

УДК 532.59

КООРДИНАТЫ ВОЛНОВОГО АТТРАКТОРА В ТРАПЕЦИЕВИДНОМ ВОДНОМ БАССЕЙНЕ СО СТРАТИФИКАЦИЕЙ

© 2022 г. А. Г. Петров^{1,*}

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 22.10.2021 г.

Поступило 22.10.2021 г.

После доработки 13.12.2021 г.

Принято к публикации 16.12.2021 г.

Рассматриваются волны в непрерывно стратифицированной жидкости, возбуждаемые в трапециевидном бассейне. Энергия волн распространяется по прямым линиям – лучам, образующим фиксированный угол с вертикалью θ . На основе лучевой модели методом отражений аналитически найдены координаты волнового аттрактора, который возникает в процессе отражений от стенок бассейна. Результаты сравниваются с лабораторными и численными экспериментами. Исследована сходимость к аттрактору. На основе аналитических выражений определены необходимые и достаточные условия для существования волнового аттрактора с одним отражением от каждой стороны.

Ключевые слова: внутренние волны, волновой аттрактор, трапециевидный бассейн

DOI: 10.31857/S2686740022020092

Градиент плотности в жидкости в основном определяется ее температурой и растворенными солями. Несжимаемая жидкость находится в устойчивом статическом равновесии с плотностью, линейно растущей в направлении силы тяжести. Регулярные возмущения этого статического равновесия с некоторой частотой ω приводят к внутренним гравитационным волнам, энергия которых распространяется по прямым линиям – лучам, образующим фиксированный угол с вертикалью $\theta = \arccos(\omega/N)$, где N – частота Брента–Вэйсяля. При отражении от стенки направление луча меняется так, что его угол с вертикалью θ меняет знак, а абсолютная величина угла θ сохраняется. Таким образом, для простейшего исследования внутренних волн можно использовать лучевую модель. Существуют лабораторные и численные эксперименты, в которых волновой луч отражается от стенок бассейна, имеющего форму трапеции [1, 2]. В таком бассейне луч, последовательно отражаясь от стенок, принимает предельную устойчивую форму параллелограмма – волновой аттрактор [1–5]. Было показано, что идеальная форма аттрактора наблюдается лишь при тщательном подобранном параметрах эксперимента и малой амплитуде воздействия [3–5]. При увеличении амплитуды возникает турбулентность, од-

нако фильтрация по частоте внешнего воздействия показала, что теоретический аттрактор по лучевой теории является областью накачки кинетической энергии в систему [4, 5] и изучение лучевой аккумуляции волновой энергии является актуальным. Диагонали трапеции являются предельным случаем существования аттрактора, на которых аттрактор вырождается в линию. В дальнейших работах [6] при изучении аттракторов (1,1) использовались аналитические выражения для границ диапазона их существования, которые были найдены исходя из диапазона углов между диагоналями трапеции.

Данное исследование посвящено аналитическому выводу координат вершин аттрактора при заданных сторонах трапеции и угла θ , условиям сходимости, а также вывода необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять длины сторон трапеции, в которой образуются волновые аттракторы с одним отражением от каждой стороны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бассейн в форме трапеции $ABCD$. Сторона AD направлена по вертикали, стороны AB и DC по горизонтали, их длины $AD = a$, $AB = b_1$, $DC = b_2$. В декартовых осях X, Y вершины трапеции задаются координатами (рис. 1а)

