——— МЕХАНИКА ——

УДК 517.977

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА ТРАЕКТОРИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПАССАЖИРСКОГО САМОЛЕТА

© 2022 г. С. А. Кумакшев<sup>1,\*</sup>, А. М. Шматков<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 21.12.2021 г. Поступило 10.01.2022 г. После доработки 10.01.2022 г. Принято к публикации 28.01.2022 г.

С помощью классического метода динамического программирования построены траектории движения сверхзвукового пассажирского самолета, оптимальные по расходу топлива. Использована математическая модель воздушного судна, максимально учитывающая обычные ограничения, накладываемые на допустимые маневры самолета его конструктивными особенностями. Оптимальные решения были найдены без предварительного разбиения полета на отдельные участки. Несмотря на то, что при вычислениях никак не были учтены ограничения, накладываемые действующими правилами полетов гражданских самолетов, оказалось, что оптимальные траектории достаточно удобны для применения в рамках этих ограничений. Выяснилось, что участки движения со скоростью, превышающей скорость звука, находятся на большой высоте. Это позволяет избежать дополнительного акустического воздействия на людей, живущих вблизи аэропортов, и одновременно уменьшить расход топлива. Участки оптимальных траекторий, соответствующие крейсерскому полету, располагаются на большой высоте, а потому помехи движению обычных самолетов могут быть практически сведены к нулю. Начальные и конечные отрезки траектории, находящиеся в близких к аэропортам зонах с высокой плотностью движения, слабо отличаются для различных требуемых длительностей перелета, а потому не требуют большой точности при практической реализации.

*Ключевые слова:* сверхзвуковой полет, численная оптимизация, динамическое программирование **DOI:** 10.31857/S2686740022030117

1. Проблему выбора наилучшей траектории для самолета исследуют давно. Исходно цель состояла в достижении заданной высоты при минимизации времени движения или расхода топлива, однако с ростом скорости самолетов потребовалось одновременно с этим получать необходимую скорость полета [1]. При этом оптимизацию крейсерского участка траектории проводили отдельно [2]. Для воздушных судов, движущихся с дозвуковой скоростью, можно было произвести дополнительную декомпозицию задачи и тем самым упростить решение [3]. Резкий рост цен на нефть, вызвавший удорожание авиационного топлива, повысил актуальность его экономии. В связи с этим потребовалось значительно более точно учитывать как аэродинамические ограничения, так и ограничения на тягу двигателей [4]. В дальнейшем используемые математические модели продолжали усложняться [5], для чего потребовалось применение моделей, во все большей степени основывающихся на использовании численных методов [6]. Использование более мощных бортовых компьютеров сделало возможной оптимизацию траекторий по расходу топлива в режиме реального времени, с учетом текущих воздушных потоков [7, 8]. В последние годы все больше внимания уделяют снижению различных воздействий со стороны самолета на окружающую среду [9, 10], что тесно связано с проблемой экономии топлива [11]. Также возникли задачи экономии электрической энергии, поскольку появились воздушные суда, использующие соответствующие источники [12]. Усиливается интерес к сверхзвуковой авиации как в связи с исследованиями физических процессов, наблюдающихся при движении летательных аппаратов [13], так и в связи с развитием численных методов, описывающих эти процессы [14]. Использование новых материалов позволило перейти к изучению устройств, которые могут перемещаться с гиперзвуковыми скоростями [15].

Выбор наилучшей траектории носит комплексный характер [16]. Стандартный коммерческий полет имеет траекторию [17], которая значи-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: kumak@ipmnet.ru

<sup>\*\*</sup>E-mail: shmatkov@ipmnet.ru



Рис. 1.

