

УДК 533.9.01,523.9

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗВЕЗДАХ ПРИ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ ДИНАМО-ЧИСЛАХ

© 2022 г. Е. П. Попова^{1,*}

Представлено академиком РАН Р.З. Сагдеевым 12.12.2021 г.

Поступило 14.12.2021 г.

После доработки 14.02.2022 г.

Принято к публикации 15.02.2022 г.

Для нелинейной динамической системы уравнений, описывающей поведение гармоник магнитного поля Солнца на базе модели $\alpha\Omega$ -динамо, показано, что в начале процесса генерации магнитного поля, когда динамо-число значительно превышает пороговое, лидируют наиболее быстро нарастающие волны, затем с течением времени они довольно быстро перестают расти и лидирующими становятся изначально медленно нарастающие, которые затем и дают основной вклад в процесс генерации магнитного поля.

Ключевые слова: динамо, магнитное поле, динамо-число, звезды, турбулентная диффузия

DOI: 10.31857/S2686740022030129

Генерацию магнитных полей звезд, в частности Солнца, принято связывать с процессом динамо, который основан на совместном действии дифференциального вращения небесного тела и мерой нарушения отражательной инвариантности течений в зоне генерации магнитного поля, так называемой гидродинамической спиральности [1]. В кинематической модели динамо Паркера [1] поле скоростей считается заданным, а генерируемое магнитное поле рассматривается в виде бегущих динамо-волн. При этом магнитное поле рассматривается в виде двух компонент: тороидального (или азимутального) поля, вытянутого вдоль параллелей, и полоидального поля, вытянутого вдоль меридианов.

В моделях динамо для нелинейного ограничения роста магнитного поля обычно используют эффект стабилизации (подавления α -эффекта при достаточном росте амплитуды магнитного поля) [2]. Такой подход может дать специфические эффекты поведения волн магнитного поля, исследование которых представляет отдельный интерес.

Цель работы – показать на примере одномерной модели $\alpha\Omega$ -динамо как эволюционируют волны в нелинейной среде и найти область применимости метода представления процесса динамо в виде динамических систем.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений $\alpha\Omega$ -динамо Паркера [1] в квази-одномерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= R_\alpha \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= R_\omega \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где векторный потенциал A и тороидальная компонента магнитного поля B являются функциями широты θ , измеряемой от полюса, и времени t . Безразмерные числа R_α и R_ω , аналогичные известному в гидродинамике числу Рейнольдса, характеризуют интенсивность α -эффекта и дифференциального вращения соответственно ($D = R_\alpha R_\omega$). Обычно в задачах о солнечном динамо D берется меньше нуля и в анализе подразумевается модуль D , поэтому далее в работе мы будем подразумевать модуль D . Здесь мы используем простейшую схему стабилизации роста магнитного поля, так называемое подавление спиральности. В рамках этой схемы считается, что

$$\alpha = \alpha_0(\theta)/(1 + \xi^2 B^2) \approx \alpha_0(\theta)(1 - \xi^2 B^2),$$

где $\alpha_0(\theta)$ – значение спиральности в незамагниченной среде, $B_0 = \xi^{-1}$ – магнитное поле, при котором происходит существенное подавление α -эффекта. Мы используем простейшую форму для α -эффекта $\alpha_0(\theta) = \cos \theta$, при которой выполняется условие равенства его нулю на экваторе. В качестве граничных условий используем условия

¹Centro de Investigación en Astronomía, Universidad Bernardo O'Higgins, Santiago, Chile

*E-mail: elena.popova@ubo.cl

$A(0) = B(0) = A(\pi) = B(\pi) = 0$, что соответствует дипольной симметрии. Выбор множителя $\sin \theta$ во втором уравнении отвечает уменьшению длины параллели вблизи полюса. В диффузионных членах опущены эффекты кривизны. Считается, что радиальный градиент угловой скорости не меняется с θ . По соображениям симметрии уравнения (1) можно рассматривать лишь для одного (северного) полушария с условиями антисимметрии (дипольная симметрия) или симметрии (квадрупольная симметрия) на экваторе. Поскольку магнитное поле Солнца имеет дипольную симметрию, такой случай рассмотрен в данной модели. В системе (1) время и расстояния измеряются в безразмерных единицах, которые вводятся при построении динамо-числа. В частности, единицей времени является не год, а так называемое диффузионное время, за которое жидкая частица под действием турбулентной диффузии проходит конвективную зону. Магнитное поле измеряется в единицах того значения, при котором происходит нелинейная стабилизация решения (обычно принимается, что это поле равномерного распределения между кинетической энергией турбулентности и магнитной энергией).