$$A(0, a), \quad B(b_1, a), \quad C(b_2, 0), \quad D(0, 0). \quad (1)$$

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrovipmech@gmail.com

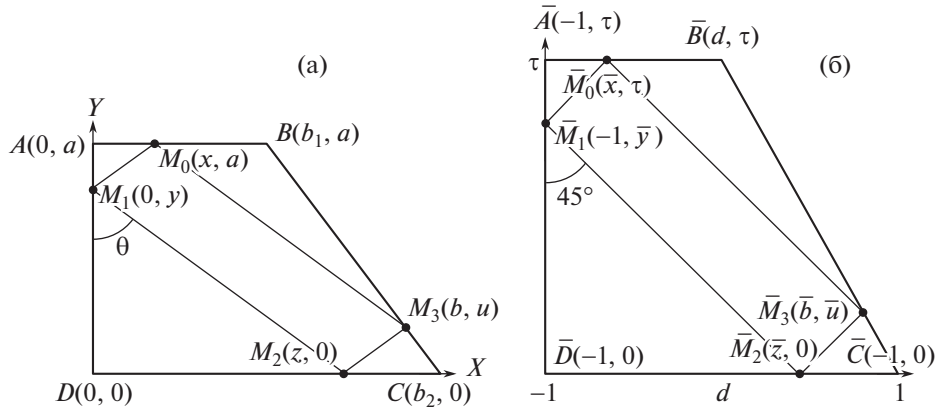


Рис. 1. Координаты аттрактора.

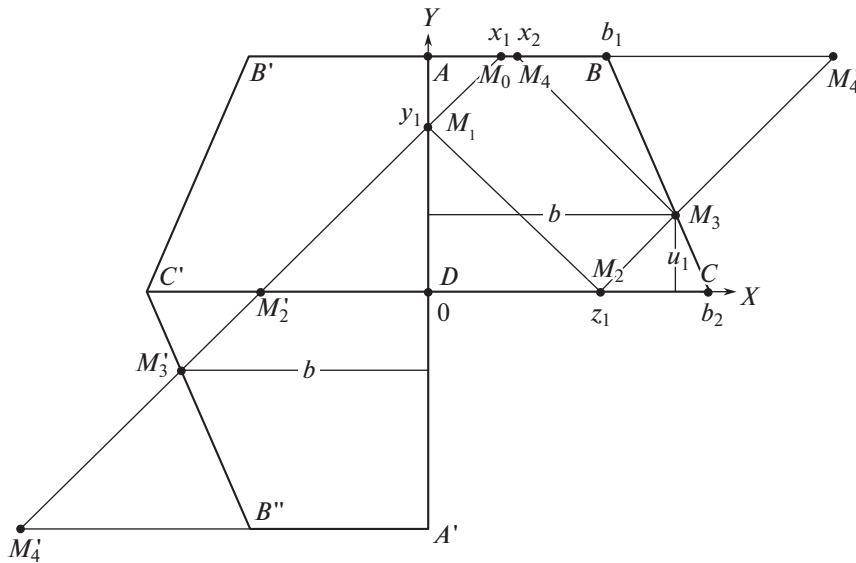


Рис. 2. Траектория луча и схема решения.

Без ограничения общности можно считать, что $b_1 < b_2$, так как если $b_1 > b_2$, то, сделав переобозначение $b_1 \rightarrow b_2$ и $b_2 \rightarrow b_1$, приходим к тому же неравенству.

Траектория луча с вершинами M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 , лежащих на сторонах трапеции (рис. 2), состоит из четырех отрезков. Каждый отрезок траектории наклонен к вертикали под одним и тем же углом θ . Координаты начальной точки луча заданы $M_0(x_1, a)$.

Решаются следующие задачи:

1. Определить координаты точек траектории луча M_1, M_2, M_3, M_4 .

2. Определить координаты аттрактора: траектории луча у которого начальная точка M_0 совпадает с конечной M_4 (рис. 1а).

3. Исследовать устойчивость аттрактора, т.е. найти такие длины сторон трапеции $ABCD$, при которых при небольшом отклонении начальной точки от точки M_0 аттрактора, после каждого последующих отражений от стенок трапеции луч приближался к предельной траектории аттрактора.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Координаты вершин аттрактора $M_0(x, a), M_1(0, y), M_2(z, 0), M_3(b, u)$ в трапеции-

видном бассейне со сторонами $a, b_1, b_2, b_1 < b_2$ определяются формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{atg\theta(b_2 - atg\theta)}{b_2 - b_1}, & y &= a \frac{b_1 - atg\theta}{b_1 - b_2}, \\ z &= atg\theta \frac{b_1 - atg\theta}{b_1 - b_2}, & (2) \\ u &= a \frac{-b_2 + atg\theta}{b_1 - b_2}, & b &= atg\theta. \end{aligned}$$

Условия $0 < x < b_1, 0 < y < a, 0 < z < b_2, 0 < u < a$ накладывают ограничения на стороны трапеции a, b_1, b_2 и $tg\theta$.