тельно отличается от типичной дозвуковой траектории, оптимальной по расходу топлива, пример которой [18] показан на рис. 1. Наиболее заметное отличие – отсутствие крейсерского этапа полета. Причина в том, что с точки зрения теории для экономии топлива оказывается целесообразным сначала набрать большую высоту полета, преобразовав внутреннюю энергию топлива в потенциальную энергию дозвукового самолета, а затем постепенно использовать этот резерв в процессе снижения до конечной точки полета. На практике приходится учитывать многочисленные ограничения, не связанные напрямую с техническими характеристиками самолета. Наиболее очевидным является то, что по современным воздушным трассам одновременно движется большое количество самолетов, и поэтому использование траекторий с постоянно изменяющейся высотой значительно усложнит управление воздушным движением и создаст риск столкновения в воздухе. Поэтому перелет между крупными центрами авиационных перевозок происходит, как правило, на постоянной высоте. Экипаж может сам (или по указанию авиадиспетчера) выбрать один из разрешенных эшелонов полета. Изменения эшелона во время полета случаются нечасто. Таким образом, возможности экономии топлива за счет глобальной оптимизации траектории дозвукового гражданского лайнера существенно ограничены, и на практике необходимо применять только локальную оптимизацию. Локальные решения, принимаемые в процессе полета, зависят во многом от бортовых автоматических систем. Используемые в них алгоритмы формируют на основе общего подхода к глобальной оптимизации [19]. Он, как правило, начинается с разбиения траектории на три этапа: взлет, крейсерский режим и посадка. Далее рассматривают три отдельные задачи [17, 20] и строят полное решение [21, 22]. Для их решения используют разнообразные численные методы [23, 24], но они, как правило, дают только субоптимальные траектории. Точные зависимости должны соответствовать принципу максимума Понтрягина, однако применение этого принципа затруднено большим количеством фазовых ограничений. Другим способом получения точных решений является метод динамического программирования Беллмана.

В данном сообщении применена математическая модель сверхзвукового пассажирского самолета, максимально приближенная к аналогичным моделям дозвуковых воздушных судов. Она учитывает самые разнообразные и весьма сложные конструктивные ограничения, которые наложены как на управляющие параметры, так и на фазовые переменные. Это обстоятельство делает применение принципа максимума крайне затруднительным, но существенно облегчает использование метода динамического программирования в классической форме, поскольку уменьшает количество вариантов возможных перемещений центра масс самолета, которые нужно перебрать. Этот метод позволил провести оптимизацию всей траектории целиком, без предварительного разлеления на участки и последующей стыковки полученных фрагментов. В отличие от ограничений, накладываемых особенностями конструкции, многочисленные ограничения, наложенные действующими правилами на допустимые траектории движения гражданских самолетов, не были учтены совершенно. Однако в результате вычислений выяснилось, что оптимальные решения весьма удобны для применения в рамках указанных ограничений.

Заметим, что в работе все размерные величины представлены в системе единиц СИ.

2. Для минимизации расхода топлива важно найти оптимальное управление в вертикальной плоскости. Поэтому будем полагать, что вся траектория полета находится в этой плоскости. Пусть масса самолета в текущий момент времени равна m. Обозначим абсциссу и ординату центра масс самолета через x и y соответственно. Обозначим через  $\theta$  угол, который составляет с осью абсцисс вектор скорости этого центра, причем модуль вектора равен V. Тогда уравнения движения самолета имеют следующий вид:

$$\dot{V} = g(n_x - \sin \theta), 
\dot{\theta} = \frac{g}{V}(n_y - \cos \theta), 
\dot{x} = V \cos \theta, 
\dot{y} = V \sin \theta, 
\dot{m} = -Q_t(M, y, P).$$
(1)

Здесь через g обозначено ускорение свободного падения,  $n_x$  и  $n_y$  обозначают величины тангенциальной и нормальной скоростной перегрузки соответственно, а функция  $Q_t$  задает секундный расход топлива, зависящий от числа Маха M, высоты полета y и тяги P.

Величина угла  $\theta$  должна удовлетворять условию  $-45^{\circ} \le \theta \le 45^{\circ}$ . Заметим, что для приведенных далее примеров оптимальных траекторий  $-11^{\circ} < \theta < 6^{\circ}$ .

Поскольку сила лобового сопротивления направлена против вектора скорости, то

$$n_x = \frac{P}{mg} - \frac{qSC_x}{mg}, \quad q = \frac{\rho(y)V^2}{2}, \tag{2}$$

где через  $\rho(y)$  обозначена плотность атмосферы в зависимости от высоты, а через *S* обозначена площадь крыла самолета. Входящий в формулу (2) коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  зависит от коэффициента подъемной силы  $C_y$  и числа Маха *M*.

