

УДК 537.6

ТРЕХМЕРНЫЕ ВИХРИ И ИХ ДИНАМИКА В МОДЕЛИ ОДНООСНОГО ФЕРРО- И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА

© 2022 г. Член-корреспондент РАН А. Б. Борисов^{1,*}, А. С. Ковалев^{2,3,**}

Поступило 21.01.2022 г.

После доработки 21.01.2022 г.

Принято к публикации 05.04.2022 г.

Исследованы трехмерные структуры в модели одноосного ферромагнетика и динамика трехмерных структур в модели одноосного антиферромагнетика. Наложением подходящих дифференциальных связей на возможные решения эти исходные модели редуцируются к более простым системам уравнений для комплексных функций. Найденные подстановки сводят эти системы к интегрируемым уравнениям. В результате их решения обнаружены новые типы вихревых структур в одноосном ферро- и антиферромагнетике и исследована их простейшая динамика.

Ключевые слова: одноосный ферромагнетик, одноосный антиферромагнетик, вихри, доменная граница, интегрируемые системы

DOI: 10.31857/S2686740022040022

ВВЕДЕНИЕ

Среди различных нелинейных возбуждений магнитных сред в последнее десятилетие повышенный интерес привлекают вихревые структуры в различных магнитных системах. К настоящему времени двумерные вихри в ферро- и антиферромагнетиках достаточно подробно изучены [1–8] в различных магнитных системах. Однако для описания более сложных трехмерных структур необходимо использовать аналитические методы, которые наиболее эффективны в интегрируемых системах (см., например, [9]). Так, для идеализированной модели ферромагнетика (с учетом только обменных взаимодействий) справедлива изотропная модель Гейзенберга и недавно была доказана ее интегрируемость для трехмерного пространства [10], что позволило предсказать широкий класс новых структур, включая вихревые спиральные структуры.

Цель этой работы — аналитически исследовать стационарные трехмерные структуры в более ре-

алистичной модели одноосного ферромагнетика и динамику трехмерных структур в модели одноосного антиферромагнетика. Именно одновременный учет обменной энергии и энергии магнитной анизотропии обуславливает существование одномерных неоднородных магнитных структур (доменных границ), многие из которых полностью описаны аналитическими методами. Из-за существенной нелинейности уравнений, описывающих магнитные среды, для аналитического исследования неоднородных структур намагниченности часто возможно использование различных подстановок. В работе мы показываем, что наложение на возможные решения исходных уравнений определенных дифференциальных связей редуцирует эти уравнения описания магнетиков к более простой системе уравнений для комплексных функций. Мы показываем, что простые подстановки (поиск которых в уравнениях для одноосного ферромагнетика крайне затруднен) в этой системе уравнений редуцируют их к интегрируемым уравнениям.

Сообщение спланировано следующим образом. В разделе 1 для решения трехмерных уравнений модели одноосного ферромагнетика мы используем дифференциальную подстановку, которая приводит эти уравнения к одномерному статическому уравнению \sin -Gordon и системе из двух уравнений для комплекснозначной функции $S(\mathbf{r})$, однозначно определяющей вектор намагниченности. Далее, в разделе 2, мы показываем, что простая подстановка в этих уравнениях приводит их к интегрируемой модели двумерного изотроп-

¹Институт физики металлов им. М.Н. Михеева
Уральского отделения Российской академии наук,
Екатеринбург, Россия

²Физико-технический институт низких температур
им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины,
Харьков, Украина

³Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

*E-mail: borisov@imp.uran.ru

**E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

ного ферромагнетика, и это позволяет описать широкий класс трехмерных структур. В последнем разделе мы также используем дифференциальную подстановку, которая сводит уравнения динамики одноосного антиферромагнетика к системе уравнений для комплекснозначной функции $S(\mathbf{r}, t)$, и простая подстановка в ней редуцирует систему к интегрируемой модели трехмерного изотропного антиферромагнетика. На примере простого решения этих уравнений мы исследуем динамику магнитных структур типа “ежа” в R^3 .

