$ . Это условие менее ограничительно и позволяет разместить точки  $Q_i^0$  на значительном удалении от центра масс  $S$  тела  $P$ . Что касается четвертой (неподвижной) массы, то она может быть использована для размещения полезного груза.

Главное допущение, сделанное в работе, состоит в отсутствии внешних сил. Оно с хорошей точностью выполняется в случае быстрых поворотов тела, когда силы его взаимодействия с внутренними массами значительно превышают внешние силы, для космических аппаратов и некоторых других подвижных объектов. Оценки влияния

внешних сил в случае быстрой переориентации приведены в работе [9].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый алгоритм переориентации твердого тела при помощи нескольких (четырёх) вспомогательных подвижных масс. Переориентация осуществляется посредством трех последовательных плоских поворотов тела вокруг главных центральных осей инерции виртуального твердого тела  $P + Q^0$ . Вспомогательные массы совершают плоские круговые движения в нескольких областях, расположение которых может быть достаточно свободно выбрано относительно тела. Радиусы этих движений и размеры областей могут быть взяты достаточно малыми за счет увеличения числа оборотов. Предложенный алгоритм может представлять интерес для мобильных роботов, космических аппаратов и других подвижных объектов.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00307.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huda M.N., Yu H. Trajectory tracking control of an underactuated capsbot // *Autonomous Robots*. 2015. V. 39. № 2. P. 183–198.
2. Huda M.N., Yu H., Cang S. Behavior-based control approach for the trajectory tracking of an underactuated planar capsule robot // *IET Control Theory and Applications*. 2015. V. 9. P. 163–175.
3. Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M. Experimental verification of the vibro-impact capsule model // *Nonlinear Dynamics*. 2016. V. 83. P. 1029–1041.
4. Zhan X., Xu J., Fang H. A vibration-driven planar locomotion robot – Shell // *Robotica*. 2018. V. 36. № 9. P. 1402–1420.
5. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 98. № 4. P. 2651–2669.
6. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы // *ДАН*. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
7. Шматков А.М. Осуществление заданного движения твердого тела относительно своего центра масс перемещением материальной точки // *ДАН*. 2019. Т. 489. № 2. С. 147–151.
8. Chernousko F.L. Two- and three-dimensional motions of a body controlled by an internal movable mass // *Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 99. № 1. P. 793–802.
9. Chernousko F.L. Reorientation of a rigid body by means of internal masses // *Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 102. P. 1209–1214.

## USE OF SEVERAL MOVABLE MASSES FOR THE BODY REORIENTATION

Academician of the RAS F. L. Chernousko<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

New method is proposed for the control of the orientation of a rigid body by means of several auxiliary masses moving relative to the body. The prescribed reorientation is achieved by means of three plane rotations with only one mass moving in each of them. The algorithm permits a considerable freedom in the placement of movable masses inside the body.

*Keywords:* dynamics of rigid body, control of motion, orientation