Будем исследовать систему (1) с помощью разложения в ряды Фурье с зависящими от времени коэффициентами. Впервые такое приближение было предложено в работе [3] и развито в работах [4–9]. Отметим, что динамические системы применяются и для других конфигураций динамо, как, например, в [10], где динамическая система строилась для дисковой динамо-системы, имеющей три связанных проводящих диска, и учитывалась вызванная взаимодействием временная задержка в динамических управляющих уравнениях. В рамках такого приближения предполагается, что возбуждаемое магнитное поле звезды или планеты можно описать подходящим образом подобранной динамической системой. Уравнения динамо проектируются на систему собственных функций для задачи о затухании магнитного поля при отсутствии источников генерации. Решение системы динамо фактически представляется в виде ряда Фурье с зависящими от времени неизвестными коэффициентами, которые могут быть найдены из динамической системы для них, полученной после подстановки выбранного вида решения в исходную систему динамо.

В работах [3–9] решение строилось на базе малого числа старших собственных функций (не более трех). Однако очень важно при сужении базиса собственных функций (мод) не выходить за пределы применимости данного метода при выборе больших значений числа динамо.

Если изначально задаваемое динамо-число существенно превышает его пороговое значение

(порог генерации магнитного поля), необходимо учитывать большее число собственных функций (тем самым и их Фурье гармоник). Если это условие нарушено, вся нелинейная картина насыщения неустойчивости окажется некорректной. В зависимости от превышения динамо-числом его порогового значения оценим минимальное число мод (гармоник), которые необходимо учитывать в базисе. Если коротковолновые моды попадают изначально в область достаточно сильного затухания из-за магнитной турбулентной диффузии, их вклад становится пренебрежимо малым. Пусть в начальный момент времени задано достаточно большое динамо-число D_0 , оценим минимальное количество мод, которое необходимо учитывать в базисе собственных функций при решении нелинейной динамической задачи нарастания магнитного поля и его нелинейного насыщения. При больших D_0 , когда число нарастающих мод достаточно велико ($n \gg 1$), для оценки можно применить предположение о слабой пространственной неоднородности и найти локальное значение инкремента нарастания динамо-волны. Подставим в систему уравнений (1) решения в виде

$$A = \bar{A} e^{i(2n+1)\theta} e^{\omega t}, \quad B = \bar{B} e^{i2n\theta} e^{\omega t},$$

учитывая дипольную симметрию магнитного поля. При $n \gg 1$ можно показать, что если положить среднее значение $\sin \theta \cos \theta \approx \frac{1}{4}$, то

$$\text{Re} \omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2nD}{4}} - (2n)^2.$$

Условие генерации поля $\omega > 0$, следовательно, $D > 8(2n)^3$. В нелинейном балансе необходимо учитывать также и затухающие волны с несколько большими n . Именно нелинейная передача энергии от неустойчивых мод затухающим обеспечивает установление нелинейного насыщения. Тогда при динамо-числе, значительно превышающем порог генерации, необходим учет числа мод $n > \frac{1}{4} \sqrt[3]{D}$. Тогда применимость метода в зависимости от числа учитываемых мод будет ограничена следующими диапазонами динамо-чисел: для $n = 2$, $D < 512$; $n = 3$, $D < 1728$; $n = 5$, $D < 8000$; $n = 10$, $D < 64000$.

Отметим, что в работах [6, 7, 9] рассматривался случай $n = 2$, а задача динамо исследовалась в том числе и на областях динамо-чисел, выходящих за область применимости метода (в [6] область динамо-чисел D была до 1000, в [7] – до 3000, работа [9] построена на исследовании поведения динамо-волн в диапазоне D от 10^4 до 10^7).

В типичных случаях, как на Солнце и звездах, ожидаемое динамо-число значительно превышает пороговое значение неустойчивости. Высокие