Теорема 2. Для того чтобы существовал аттрактор в трапеции $ABCD$, изображенной на рис. 1а, луч которого отражается от каждой стороны трапеции по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\begin{aligned} 1 + |d| < \tau < 2, \\ d = \frac{2b_1}{b_2} - 1, & \quad \tau = \frac{2atg\theta}{b_2}. \end{aligned}$$

Теорема 3. При последовательном отражении луча от стенок бассейна на верхней стороне образуется последовательность точек $M_0(x_1, a), M_4(x_2, a), M_8(x_3, a), \dots$, где x_n — геометрическая прогрессия:

$$\begin{aligned} x_n &= x + (x_1 - x)q^{n-1}, \\ q &= \frac{tg\theta - tg\alpha}{tg\theta + tg\alpha}, & tg\alpha &= \frac{b_2 - b_1}{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Построим трапецию $AB'C'D$, симметричную исходной трапеции $ABCD$ относительно оси Y и трапецию $A'B''C'D$, которая получается поворотом трапеции $ABCD$ на 180° относительно начала координат D (симметрия относительно центра D) (см. рис. 1). Пусть луч в точках отражения от сторон исходной трапеции имеет координаты

$$M_0(x_1, a), M_1(0, y_1), M_2(z_1, 0), M_3(b, u_1), M_4(x_2, a). \quad (4)$$

При этом отрезок луча на исходной трапеции M_1M_2 перейдет в отрезок $M_1M'_2$ на зеркально отраженной трапеции $AB'C'D$. Следующий отрезок луча M_2M_3 перейдет в отрезок $M'_2M'_3$ на симметричной относительно центра D трапеции $AB''C'D$ и последний отрезок луча M_3M_4 перейдет в $M'_3M'_4$ — продолжение отрезка $M'_2M'_3$. Все отрезки $M_0M_1M'_2M'_3M'_4$ образуют прямую линию, наклоненную к вертикали под углом θ . Выпишем координаты точек луча этой прямой, состоящей из отраженных точек (4):

$$M_0(x_1, a), \quad M_1(0, y_1), \quad M'_2(-z_1, 0),$$

$$M'_3(-b, -u_1), \quad M'_4(x_2 - 2b, -a)$$

и условие принадлежности этих точек одной прямой:

$$tg\theta = \frac{x_1 - 0}{a - y_1} = \frac{x_1 + z_1}{a} = \frac{x_1 + b}{a + u_1} = \frac{x_1 - x_2 + 2b}{2a}. \quad (5)$$

Добавим к этой системе уравнений соотношение для b

$$\frac{b_2 - b}{u_1} = \frac{b_2 - b_1}{a}. \quad (6)$$

Разрешая систему уравнений (5), (6) относительно y_1, z_1, u_1, x_2, b , получим

$$\begin{aligned} y_1 &= a - \frac{x_1}{tg\theta}, & z_1 &= atg\theta - x_1, \\ u_1 &= a \frac{b_2 + x_1 - atg\theta}{b_2 - b_1 + atg\theta}, & (7) \\ x_2 &= 2atg\theta \frac{b_2 + x_1 - atg\theta}{b_2 - b_1 + atg\theta}, \\ b &= \frac{a(2b_2 - b_1)tg\theta - (b_2 - b_1)x_1}{b_2 - b_1 + atg\theta}. \end{aligned}$$

Отсюда из условия $x_1 = x_2 = x$ и, полагая $y = y_1, z = z_1, u = u_1$, получим координаты точек аттрактора (2). Теорема 1 доказана.

Теорема 3 доказывается с помощью равенства

$$\frac{x_2 - x}{x_1 - x} = \frac{tg\theta - tg\alpha}{tg\theta + tg\alpha},$$

которое получается подстановкой в левую часть формулы (7) для x_2 и формулы (2) для x .