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА

Плотность магнитной энергии E одноосного ферромагнетика

$$E = \frac{\alpha}{2}(\nabla \mathbf{M})^2 + \beta(M_3^2 - M_0^2) \quad (1)$$

зависит от постоянных обменного взаимодействия α и анизотропии β .

Если ввести безразмерный единичный вектор намагниченности $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ (M_0 – спонтанная намагниченность), то выражение (1) преобразуется к виду

$$\frac{E}{\alpha M_0^2} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{m})^2 - \frac{1}{2}K(m_3^2 - 1). \quad (2)$$

Единичный вектор \mathbf{m} параметризуется полями Θ, Φ :

$$\mathbf{m} = (\cos \Phi \sin \Theta, \sin \Phi \sin \Theta, \cos \Theta). \quad (3)$$

В этих переменных стационарные уравнения модели (2) переходят в систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \Theta &= \frac{1}{2} \sin 2\Theta (K + (\nabla \Phi)^2), \\ \nabla[(\nabla \Phi) \sin^2 \Theta] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение (1) инвариантно относительно группы $SO(2) \times SO(3)$ спиновых и пространственных вращений. Такая симметрия позволяет найти широкий класс точных решений. Аналитическое решение уравнений (4) возможно лишь в определенных классах решений. Для выделения одного из них нужно обобщить процедуру, предложенную в [9, 10], и положить поле Θ локально зависящим от вспомогательного поля $a[x, y, z]$: $\Theta(x, y, z) = \Theta(a[x, y, z])$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнений

$$\Theta''(a) = \frac{1}{2} \sin 2\Theta(a), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta a &= \Delta \Phi = 0, \\ (\nabla a)^2 &= K + (\nabla \Phi)^2, \quad \nabla a \nabla \Phi = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

следуют уравнения (4). Здесь и далее $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ – трехмерный оператор Лапласа.

В дальнейшем нас интересует решение $\Theta(a[x, y, z])$ уравнения (5) в виде решетки солитонов:

$$\cos \Theta = \operatorname{sn} \left[\frac{a}{k}, k \right], \quad 0 < k < 1, \quad (7)$$

которое упрощается при $k = 1$:

$$\Theta = 2 \operatorname{arctg} [\exp(-a)]. \quad (8)$$

Дифференциальные связи (6), как увидим далее, приводят к новому классу точных решений модели (1).

Перейдем к решению уравнений (6). Введем комплекснозначное поле

$$S = a + i\Phi \quad (9)$$

и запишем систему (6) в виде системы из двух уравнений для поля S :

$$(\nabla S)(\nabla S) - K = 0, \quad (10)$$

$$\Delta S = 0. \quad (11)$$

2. ТРЕХМЕРНЫЕ МАГНИТНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ОДНООСНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Рассмотрим некоторые статические топологические возбуждения вихревого типа с цилиндрической симметрией в трехмерном пространстве, которые допускают аналитические выражения. В случае двумерной системы решения вихревого типа в терминах функции S имеют вид

$$S(r, \varphi) = iq\varphi + R(r),$$

где q – топологический заряд, а (r, φ) – цилиндрические координаты двумерной системы. Решения для функций $R(r)$ в двумерном случае могут быть получены только численно. В случае легкоплоскостного ферромагнетика это решение для магнитного вихря было получено в [4]. В нем компонента намагниченности убывает от M_0 практически до нуля в интервале $0 < r < l_0$, где магнитная длина $l_0 = 1/\sqrt{K}$. При этом функция $R(r)$ локализована в этой области и расходится в нуле как $R \approx -q \ln(r/l_0)$. В случае легкоосного ферромагнетика могут существовать вихреобразные возбуждения, в которых намагниченность меняется от M_0 до $-M_0$ с ростом r от нуля до бесконечности [6]. Но такое возбуждение может существовать только как динамическое при прецессии вектора намагниченности вокруг легкой оси с конечной частотой ω . В статическом случае такой солитон делокализуется, а при $\omega \rightarrow 1$ превращается в особенность с минимальной энергией.

