ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2022, том 504, с. 32–35

МЕХАНИКА

УДК 539.3

УСЛОВИЯ РАЗДЕЛЕНИЯ ДЕВИАТОРНЫХ И ШАРОВЫХ СВОЙСТВ У ИЗОТРОПНЫХ ТЕНЗОРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2022 г. Д. В. Георгиевский[1,2,3,*]

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 27.01.2022 г.
Поступило 28.01.2022 г.
После доработки 28.01.2022 г.
Принято к публикации 25.03.2022 г.

Для изотропных упругих сплошных сред рассматривается класс тензорно нелинейных определяющих соотношений, связывающих напряжения с малыми деформациями и включающих три материальные функции от какой-либо тройки независимых инвариантов. Выводятся общие условия на эти материальные функции, при которых девиаторные и шаровые свойства тензор-функции, задающей оператор определяющих соотношений, не связаны друг с другом. Эти условия сужаются, если среда обладает скалярным потенциалом, а также если дополнительно потребовать тензорную линейность. В последнем случае приводятся возможные параметризации девиаторов напряжений и деформаций и их отображения в пятимерных векторных пространствах.

Ключевые слова: тензор-функция, девиатор, шаровая часть, скалярный потенциал, тензорная линейность, материальные функции, определяющие соотношения

DOI: 10.31857/S2686740022030075

В теории определяющих соотношений механики сплошной среды часто используется класс тензорно нелинейных определяющих соотношений изотропных материалов [1–5]

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0\mathbf{I} + A_1\boldsymbol{\varepsilon} + A_2\boldsymbol{\varepsilon}^2, \tag{1}$$

связывающих между собой два симметричных тензора второго ранга – тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ и тензор малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. В (1) $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга, A_0, A_1 и A_2 – материальные функции трех независимых инвариантов $\boldsymbol{\varepsilon}$. Чаще всего в качестве этих инвариантов выбираются

$$I_{\varepsilon1} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad I_{\varepsilon2} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)}, \quad I_{\varepsilon3} = \sqrt[3]{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^3)}. \tag{2}$$

Изотропные тензорно нелинейные функции (1) в силу теоремы Гамильтона–Кели представляют собой довольно общую тензорную связь и описывают многие известные экспериментальные явления, демонстрирующие несоосность силового и кинематического состояний в сплошной среде (как в деформируемых твердых телах, так и в неньютоновских жидкостях). В [6] такие явления названы ортогональными эффектами напряженно-деформированного состояния. Для удобства сохраним универсальность обозначений инвариантов (2) для любого симметричного тензора второго ранга: $I_{an} = \sqrt[n]{\mathrm{tr}(\mathbf{a}^n)}$, $n = 1,2,\ldots$

Разложим тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ на девиаторы и шаровые части:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}I_{\varepsilon1}\mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \frac{1}{3}I_{\sigma1}\mathbf{I}; \quad I_{e1} = 0, \quad I_{s1} = 0 \tag{3}$$

и перейдем от тройки (2) $(I_{\varepsilon1}, I_{\varepsilon2}, I_{\varepsilon3})$ к другой тройке независимых инвариантов деформаций $(I_{\varepsilon1}, I_{e2}, I_{e3})$ с помощью соотношений [7]

$$I_{e2}^2 = I_{\varepsilon2}^2 - \frac{1}{3}I_{\varepsilon1}^2, \quad I_{e3}^3 = I_{\varepsilon3}^3 - I_{\varepsilon1}I_{\varepsilon2}^2 + \frac{2}{9}I_{\varepsilon1}^3, \tag{4}$$

$$A_n(I_{\varepsilon1}, I_{\varepsilon2}, I_{\varepsilon3}) = \tilde{A}_n(I_{\varepsilon1}, I_{e2}, I_{e3}), \quad n = 0,1,2. \tag{5}$$

Инвариант I_{e2} в русскоязычной литературе часто называют интенсивностью тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тензорную связь (1) можно представить в виде объединения равенств

$$I_{\sigma1} = 3\tilde{A}_0 + I_{\varepsilon1}\tilde{A}_1 + \left(I_{e2}^2 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon1}^2\right)\tilde{A}_2, \tag{6}$$

$$\mathbf{s} = \left(\tilde{A}_1 + \frac{2}{3}I_{\varepsilon1}\tilde{A}_2\right)\mathbf{e} + \tilde{A}_2\left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}I_{e2}^2\mathbf{I}\right), \tag{7}$$

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
[3]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

выражающих отдельно шаровую и девиаторную части напряжений через параметры тензора деформаций.