Из теоремы 2 вытекает

С л е д с т в и е. Если луч в трапециевидной области распространяется против часовой стрелки, при $b_2 > b_1, tg\theta > tg\alpha$, то луч фокусируется в аттрактор. Если при тех же условиях распространяется против часовой стрелки, то происходит разфокусировка.

Иными словами, при $b_2 > b_1, tg\theta > tg\alpha$ аттрактор, образованный распространением луча против часовой стрелки, устойчив, а в противном случае неустойчив.

П р и м е р ы. В работе [7] приведена фотография наблюдаемого в лабораторном эксперименте волнового аттрактора. Вершины трапециевидного бассейна имеют координаты (рис. 3 а)

$$A(0, 7), B(9, 7), C(12.5, 0), D(0, 0).$$

Отсюда находим стороны трапеции: $a = 7, b_1 = 9, b_2 = 12.5$. Можно оценить $tg\theta = 1.5$.

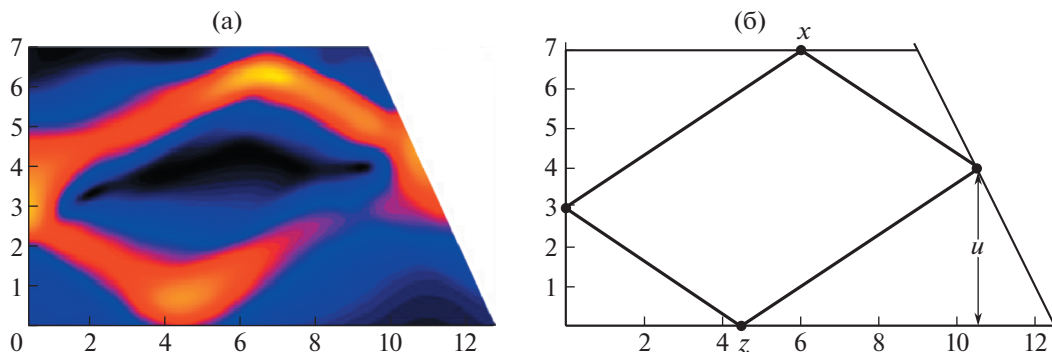


Рис. 3. Волновые аттракторы: а – наблюдаемый в лабораторном эксперименте [8], б – рассчитанный по формулам (1).

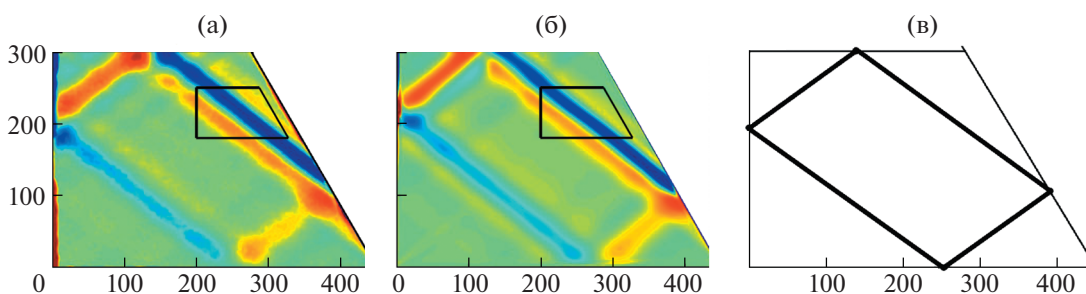


Рис. 4. Волновые аттракторы: а – наблюдаемый в лабораторном эксперименте; б – полученный с помощью численного моделирования [4]; в – рассчитанный по формулам (1).

Подставляя эти значения в формулы (2), находим

$$x = 6, \quad y = 3, \quad z = 4.5, \quad u = 4, \quad b = 10.5.$$

Вершины аттрактора имеют координаты $M_0(x, 7)$, $M_1(0, y)$, $M_2(z, 0)$, $M_3(b, u)$. Подставляя найденные значения (3), получим

$$M_0(6, 7), \quad M_1(0, 3), \quad M_2(4.5, 0), \quad M_3(10.5, 4).$$

Эти точки образуют волновой аттрактор, изображенный на рис. 3б. Форма аттрактора, полученного теоретически и изображенного на рис. 3б, согласуется с наблюдаемым в эксперименте (рис. 3а).