При переходе к трехмерной системе можно учесть некоторые частные случаи дополнительных зависимостей функции S от третьей координаты z , при которых допускаются аналитические выражения для рассмотренных вихрей и вихреобразных состояний.

Из обширного класса решений системы (10), (11) выберем в цилиндрической системе координат вихревые решения простейшего вида, используя разделение переменных

$$S(r, \varphi, z) = iq\varphi + R(r) + Z(z) \quad (q \in Z). \quad (12)$$

Тогда из (10), (11) сразу следует, что $Z(z)$ есть линейная функция своего аргумента $Z(z) = \sqrt{K}z = z/l_0$:

$$Z(z) = \sqrt{K}z$$

и

$$R(r) = -q \ln \frac{r}{r_0}.$$

Обратим внимание, что эта зависимость $Z(z)$ однозначно определяется магнитной анизотропией. При этом в отличие от двумерного случая для функции $R(r)$ получается аналитическое выражение. Кроме этого, в отличие от двумерного случая, в котором характерные размеры решений определялись магнитной длиной l_0 и частотой прецессии, теперь в решении появляется произвольный параметр r_0 . Такая ситуация характерна для изотропных магнетиков.

В итоге

$$S = iq\varphi + \sqrt{K}z - q \ln \frac{r}{r_0}. \quad (14)$$

Эта зависимость выглядит по-разному в случае анизотропии типа легкой оси и легкой плоскости.

Рассмотрим вначале случай легкой оси с $K > 0$. Координатные зависимости угловых переменных намагниченности Φ и Θ определяются формулами (8), (9):

$$\Phi = q\varphi, \quad \Theta = 2 \arctg \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^q \exp(-\sqrt{K}z) \right]. \quad (15)$$

При $q \neq 0$ это решение – решение вихревого типа. Поскольку асимптотики решения на оси структуры и на бесконечности имеют вид при $q > 0, r > 0$

$$\Theta(r = 0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Theta = \pi,$$

то решение (15) представляет собой аксиально симметричную доменную границу (с центром при $\Theta = \pi/2$), форма которого описывается формулой

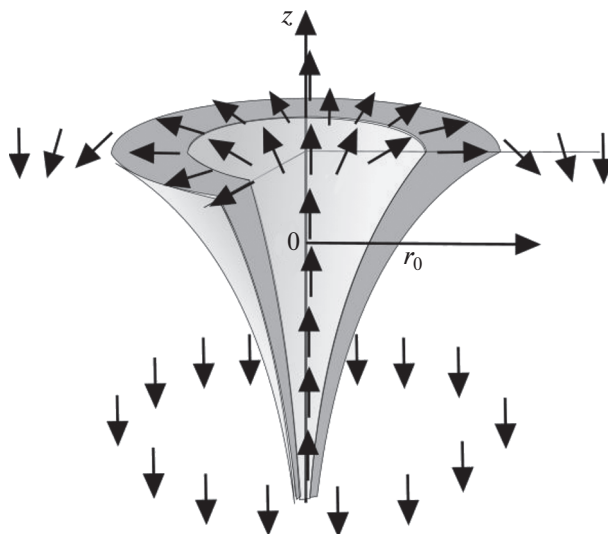


Рис. 1. Распределение намагниченности, соответствующее решению (15) для вихревой кольцевой доменной стенки. Выделена область основного изменения намагниченности в стенке от $\Theta \approx 0$ до $\Theta \approx \pi$.

$$r = l_0 \exp \left(\frac{z - z_0}{ql_0} \right),$$

где произвольная константа $z_0 = ql_0 \ln \left(\frac{l_0}{r_0} \right)$ связана с константой r_0 . Таким образом, выбор z_0 связан с перемещением всей вихревой структуры на произвольную величину вдоль координаты z . Приведенная доменная стенка обладает необычной структурой. Обычно в многомерном магнетике ширина такой стенки в направлении, перпендикулярном плоскости стенки, фиксирована и равна l_0 . В данном случае размеры стенки составляют $\delta z \sim ql_0$ и $\delta r \sim l_0 \exp \left(\frac{z}{ql_0} \right)$, и, следовательно, ее ширина меняется от $\Delta \sim l_0$ при $z \rightarrow \infty$ до нуля в пределе $z \rightarrow -\infty$ (см. рис. 1).