НЕСВЯЗАННОСТЬ ДЕВИАТОРНЫХ И ШАРОВЫХ СВОЙСТВ

Исследуем вопрос о разделении (несвязанности) девиаторных и шаровых свойств функции (1), позволяющей разбивать шестимерные пространства деформаций и напряжений на прямые суммы пятимерного и одномерного пространств и исследовать свойства материала внутри каждого из них вне зависимости от другого. Математически вопрос сводится к нахождению общего вида материальных функций $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ (5) таких, что правая часть (6) не зависит от инвариантов I_{e2} и I_{e3}, а правая часть (7) не зависит от $I_{\varepsilon 1}$:

$$\frac{\partial}{\partial I_{en}}\left[3\tilde{A}_0 + I_{\varepsilon 1}\tilde{A}_1 + \left(I_{e2}^2 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^2\right)\tilde{A}_2\right] = 0, \quad n = 2,3, \tag{8}$$

$$D_1\mathbf{e} + D_2\left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}I_{e2}^2\mathbf{I}\right) = 0, \tag{9}$$

где введены обозначения производных по $I_{\varepsilon 1}$:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial I_{\varepsilon 1}}\left(\tilde{A}_1 + \frac{2}{3}I_{\varepsilon 1}\tilde{A}_2\right), \quad D_2 = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial I_{\varepsilon 1}}. \tag{10}$$

Обращение в нуль всех компонент тензора в левой части (9) эквивалентно равенству нулю его квадратичного инварианта. Осуществляя полную свертку выражения (9) самого с собой и учитывая нетрудно устанавливаемую [7] связь инвариантов $I_{e4}^4 = I_{e2}^4/2$, имеющую место для любого девиатора, получим

$$D_1^2 I_{e2}^2 + 2D_1D_2I_{e3}^3 + \frac{1}{6}D_2^2I_{e2}^4 = 0. \tag{11}$$

А) Случай $D_1 \equiv 0$ и $D_2 \equiv 0$. Равенство (11) превращается в тождество, в частности, если $D_1 \equiv 0$ и $D_2 \equiv 0$, т. е. обращается в нуль каждое из двух слагаемых в (9). Материальные функции $\tilde{A}_1(I_{\varepsilon 1}, I_{e2}, I_{e3})$ и $\tilde{A}_2(I_{\varepsilon 1}, I_{e2}, I_{e3})$ тогда можно параметризовать с помощью двух функций от I_{e2} и I_{e3}:

$$\begin{gathered}\tilde{A}_1 = 3Q_1(I_{e2}, I_{e3}) - 2I_{\varepsilon 1}Q_2(I_{e2}, I_{e3}),\\ \tilde{A}_2 = 3Q_2(I_{e2}, I_{e3}).\end{gathered} \tag{12}$$

Подстановка (12) в (8) приводит к общему виду $\tilde{A}_0(I_{\varepsilon 1}, I_{e2}, I_{e3})$, включающему еще одну параметризующую функцию только от $I_{\varepsilon 1}$:

$$\begin{gathered}\tilde{A}_0 = Q_0(I_{\varepsilon 1}) - I_{\varepsilon 1}Q_1(I_{e2}, I_{e3}) +\\ + \left(\frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^2 - I_{e2}^2\right)Q_2(I_{e2}, I_{e3}).\end{gathered} \tag{13}$$

С учетом (12) и (13), определяющие соотношения (6) и (7) запишутся следующим образом:

$$I_{\sigma 1} = 3Q_0, \quad \mathbf{s} = 3Q_1\mathbf{e} + 3Q_2\left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}I_{e2}^2\mathbf{I}\right). \tag{14}$$

Видно, что, как и требовалось, девиаторные и шаровые свойства тензор-функции (1) оказываются разделенными.