На рис. 4а и 4б изображены фотографии наблюдаемого в лабораторном эксперименте волнового аттрактора и результат численного моделирования соответствующих уравнений гидродинамики соответственно [4]. Стороны трапеции имеют значения: $a = 300$, $b_1 = 280$, $b_2 = 450$. Можно оценить $\text{tg}\theta = 1.3$. По формулам (2), находим

$$x = 138, \quad y = 194, \quad z = 252, \\ u = 106, \quad b = 390.$$

По этим координатам строится аттрактор, воспроизведенный на рис. 4в. Он также совпадает с наблюдаемым в эксперименте.

4. КООРДИНАТЫ АТТРАКТОРА НА (d, τ) -ПЛОСКОСТИ

Приведем исследование аттракторов на (d, τ) -плоскости, введенной в [1]. Заметим, что равенство углов луча относительно вертикали сохраняется при растяжении плоскости относительно горизонтальной оси или относительно вертикальной оси. Поэтому преобразование

$$\bar{x} = \frac{2x}{b_2} - 1, \quad \bar{y} = \frac{y\tau}{a}, \tag{8}$$

переводит вершины трапеции $A(0, a)$, $B(b_1, a)$, $C(b_2, 0)$, $D(0, 0a)$ на плоскости x, y в вершины трапеции $\bar{A}(-1, \tau)$, $\bar{B}(1, \tau)$, $\bar{C}(d, 0)$, $\bar{D}(-1, 0)$ на плоскости \bar{x}, \bar{y} . Координаты вершин аттрактора $M_0(x, a)$, $M_1(0, y)$, $M_2(z, 0)$, $M_3(b, u)$ в исходной трапеции $ABCD$ преобразуются в вершины $\bar{M}_0(\bar{x}, \tau)$, $\bar{M}_1(-1, \bar{y})$, $\bar{M}_2(\bar{z}, 0)$, $\bar{M}_3(\bar{b}, \bar{u})$ на преобразованной трапеции $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. Формулам координат аттрактора (2) соответствуют координаты преобразованного аттрактора

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(-2 + \tau)\tau}{-1 + d} - 1, & \bar{y} &= \frac{(1 + d - \tau)\tau}{-1 + d}, \\ \bar{z} &= \frac{(1 + d - \tau)\tau}{-1 + d} - 1, & & (9) \\ \bar{u} &= \frac{(-2 + \tau)\tau}{-1 + d}, & \bar{b} &= \tau - 1. \end{aligned}$$

При этом преобразовании (8) угол θ переходит в угол 45° , а параметры d и τ выражаются через стороны исходной трапеции и угол θ следующим образом:

$$d = \frac{2b_1}{b_2} - 1, \quad \tau = \frac{2atg\theta}{b_2}. \quad (10)$$

Без ограничения общности можно считать, что $0 < b_1 < b_2$. В противном случае $0 < b_2 < b_1$ можно переобозначить $b_1 \rightarrow b_2$ и $b_2 \rightarrow b_1$.

Поскольку $0 < b_1 < b_2$, то параметр d меняется на интервале $d \in (-1, 1)$. В предельных случаях $d = -1$ и $d = 1$ трапеция вырождается соответственно в треугольник и прямоугольник.

Авторы работ [1, 2] называют эти координаты координатами на (d, τ) плоскости. Удобство введения (d, τ) плоскости состоит в том, что координаты преобразованного аттрактора (9) зависят только от двух параметров d, τ . Они должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} -1 < \bar{x} < d, & \quad 0 < \bar{y} < \tau, \\ -1 < \bar{z} < 1, & \quad 0 < \bar{u} < \tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя сюда формулы (9), получим неравенства для параметров d, τ , откуда можно получить ограничения на них, сформулированные в теореме 2. Таким образом, теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод отражения, который иллюстрируется на рис. 2. При последовательных отражениях трапеции от вертикальной и горизонтальной сторон луч аттрактора преобразуется в прямую линию. Условия нахождения точек отражения аттрактора на прямой приводят к линейной системе для определения координат аттрактора.