По-видимому, предложенное вихревое состояние может реализоваться в магнитных цилиндрических нанодотах, плоские границы которого контактируют с жесткими ферромагнетиками с противоположными направлениями намагниченности, которые ориентируют намагниченность в нанодоте в вихревом состоянии (рис. 2). При этом параметр $2r_0$ (или z_0) перестает быть произвольным. Для магнитного нанодота радиуса R и высотой h в конфигурации рис. 2 он равен $z_0 = h - ql_0 \ln \left(\frac{R}{l_0} \right)$. Для того чтобы на нижней границе дота радиус кора вихревой структуры был порядка магнитной длины, необходимо выполне-

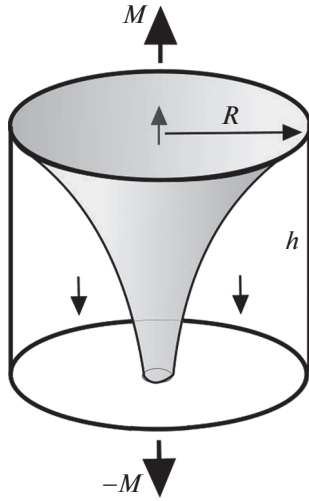


Рис. 2. Возможная реализация трехмерного вихревого возбуждения, соответствующего решению (15) в магнитном нанодоте с фиксированной намагниченностью на торцах.

ние условия $h/l_0 \sim \ln\left(\frac{R}{l_0}\right)$. Такое соотношение выполняется, например, при выборе параметров $h = 10$ нм, $R = 100$ нм, $l_0 = 4$ нм, использованном авторами [11] для численной симуляции динамики магнитных вихрей.

Совсем иная структура решения для легкоплоскостного ферромагнетика с $K < 0$. Для него

$$\Phi = \sqrt{-K}z + q\varphi, \quad \Theta = 2\text{arctg}\left(\frac{r_0}{r}\right)^q, \quad (16)$$

и изменение структуры по переменной z просто сводится к общему повороту распределения векторов \vec{m} в плоскости XY , периодичного по оси Oz с периодом $2\pi/\sqrt{-K}$, при перемещении вдоль этой оси. Отметим, что в решении (15) для легкоосного ферромагнетика изменение произвольного параметра r_0 не меняет масштабы решения, а просто сдвигает всю магнитную структуру вдоль оси Oz . В решении же (16) для легкоплоскостного магнетика выбор произвольного параметра r_0 меняет характерный размер вихревого состояния в плоскости XY .

Формула (14) указывает на подстановку, которая при наличии дифференциальной связи редуцирует трехмерные уравнения одноосного магнетика к двумерным уравнениям изотропного магнетика.

Положим

$$S(x, y, z) = \sqrt{K}z + S(x, y). \quad (17)$$

Тогда уравнения (9), (10) преобразуются к дифференциальной связи

$$(\nabla S)(\nabla S) = 0, \quad (18)$$

$$\Delta S = 0 \quad (19)$$

для двумерных стационарных структур изотропного ферромагнетика.