Будем полагать, что вектор силы тяги с модулем *P* всегда направлен вдоль вектора скорости. Тогда нормальная скоростная перегрузка определяется формулой

$$n_y = \frac{qSC_y}{mg}.$$
 (3)

Должно выполняться условие  $0 \le n_y \le n_y^{\max}$ , где  $n_y^{\max} = 4$ . Заметим, что для приведенных далее примеров оптимальных траекторий  $0.8 < n_y < 1.3$ . Величина коэффициента подъемной силы должна удовлетворять условию  $0 \le C_y \le C_{y\max}(M)$ .

Высота полета *у* должна быть не меньше 100 м и не больше 14000 м. Модуль *V* вектора скорости ограничен снизу функцией  $V_{\min}(y)$ , а сверху функцией  $V_{\max}(y)$ . Суммарная тяга двигателей *P* ограничена сверху и снизу функциями  $P_{\max}(y, M)$  и  $P_{\min}(y, M)$  соответственно.

Задача состоит в выборе таких функций  $C_y(t)$  и P(t), чтобы функционал

$$J = \int_{0}^{T} Q_{t} (M(t), y(t), P(t)) dt, \qquad (4)$$

определяющий суммарный расход топлива, имел наименьшее возможное значение. В формуле (4) через T обозначено требуемое время движения из заданной начальной точки траектории в конечную при заданных начальной и конечной скоростях.

Так как согласно наложенным условиям значение выражения  $V \cos \theta$  никогда не обращается в нуль, можно заменить независимую переменную в (1) и использовать дальность *x* вместо времени. Получим

$$\frac{dV}{dx} = \frac{g}{V} \left( \frac{n_x}{\cos \theta} - \mathrm{tg}\theta \right),$$
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{g}{V^2} \left( \frac{n_y}{\cos \theta} - 1 \right), \quad \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\theta, \tag{5}$$
$$\frac{dm}{dx} = -\frac{Q_t(M, y, P)}{V \cos \theta}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{V \cos \theta}.$$

Граничные условия примут вид

$$V(x_0) = V_0, \quad \theta(x_0) = \theta_0, \quad m(x_0) = m_0, \quad t(x_0) = 0, \\ V(x_T) = V_T, \quad \theta(x_T) = \theta_T, \quad t(x_T) = T,$$
(6)

где через  $x_0$  и  $x_T$  обозначены начальная и конечная абсциссы центра масс самолета, причем без ограничения общности можно положить  $x_0 = 0$ . С учетом (5) минимизируемый функционал (4) можно записать в форме

$$J = \int_{0}^{x_{T}} \frac{Q_{l}(x)}{V \cos \theta} dx.$$
 (7)

Решение задачи поиска траектории, минимизирующей функционал (7) для системы дифференциальных уравнений (5) с начальными условиями (6) и удовлетворяющей всем указанным выше условиям, было проведено численно классическим методом динамического программирования. Далее описаны наиболее интересные свойства полученных решений.

3. Площадь крыла самолета была взята равной  $S = 110.16 \text{ м}^2$ . Были выбраны следующие граничные условия (6), одинаковые для всех описанных далее случаев:

$$V_0 = 140 \text{ M/c}, \quad \theta_0 = 0, \quad m_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ Kr},$$
  
 $x_T = 10^6 \text{ M}, \quad V_T = 140 \text{ M/c}, \quad \theta_T = 0.$ 

Для различных значений времени движения на рис. 2 показаны оптимальные траектории, на которых видны участки набора высоты, крейсерского режима и снижения перед посадкой. Чем меньше общее время движения, тем раньше начинается набор высоты, дольше движение в крейсерском режиме и позже происходит снижение. Для самого длительного из представленных перелетов крейсерский режим практически отсутствует. Можно заметить, что по отношению к общему времени движения чувствительность скорости набора высоты больше, чем скорости снижения.

На рис. 3 показаны зависимости скорости движения самолета от дальности для тех же самых значений общего времени движения, что и на рис. 2. Видно, что типичный график состоит из семи участков. На начальном участке траектории скорость одинаково быстро растет во всех случаях. Потом в течение некоторого времени происходит движение с постоянной скоростью, прак-



Рис. 2.



Рис. 3.



Рис. 4.