Преимуществом такого подхода по сравнению с рассмотренными в [8, 9] является возможность его применения в более общем случае аттракторов (n, m) с n отражениями от горизонтальной границы и m отражениями от боковой границы.

Оценку для теоретической ширины λ волнового луча, полученную в [10], можно привести к виду $\frac{\lambda}{L_a} \sim \text{Re}^{-1/3} \left(\frac{s}{L_a} + \frac{1}{\gamma^3 - 1} \right)^{1/3}$, где L_a — периметр аттрактора, s — координата на периметре аттракто-

ра, $\gamma = \frac{1}{q}$ связан со знаменателем прогрессии q в (3), определяющим скорость сходимости луча к предельной форме, $\text{Re} = \frac{L_a \omega^2}{\nu}$ — число Рейнольдса.

Лабораторные эксперименты и прямое численное моделирование [3] подтвердили эту оценку для толщины волнового аттрактора.

Оказывается, что даже в турбулентных режимах волновые аттракторы являются областью основной накачки кинетической энергии в систему, это было подтверждено с помощью фильтрации течения около частоты внешнего воздействия [11].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит И.Н. Сибгатуллину за обсуждение результатов и академика РАН В.Ф. Журавлева за внимание к работе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.-P.A.* // <http://dx.doi.org/>. 1997. Aug. V. 388. P. 557–561. <https://doi.org/10.1038/41509Nature>
2. *Sibgatullin I.N., Ermanyuk E.V.* // <http://dx.doi.org/> of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. V. 60. № 2. P. 284–302. <https://doi.org/10.1134/s002189441902010xJournal>
3. *Grisouard N., Staquet C., Pairaud I.* // <http://dx.doi.org/> of Fluid Mechanics. 2008. Oct. V. 614. P. 1. <https://doi.org/10.1017/S002211200800325XJournal>
4. *Brouzet Ch., Sibgatullin I., Scolan H. et al.* // Journal of Fluid Mechanics. 2016. V. 793. P. 109–131.
5. *Brouzet Ch., Ermanyuk E., Joubaud S. et al.* // EPL (Europhysics Letters). 2016. V. 113. № 4. P. 44001.
6. *Рязанов Д.А., Провидухина Д.А., Сибгатуллин И.Н., Ерманюк Д.Ф.* // <http://dx.doi.org/> жидкости и газа. 2021. № 3.
7. *Hazewinkel J., Grisouard N., Stuart B. Dalziel* // <https://doi.org/> Journal of Mechanics – B/Fluids. 2011. V. 30. P. 51–56. <https://doi.org/10.1016/European>
8. *Gerkema, Theo and Zimmerman J.T.F.* An introduction to internal waves. (2008).
9. *Lenci, Marco et al.* Internal-wave billiards in trapezoids and similar tables. (2021).
10. *Thomas N., Stevenson T.* Fluid Mechanics. 1972. V. 54. № 3. P. 495–506.
11. *Brouzet Ch., Sibgatullin I., Ermanyuk E., Joubaud S., Dauxois Th.* Physical Review Fluids American Physical Society. 2017. V. 2. № 11. P. 114–803.

COORDINATES OF THE WAVE ATTRACTOR IN A TRAPEZOIDAL WATER BASIN WITH STRATIFICATION

A. G. Petrov^a

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics, the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS V. F. Zhuravlev

Waves in a stratified liquid excited in a trapezoidal basin are considered. Wave energy propagates in straight lines – rays forming a fixed angle with the vertical θ . Based on the ray model, the coordinates of the wave attractor are analytically found, which is focused in the process of reflections from the walls of the pool. The results are compared with a laboratory experiment. The convergence of the rays to the attractor is investigated. Necessary and sufficient conditions for the existence of the attractor with one reflection from each side are given analytically.

Keywords: stratified liquid, wave attractor, trapezoidal pool