Отметим, что подстановка (17) основана не только на приведенном выше примере. Нетрудно проверить, что после замены $S(x, y, z) \rightarrow i\sqrt{K}U(x, y, z)$ и подстановки ее в (10), (11) следует уравнение

$$\begin{aligned} \partial_x^2 U(1 + (\partial_y U)^2) - 2\partial_{xy}^2 U \partial_x U \partial_y U + \\ + \partial_y^2 U(1 + (\partial_x U)^2) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

которое совпадает со знаменитым уравнением минимальных поверхностей [12], где z входит в качестве параметра. Известно, что после преобразования координат

$$x \rightarrow x(\xi, \eta), \quad y \rightarrow y(\xi, \eta), \quad S \rightarrow S(\xi, \eta, z)$$

уравнение (20) эквивалентно системе для x, y, U :

$$\Delta x = \Delta y = \Delta S = 0 \quad (\Delta = \partial_\xi^2 + \partial_\eta^2),$$

$$(\partial_\xi x)^2 + (\partial_\xi y)^2 + (\partial_\xi S)^2 = (\partial_\eta x)^2 + (\partial_\eta y)^2 + (\partial_\eta S)^2, \quad (21)$$

$$\partial_\xi x \partial_\eta x + \partial_\xi y \partial_\eta y + \partial_\xi S \partial_\eta S = 0.$$

Так как x, y не зависят от z , то из (21) сразу следует, что зависимость $S(\xi, \eta, z)$ от параметра z входит аддитивно:

$$S(\xi, \eta, z) = Z(z) + S(\xi, \eta).$$

Широкий класс точных решений (18), (19) (инстантоны) был найден Белаиным и Поляковым в известной работе [8]. Авторы показали, что выражение

$$\text{ctg} \frac{\Theta}{2} \exp i\Phi = F[u], \quad (u = x + iy) \quad (22)$$

с рациональной комплексной функцией F будет точным решением двумерных уравнений изотропного магнетика. Из (8), (9) сразу следует соотношение

$$\text{ctg} \frac{\Theta}{2} \exp i\Phi = \exp S. \quad (23)$$

Поэтому при $S = \ln F[u]$, где F есть рациональная функция от u , с учетом соотношений (8), выражение (17) будет точным решением трехмерных уравнений одноосного ферромагнетика. Кроме того, более общий класс структур двумерного изотропного магнетика (спиральные вихри)

$$a + i\Phi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{\pi} k K(k) N_i + Q_i \right) \ln(u - c_i) \quad (u = x + iy),$$

$$\cos \Theta = \text{sn} \left(\frac{a}{k}, k \right) \quad (N_i, Q_i \in \mathbb{Z}) \quad (24)$$

можно получить из результатов работы [13] с помощью общего решения (7) уравнения \sin -Gordon (5). Оно описывает инстантоны, спиральные вихри, магнитные мишени, локализованные в точках $u = c_i$, и их взаимодействие. Простейшим из них является выбор $S(x, y)$ в виде

$$S(x, y) = \left[Q + \frac{2ikK(k)}{\pi} N \right] \ln u \quad (25)$$

$(Q, N \in \mathbb{Z}).$

Тогда при $K > 0$

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \operatorname{sn} \left(\frac{a}{k}, k \right), \\ a &= \sqrt{Kz} + \frac{2kK(k)}{\pi} N \varphi + Q \ln \frac{r}{r_0}, \\ \Phi &= \frac{2kK(k)}{\pi} N \ln \frac{r}{r_0} + Q\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Величины Θ , Φ постоянны на кривых в плоскости (x, y) , которые являются логарифмическими спиралями.

Отметим, что впервые трехмерное решение для одноосного ферромагнетика было найдено Ходенковым [14] в эллиптической и цилиндрической системах координат. В последнем случае оно совпадает с (15). Отметим также, что при $N = 0$ (22) совпадает с решением, полученным в [15].

3. ДИНАМИКА ОДНООСНОГО АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА

Двухподрешеточный антиферромагнетик в феноменологической теории описывается двумя локальными плотностями магнитных моментов $\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$ (при низких температурах $\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t) = M_0 = \text{const}$), или векторами ферромагнетизма $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$ и антиферромагнетизма $\mathbf{L}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$.