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ том 504 2022

тически не зависящей от общей длительности полета. Затем на некотором удалении от начальной точки траектории начинается резкий набор скорости до значения, характерного для крейсерского режима. Чем меньше общее время движения, тем раньше начинается набор скорости. Полет на крейсерском режиме характеризуется практически постоянной скоростью, одинаковой для всех рассмотренных случаев. Далее виден участок, на котором скорость резко падает почти до того же самого значения, которое было до ее роста при переходе к крейсерскому режиму. Указанное уменьшение скорости начинается тем ближе к начальной точке траектории, чем больше общее время движения. Потом виден участок, на котором скорость почти постоянна и слабо отличается от одной траектории к другой. Завершающее движение происходит при резком снижении скорости, практически одинаковом для всех случаев. Как и на рис. 2, самый длительный перелет не имеет участка, характерного для крейсерского режима.

Из рис. 4 представлены зависимости значения числа Маха от дальности для того же набора траекторий, что и на рис. 2 и 3. Каждую кривую можно разбить на те же семь участков, что и на рис. 3. Видно, что участки, предшествующие выходу на крейсерский режим и следующие после него, соответствуют дозвуковым режимам полета. На том участке до крейсерского режима, где скорость движения почти одинакова для всех вариантов, число Маха медленно увеличивается. Переход к сверхзвуковому полету происходит при очень быстром росте скорости. В рамках крейсерского режима число Маха практически постоянно и равно приблизительно 1.44, а на участке примерного постоянства скорости после окончания этого режима число Маха медленно уменьшается. При этом сам выход из крейсерского режима происходит хотя и с быстрым уменьшением данного числа, однако менее резким, чем при переходе к сверхзвуковому полету.

4. Полученное решение представляется удобным для реализации. Начальные участки траекторий отличаются незначительно друг от друга, а различие между конечными участками еще меньше. Это позволяет унифицировать элементы движения самолетов на небольшом удалении от аэродромов взлета и посадки. Данное обстоятельство очень важно для упорядочения плотного потока воздушных судов в районах крупных транспортных vзлов. Сверхзвуковой полет сопровождается распространением ударных волн, оказывающих существенное акустическое воздействие на живые организмы, а иногда и на элементы зданий и сооружений. Вычисления показывают, что оптимальное движение со сверхзвуковой скоростью начинается и оканчивается на высотах около шести километров, а крейсерская часть полета происходит на высоте четырнадцати километров. Акустическое воздействие при этих условиях можно полагать приемлемым. Еще одно полезное свойство полученных траекторий заключается в удобстве реализации оптимального управления, так как, например, главные отличия между скоростями движения для разных случаев сводятся к изменению моментов времени перехода от одной скорости к другой, как это видно из рис. 3.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают признательность сотруднику Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н.Е. Жуковского Н.М. Гревцову за предоставленные численные параметры математической модели летательного аппарата.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 21-51-12004 и средствами государственного бюджета по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Rutowski E.S. Energy approach to the general aircraft performance problem // J. Aeronaut. Sci. 1954. V. 21. № 3. P. 187–195.
- Zagalsky N.R., Irons R.P., Schultz R.L. Energy state approximation and minimum-fuel fixed-range trajectories // J. Aircr. 1971. V. 8. № 6. P. 488–490.
- Calise A.J. Extended energy management for flight performance optimization // AIAA J. 1977. V. 15. № 3. P. 314–321.
- Erzberger H., Lee H. Constrained optimum trajectories with specified range // J. Guid. Control. 1980. V. 3. № 1. P. 78–85.
- Grimm W., Well K.H., Oberle H.J. Periodic control for minimum-fuel aircraft trajectories // J. Guid. Control Dyn. 1986. V. 9. № 2. P. 169–174.
- Raivio T., Ehtamo H., Hämäläinen R.P. Aircraft trajectory optimization using nonlinear programming / System Modelling and Optimization. Boston: Springer, 1996. P. 435–441.
- Langelaan J.W. Long distance / duration trajectory optimization for small UAVs / AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. South Carolina: Hilton Head, 2007. P. 3654–3667.
- Rosenow J., Lindner M., Scheiderer J. Advanced Flight Planning and the Benefit of In-Flight Aircraft Trajectory Optimization // Sustainability. 2021. V. 13. № 3. P. 1383–1401.
- Wan J., Zhang H., Liu F., Lv W., Zhao Y. Optimization of aircraft climb trajectory considering environmental impact under RTA constraints // J. Adv. Transp. 2020. V. 2020. P. 1–17.
- Lim Y., Gardi A.G.M., Sabatini R. Optimal aircraft trajectories to minimize the radiative impact of contrails and CO<sub>2</sub> // Energy Procedia. 2017. V. 110. P. 446–452.