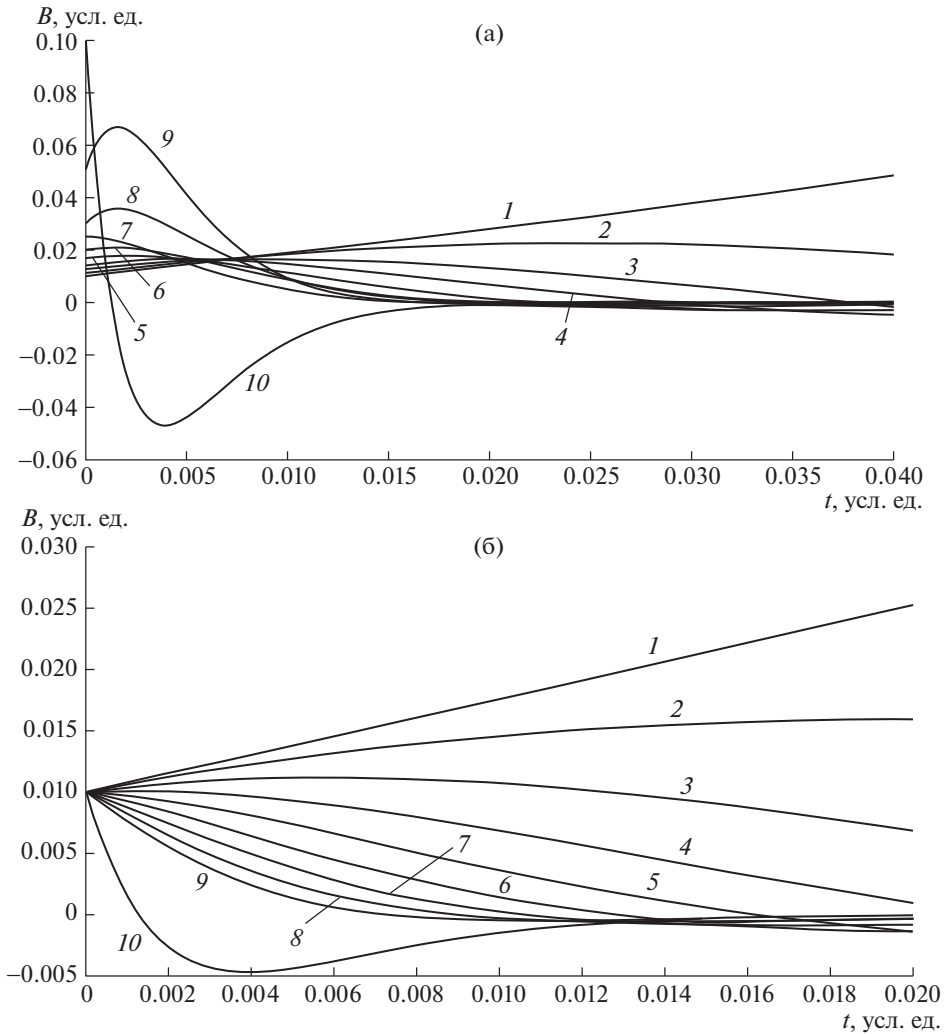


Рис. 1. Зависимость амплитуды тороидального магнитного поля от времени для разных (а) и одинаковых (б) начальных амплитуд на начальной стадии генерации.

моды с достаточно большим волновым вектором k становятся неустойчивыми, что требует более сложного многомодового подхода к нелинейной задаче. Кроме того, в исходной постановке учитывалось, что α -эффект и дифференциальное вращение зависят от θ , α пропорционально $\cos\theta$, а дифференциальное вращение пропорционально $\sin\theta$ в случае отсчета угла от полюса.

Можно показать, что амплитуды магнитного поля на стадии насыщения с большой точностью соответствуют полной компенсации превышения динамо-числа над порогом за счет нелинейного уменьшения α -эффекта:

$$D - D_{\text{cr}} = \frac{\delta\alpha_{\text{нел}}\Delta V}{\beta^2 k^2},$$

где $\delta\alpha_{\text{нел}} = \frac{\alpha_0 B^2}{B_0^2}$, β – коэффициент турбулентной диффузии, ΔV – скачок дифференциального вра-

щения на толщине эффективного слоя генерации магнитного поля.

Для исследования поведения гармоник в нашей задаче рассмотрим случай $n = 10$, для которого динамо-число Солнца находится в области применимости метода. Мы проводили также учет большего числа гармоник и нашли, что их вклад в решение пренебрежимо мал. Тороидальное поле B и векторный потенциал A представим в виде

$$B(\theta, t) = \sum_{n=1}^{10} b_n(t) \sin(2n\theta),$$

$$A(\theta, t) = \sum_{n=0}^{10} a_n(t) \sin((2n+1)\theta).$$
(2)

Подставляя выбранный вид решения в систему (1), получим динамическую систему из 20 уравнений относительно неизвестных функций $a_n(t)$ и $b_n(t)$. Поскольку данная система полу-