Уравнения динамики антиферромагнетика в обменном приближении были выведены в [16]. Эффективные уравнения динамики солитонов в одноосном антиферромагнетике были получены в [1, 3, 15, 17] при физически оправданных допущениях $\mathbf{M}^2 \ll \mathbf{L}^2$. Эта процедура упрощения уравнений эволюции трехмерных структур в антиферромагнетике (даже при наличии дополнительных взаимодействий) широко применялись во всех последующих работах (см. [18–21] и цитированную там литературу). В этих работах авторы, используя Лоренц-инвариантность уравнений, редуцировали их к уравнениям трехмерных структур, переходя в равномерно движущуюся вдоль одной из осей систему координат и используя дифференциальные связи, подобные введенным в [9], и анализи-

ровали полученные трехмерные решения. В этой работе мы не используем переход к подвижной системе координат, а исследуем широкий класс динамических трехмерных структур в исходном базисе.

Для вывода необходимых уравнений рассмотрим плотность энергии [1]

$$\begin{aligned} E &= A\mathbf{m}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \sum_{i=1}^3 (\nabla m_i)^2 + \\ &+ \frac{\alpha_2}{2} \sum_{i=1}^3 (\nabla l_i)^2 - \frac{K_2}{2} l_3^2 - \frac{K_1}{2} m_3^2 \end{aligned} \quad (27)$$

для нормированных векторов

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{2M_0}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{L}}{2M_0}. \quad (28)$$

При указанных выше упрощениях из уравнений динамики [1] следует, что

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial_t \mathbf{L} \times \mathbf{L}}{8A\gamma M_0^2} \quad (29)$$

и вектор \mathbf{l} можно полагать единичным вектором:

$$\mathbf{l} = (\cos \Phi \sin \Theta, \sin \Phi \sin \Theta, \cos \Theta). \quad (30)$$

В итоге уравнения динамики антиферромагнетика записываются в простом виде

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \Theta - c^2 \Delta \Theta + \frac{1}{2} \sin(2\Theta) (K - \partial_t \Phi^2 + c^2 (\nabla \Phi)^2) &= 0, \\ 2 \cos \Theta (\partial_t \Phi \partial_t \Theta - c^2 \nabla \Phi \nabla \Theta) + \\ + \sin \Theta (\partial_t^2 \Phi - c^2 \Delta \Phi) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Как и в предыдущем разделе, положим поле Θ локально зависящим от вспомогательного поля $a(x, y, z)$: $\Theta = \Theta(a[x, y, z])$ и наложим условия – дифференциальные связи

$$\begin{aligned} \partial_t^2 a - c^2 \Delta a &= \partial_t^2 \Phi - c^2 \Delta \Phi = 0, \\ \partial_t \Phi \partial_t \Theta - c^2 (\nabla \Phi, \nabla \Theta) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$-K + (\partial_t \Phi)^2 - c^2 (\nabla \Phi)^2 = (\partial_t a)^2 - c^2 (\nabla a)^2.$$

Здесь

$$c^2 = 8AM_0^2 \gamma^2 \alpha_2, \quad K = \frac{c^2 K_2}{\alpha_2}.$$

Тогда уравнения (31) справедливы при условии

$$\Theta''(a) = \frac{\sin 2\Theta(a)}{2}. \quad (33)$$

Для решения дифференциальных связей (32) введем снова комплекснозначное поле

$$S = a + i\Phi \quad (34)$$

и запишем систему (32) в виде системы из двух уравнений для поля S :

$$K + (\partial_t S)^2 - c^2 (\nabla S)(\nabla S) = 0, \quad (35)$$

$$-\partial_t^2 S + c^2 \Delta S = 0. \quad (36)$$

Выберем далее решение (33) снова в виде 2π -солитона (7).

Следуя операциям, используемым в предыдущих разделах, введем элементарную подстановку

$$S(x, y, z, t) = h\sqrt{-Kt} + \tilde{S}(x, y, z), \quad h = \pm 1. \quad (37)$$

Тогда (35), (36) переходят в систему дифференциальных связей

$$\Delta \tilde{S} = 0, \quad (\nabla \tilde{S})(\nabla \tilde{S}) = 0 \quad (38)$$

для изотропного трехмерного ферромагнетика. Их решение, полученное в [10], определяется произвольной функцией F :

$$\tilde{S}(x, y, z) = F(B(x, y, z)),$$

где поле $B(x, y, z)$ подчиняется неявному уравнению

$$G[H_1 \sin B + H_2 \cos B, H_3] = 0, \\ H_1 = -i \sin Bz + x, \\ H_2 = -iz \cos B + y, \quad H_3 = B \quad (39)$$

с произвольной функцией G .