Б) Оставшиеся случаи. Пусть теперь $D_2 \neq 0$ тождественно. Тогда уравнение (11) эквивалентно квадратному уравнению относительно D_1/D_2 с четвертью дискриминанта, равной $I_{e3}^6 - I_{e2}^6/6$. Заметим, что для любого девиатора $\mathbf{e}$ имеет место равенство

$$I_{e3}^6 - \frac{1}{6}I_{e2}^6 = -\frac{1}{3}(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2, \tag{15}$$

где e_1, e_2 и e_3 — главные значения тензора $\mathbf{e}$ (разумеется, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$). Выражая через них инварианты I_{e2} и I_{e3}, перепишем (15) в форме

$$\begin{gathered}(e_1^3 + e_2^3 + e_3^3)^2 - \frac{1}{6}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^3 =\\ = -\frac{1}{3}(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.\end{gathered} \tag{16}$$

Справедливость (16) устанавливается простым техническим раскрытием скобок с использованием вспомогательного факта: $I_{e3}^3 \equiv e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 = -3e_1e_2e_3 \equiv -3|\mathbf{e}|$.

Таким образом, дискриминант уравнения (11) неположителен и обращается в нуль только на классе девиаторов $\mathbf{e}$ с двумя равными главными значениями, а следовательно, на классе тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ с двумя равными главными деформациями. Данное сужение ограничивает общность задачи нахождения таких материальных функций $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, при которых разделение девиаторных и шаровых свойств (6) и (7) реализуется на всем множестве симметричных тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$. Поэтому пункт Б) новых, помимо (12) и (13), классов функций $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ не дает.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Выясним, каким дополнительным связующим соотношениям должны удовлетворять параметризующие функции Q_0, Q_1 и Q_2 в (12) и (13), если известно, что тензор-функция (1) обладает скалярным потенциалом W, т.е. $\boldsymbol{\sigma} = \partial W/\partial\boldsymbol{\varepsilon}$. Положим, что W, как и $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, зависит от тройки инвариантов $(I_{\varepsilon 1}, I_{e2}, I_{e3})$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial I_{\varepsilon 1}}\frac{\partial I_{\varepsilon 1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W}{\partial I_{e2}}\frac{\partial I_{e2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W}{\partial I_{e3}}\frac{\partial I_{e3}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{17}$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial I_{\varepsilon 1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_{\varepsilon 2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{I_{\varepsilon 2}}, \quad \frac{\partial I_{\varepsilon 3}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{I_{\varepsilon 3}^2}, \tag{18}$$

вычислим производные по $\boldsymbol{\varepsilon}$, входящие в (17):

$$\frac{\partial I_{e2}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \sqrt{I_{\varepsilon 2}^2 - \frac{1}{3} I_{\varepsilon 1}^2} = \frac{1}{I_{e2}} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} I_{\varepsilon 1} \mathbf{I} \right) = \frac{\mathbf{e}}{I_{e2}}, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial I_{e3}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \sqrt[3]{I_{\varepsilon 3}^3 - I_{\varepsilon 1} I_{\varepsilon 2}^2 + \frac{2}{9} I_{\varepsilon 1}^3} = \\ = \frac{1}{I_{e3}^2} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \frac{2}{3} I_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} I_{\varepsilon 1}^2 - I_{\varepsilon 2}^2 \right) \mathbf{I} \right]. \end{gathered} \tag{20}$$

После подстановки (18)–(20) в (17) и сравнения с выражением (1) приравняем коэффициенты при тензорах $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^2$. В результате преобразований получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial W}{\partial I_{\varepsilon 1}} = \tilde{A}_0 + \frac{1}{3} I_{\varepsilon 1} \tilde{A}_1 + \frac{1}{3} \left(I_{e2}^2 + \frac{1}{3} I_{\varepsilon 1}^2 \right) \tilde{A}_2, \\ \frac{\partial W}{\partial I_{e2}} = I_{e2} \left(\tilde{A}_1 + \frac{2}{3} I_{\varepsilon 1} \tilde{A}_2 \right), \quad \frac{\partial W}{\partial I_{e3}} = I_{e3}^2 \tilde{A}_2. \end{gathered} \tag{21}$$