чается слишком громоздкой, мы ее здесь не приводим.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 представлена начальная стадия генерации магнитного поля Солнца для разных (а) и одинаковых (б) начальных амплитуд тороидального магнитного поля для динамо-числа, превышающего пороговое значение. Горизонтальной оси соответствует время, а вертикальной оси — амплитуда тороидального магнитного поля. Компоненты магнитного поля отмечены цифрами, соответствующими номеру n из соотношений (2). Из рис. 1 видно, что с течением времени даже при больших начальных значениях амплитуды поля самых коротковолновых волн остаются только самые длинноволновые гармоники. Это является результатом нелинейного уменьшения динамо-числа в процессе установления нелинейной стадии динамо, сопровождающегося переходом коротковолновых мод из неустойчивого состояния в затухающее.

Из полученных результатов можно сделать следующий вывод. Когда самое быстро нарастающее решение входит в нелинейную стадию и α -эффект уменьшается, начиная с каких-то амплитуд волна перестает нарастать, а соседние гармоники, первоначально нараставшие медленно, догоняют предыдущие и самые быстрые из них тоже начинают затухать. В конечном итоге на первый план выходят самые медленно растущие волны. Подобный эффект был отмечен в работах Бранденбурга [11, 12], в которых говорилось, что до процесса насыщения генерации поля может быть возбуждено несколько различных мод, в нелинейном режиме большая часть мод подавляется наиболее доминирующей модой, и нелинейность поэтому обладает эффектом “самоочищения” (нелинейная зачистка). Поэтому для моделирова-

ния генерации магнитного поля при динамо-числах, существенно превышающих порог генерации магнитного поля, нельзя ограничиваться только одной (или даже несколькими собственными функциями), соответствующей наиболее быстро нарастающему решению. Такая волна в конце концов перестает расти, выходит из игры и ее вклад в процесс генерации магнитного поля становится несущественным. Иными словами, динамо-число в процессе выхода в нелинейный режим насыщения уменьшается и моды, в начале процесса являвшиеся наиболее неустойчивыми, формально стали бы затухающими, так что их амплитуды в итоге поддерживаются нелинейной перекачкой энергии от крупномасштабных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Parker E.N.* // *Astrophys. J.* 1955. V. 122. P. 293–314.
2. *Brandenburg A., Subramanian K.* // *Physics Reports.* V. 417. P. 1–209.
3. *Ruzmaikin A.A.* // *Comm. Astrophys.* 1981. V. 9. P. 85–93.
4. *Kitiashvili I., Kosovichev A.G.* // *Astrophys. J.* 2008. V. 688. P. 49–52.
5. *Соколов Д.Д., Нефедов С.Н.* // *Вычислительные методы и программирование.* 2007. Т. 8. С. 195–204.
6. *Нефедов С.Н., Соколов Д.Д.* // *Астрон. журн.* 2010. Т. 87. С. 278–285.
7. *Собко Г.С., Задков В.Н., Соколов Д.Д., Трухин В.И.* // *Геомагнетизм и аэрономия.* 2012. Т. 52. С. 271–277.
8. *Popova H.* // *Magnetohydrodynamics.* 2013. V. 49. P. 59–67.
9. *Тарбеева С.М., Соколов Д.Д.* // *Астрон. журн.* 2016. Т. 93. № 7. С. 669–674.
10. *Deng S., Ji J., Wen G., Xu H.* // *Applied Mathematics and Computation.* 2021. V. 399 (4): 126016.
11. *Brandenburg A.* // *Astrophys. J.* 2001. V. 550. P. 824–840.
12. *Brandenburg A., Subramanian K.* // *Astron. Astrophys.* 2000. V. 361. P. 33–36.

INFLUENCE OF NONLINEARITY ON THE PROCESS OF MAGNETIC FIELD GENERATION IN STARS WITH SUFFICIENTLY LARGE DYNAMO NUMBERS

E. P. Popova^a

^a*Centro de Investigación en Astronomía, Universidad Bernardo O’Higgins, Santiago, Chile*

Presented by Academician of the RAS R.Z. Sagdeev

For a nonlinear dynamic system of equations describing the behavior of the harmonics of the solar magnetic field on the basis of the alpha-omega dynamo model, it is shown that at the beginning of the magnetic field generation process, when the dynamo number significantly exceeds the threshold, the most rapidly growing waves are in the lead, then over time, they are quite they quickly stop growing and the initially slowly growing ones become the leading ones, which then make the main contribution to the process of magnetic field generation.

Keywords: dynamo, magnetic field, dynamo number, stars, turbulent diffusion