- Díaz M.V., Comendador V.F.G., Carretero J.G.-H., Valdís R.M. Environmental benefits in terms of fuel efficiency and noise when introducing continuous climb operations as part of terminal airspace operation // Int. J. Sustain. Transp. 2020. V. 14. № 12. P. 903–913.
- Li Y., Zhang Z., Zhang J. Research on trim simulation and flight test of a general electric aircraft // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1802. P. 1–10.
- 13. Зубин М.А., Максимов Ф.А., Остапенко Н.А. Управление структурой обтекания ромбовидного крыла в сверхзвуковом потоке // ДАН. 2019. Т. 485. № 3. С. 290–294.
- Елизарова Т.Г., Широков И.А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // ДАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 260–264.
- 15. *Суржиков С.Т.* Расчетный анализ экспериментальных данных по аэротермодинамике гиперзвукового аппарата HIFiRE-I // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. № 1. С. 68–72.
- Rosenow J., Förster S., Lindner M., Fricke H. Multi-objective trajectory optimization // Int. Transportation. 2016. V. 68. № 1. P. 40–43.
- 17. *Murrieta-Mendoza A., Botez R.M.* Methodology for vertical-navigation flight-trajectory cost calculation using a performance database // J. Aerosp. Inf. Syst. 2015. V. 12. № 8. P. 519–532.
- Kumakshev S.A., Shmatkov A.M. Flight trajectory optimization without decomposition into separate stages / 2018 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2018. V. 468. N 012033.
- Rosenow J., Strunck D., Fricke H. Trajectory optimization in daily operations // CEAS Aeronaut. J. 2020. V. 11. P. 333–343.
- 20. *Alligier R.* Predictive Distribution of Mass and Speed Profile to Improve Aircraft Climb Prediction // J. Air Transp. 2020. V. 28. № 3. P. 114–123.
- Franco A., Rivas D. Optimization of multiphase aircraft trajectories using hybrid optimal control // J. Guid. Control Dyn. 2015. V. 38. № 3. P. 452–467.
- 22. *Murrieta-Mendoza A., Romain C., Botez R.M.* 3D Cruise Trajectory Optimization Inspired by a Shortest Path Algorithm // Aerospace. 2020. № 7. P. 99–119.
- Soler M., Olivares A., Staffetti E. Multiphase optimal control framework for commercial aircraft four-dimensional flight-planning problems // J. Aircr. 2015. V. 52. № 1. P. 274–286.
- García-Heras J., Soler M., Saez F.J. Collocation methods to minimum-fuel trajectory problems with required time of arrival in ATM // J. Aerosp. Inf. Syst. 2016. V. 13. № 7. P. 243–265.

## OPTIMAL MINIMUM-FUEL TRAJECTORIES OF A SUPERSONIC PASSENGER AIRCRAFT

### S. A. Kumakshev<sup>a</sup> and A. M. Shmatkov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The trajectories of a supersonic passenger aircraft, which are optimal in terms of fuel consumption, are constructed using the classical method of dynamic programming. The mathematical model of the aircraft maximally takes into account the usual restrictions imposed on the permissible maneuvers of the aircraft by its design features. Optimal solutions were found without prior partitioning flight to separate areas. Despite the fact that the calculations did not take into account the restrictions imposed by the current rules for flying civil aircraft, it turned out that the optimal trajectories are quite convenient for use within the framework of these restrictions. Sections of movement with a speed exceeding the speed of sound are at a high altitude. This allows us to avoid additional acoustic impact on people living near airports, and at the same time to reduce fuel consumption. Sections of optimal trajectories corresponding to cruise phase of the flight are located at a high altitude, and therefore interference with the movement of conventional aircraft can be practically reduced to zero. The initial and final segments of trajectory, located in areas close to airports with a high air traffic density, differ slightly for various required flight durations, and therefore do not require great accuracy in practical implementation.

Keywords: supersonic flight, numerical optimization, dynamic programming method