Три равенства вторых смешанных производных от W, полученные на основании (21), приводят к трем условиям потенциальности на материальные функции $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$. Подставим в (21) выражения (12) и (13):

$$\begin{gathered} \frac{\partial W}{\partial I_{\varepsilon 1}} = Q_0(I_{\varepsilon 1}), \quad \frac{\partial W}{\partial I_{e2}} = 3 I_{e2} Q_1(I_{e2}, I_{e3}), \\ \frac{\partial W}{\partial I_{e3}} = 3 I_{e3}^2 Q_2(I_{e2}, I_{e3}). \end{gathered} \tag{22}$$

В терминах функций Q_0, Q_1 и Q_2 нетривиальным остается лишь одно условие потенциальности:

$$I_{e3}^2 \frac{\partial Q_2}{\partial I_{e2}} = I_{e2} \frac{\partial Q_1}{\partial I_{e3}}. \tag{23}$$

Таким образом, для потенциальных тензор-функций (1) общим условием разделения девиаторных и шаровых свойств является представимость скалярного потенциала как суммы

$$W = W_0(I_{\varepsilon 1}) + W_1(I_{e2}, I_{e3}). \tag{24}$$

ТЕНЗОРНАЯ ЛИНЕЙНОСТЬ, ИЛИ КВАЗИЛИНЕЙНОСТЬ

Существует два эквивалентных определения тензорной линейности (по терминологии [4] квазилинейности) функции (1). Одно из них связано с тождественным равенством нулю функции A_2, а следовательно, и $\tilde{A}_2$, другое – с тем, что угол между девиаторами $\mathbf{s}$ и $\mathbf{e}$ нулевой [8]. В терминах функций Q_0, Q_1 и Q_2, параметризующих исходные соотношения (12) и (13), тензорная линейность означает, что $Q_2 \equiv 0$, т.е.

$$\begin{gathered} \tilde{A}_0 = Q_0(I_{\varepsilon 1}) - I_{\varepsilon 1} Q_1(I_{e2}, I_{e3}), \\ \tilde{A}_1 = 3 Q_1(I_{e2}, I_{e3}), \quad \tilde{A}_2 \equiv 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Если совместить требования тензорной линейности и потенциальности, то это в силу (23) приведет к независимости Q_1 от I_{e3}. Тогда определяющие соотношения (14) упростятся:

$$I_{\sigma 1} = 3 Q_0(I_{\varepsilon 1}), \quad \mathbf{s} = 3 Q_1(I_{e2}) \mathbf{e}. \tag{26}$$

Из (26), в частности, следует связь интенсивностей I_{s2} и I_{e2}, называемая скалярным определяющим соотношением тензорно линейной среды:

$$I_{s2} = 3 I_{e2} \left| Q_1(I_{e2}) \right|. \tag{27}$$

Например, для изотропной физически линейной упругой среды с постоянными Ламе λ и μ введенные ранее функции таковы:

$$\begin{gathered} Q_0 = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) I_{\varepsilon 1}, \quad Q_1 \equiv \frac{2\mu}{3}, \\ Q_2 \equiv 0, \quad I_{s2} = 2\mu I_{e2}. \end{gathered} \tag{28}$$

Это единственный физически линейный случай (т.е. по определению случай, допускающий принцип суперпозиции) среди всего класса нелинейных тензор-функций (1).

ПЯТИМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Пропорциональность девиаторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{e}$ в (26) наряду с зависимостью Q_1 только от инварианта I_{e2} дает возможность поставить в соответствие множествам девиаторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{e}$ в трехмерном пространстве пятимерные векторные пространства, элементами которых являются векторы напряжений $\mathbf{S}$ и деформаций $\mathbf{E}$. Взаимообратная параметризация $\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{E}$ покоординатно записывается следующим образом [3, 9, 10]:

$$\begin{gathered} e_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-E_1 \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \pm E_2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right), \\ e_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(E_1 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \mp E_2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right), \\ e_{33} = \sqrt{\frac{2}{3}} (-E_1 \cos\varphi \mp E_2 \sin\varphi), \\ e_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_3, \quad e_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_4, \quad e_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_5; \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} E_1 = \sqrt{2} \left[e_{11} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + e_{22} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right], \\ E_2 = \pm\sqrt{2} \left[e_{11} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + e_{22} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right], \\ E_3 = \sqrt{2} e_{12}, \quad E_4 = \sqrt{2} e_{23}, \quad E_5 = \sqrt{2} e_{31}, \end{gathered} \tag{30}$$

где φ – произвольный угол. Коэффициенты в (29) и (30) подобраны так, что если взять два произвольных девиатора $\mathbf{e}^{\{1\}}$ и $\mathbf{e}^{\{2\}}$ и построить соответствующие им векторы деформаций: $\mathbf{e}^{\{1\}} \leftrightarrow \mathbf{E}^{\{1\}}$, $\mathbf{e}^{\{2\}} \leftrightarrow \mathbf{E}^{\{2\}}$, то сохранятся совместные инварианты обеих пар: $\mathbf{e}^{\{1\}} : \mathbf{e}^{\{2\}} = \mathbf{E}^{\{1\}} \cdot \mathbf{E}^{\{2\}}$. Следовательно,

$$I_{e2} \equiv \sqrt{\mathbf{e} : \mathbf{e}} = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}} \equiv E. \tag{31}$$

Аналогичная (29) и (30) взаимообратная параметризация, вообще говоря, с другим углом ψ справедлива и для напряжений: $\mathbf{s} \leftrightarrow \mathbf{S}$. Если же для простоты выбрать $\psi = \varphi$, то тензорное (26) и скалярное (27) определяющие соотношения допускают запись в терминах пятимерных векторов:

$$\mathbf{S} = 3Q_1(E)\mathbf{E}, \quad S = 3\left|Q_1(E)\right| E. \tag{32}$$

Заметим, что зависимость (32) представляет собой общий вид изотропной нелинейной вектор-функции в пространстве любой размерности (в данном случае в пятимерном). Эта вектор-функция обладает скалярным потенциалом $w(E)$ таким, что

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}, \quad w = 3\int E Q_1(E) dE. \tag{33}$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 22–21–00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аннин Б.Д.* Формула Лагранжа – Сильвестра для тензорной функции, зависящей от двух тензоров // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 4. С. 743–744.
2. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
4. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
5. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
6. *Георгиевский Д.В.* Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые “ортогональные эффекты” напряженно-деформированного состояния // Известия РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 21–26.
7. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
8. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
9. *Зубчанинов В.Г.* Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определимости и изотропии А.А. Ильюшина // Вестн. Моск. ун-та. Математ., Механ. 2018. № 5. С. 29–46.
10. *Бровко Г.Л.* Объективные тензоры и их отображения в классической механике сплошной среды // Известия РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 83–105.

THE CONDITIONS OF DIVISION OF DEVIATOR AND SPHERICAL PROPERTIES FOR ISOTROPIC TENSOR NON-LINEAR FUNCTIONS

D. V. Georgievskii[a,b,c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia*

[c] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

For isotropic elastic continuous media, we consider a class of tensor nonlinear constitutive relations connecting stresses with small strains and including three material functions from any triple of independent invariants. General conditions are derived for these material functions, under which the deviatory and spherical properties of the tensor function defining the operator of the constitutive relations are not related to each other. These conditions are narrowed if the medium has a scalar potential, as well as if tensor linearity is additionally required. In the latter case, possible parametrizations of stress and strain deviators and their representations in five-dimensional vector spaces are given.

Keywords: tensor-function, deviator, spherical part, scalar potential, tensor linearity, material functions, constitutive relations