В качестве примера рассмотрим динамику “ежа”. В сферической системе координат (R, θ, φ) уравнения (39) имеют простое решение

$$\tilde{S}(R, \theta, \varphi) = F\left[i\varphi + \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right] \quad (40)$$

с произвольной функцией F . Положим $F = 1$. Тогда

$$S = h\sqrt{-Kt} + i\varphi + \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (41)$$

Нетрудно проверить, что $\Phi = \varphi$, $\Theta = \theta$ при $t = 0$, и эта структура совпадает со структурой “ежа”

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

и является точным решением уравнений изотропного ферромагнетика и уравнения для поля директора для описания упругих свойств жидких кристаллов в одноконстантном приближении.

Используя (41) и разбиение (34), найдем нетривиальную эволюцию ежа в одноосном антиферромагнетике. При $K < 0$ (легкоплоскостной антиферромагнетик)

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi, \quad a(x, y, z, t) = h\sqrt{|Kt}| + \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

$$\Theta(x, y, z, t) = 2\arctg\left(\exp\left[-h\sqrt{|Kt}|\right] \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) \quad (h = \pm 1).$$

Наблюдается следующая картина эволюции антиферромагнитного ежа. При выборе $h = 1$ при

$t \rightarrow -\infty$ еж есть однородно “причесанное” состояние с $\Theta = \pi$ за исключением линейной особенности на полуоси $z > 0$. Далее в момент времени $t = 0$ он превращается в ежа Белавина–Полякова без особых линий в трехмерном пространстве, и затем в пределе $t \rightarrow +\infty$ снова превращается в “причесанное” однородное состояние с $\Theta = 0$ и особенностью на полуоси $z < 0$. Поскольку в антиферромагнетике состояния $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi$ неразличимы, то вся временная эволюция в пределе сводится к изменению положения особенности.

При $K > 0$ (легкоосный антиферромагнетик)

$$\Phi = \varphi + h\sqrt{Kt}, \quad a = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad \Theta(x, y, z, t) = \theta,$$

и динамика ежа свелась к вращению вокруг оси z (волчок). Отклонение вектора АФМ от легкой оси вызвано прецессией с определенной частотой $h\sqrt{K}$ – частотой однородного АФМ-резонанса. Заметим, что в рассмотренных решениях всю динамику в одноосном антиферромагнетике определяет только анизотропия.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны Д.В. Долгих за неоценимую помощь в подготовке рукописи и полезные замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер г.р. АААА-А18-118020190095-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983. 123 с.
2. *Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S.* Magnetic Solitons // Physics Reports. 1990. V. 194. № 3–4. P. 117–238. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90130-T](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90130-T)
3. *Иванов Б.А., Колежук А.К.* Солитоны в низкоразмерных антиферромагнетиках (обзор) // Фізика низьких температур. 1995. Т. 21. № 4. С. 355–389.
4. *Kosevich A.M., Voronov V.P., and Manzhos I.V.* Nonlinear collective excitations in an easy plane magnet // J. Exp. Theor. Phys. 1983. V. 57. № 1. P. 86–92.
5. *Nikiforov A.V., Sonin E.B.* Dynamics of magnetic vortices in a planar ferromagnet // J. Exp. Theor. Phys. 1983. V. 58. № 2. P. 373–378.
6. *Ковалев А.С., Косевич А.М., Маслов К.В.* Магнитный вихрь – топологический солитон в ферромагнетике с анизотропией типа легкой ось // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. № 6. С. 321–324.
7. *Bogdanov A.N., Yablonskii D.A.* Thermodynamically stable “vortices” in magnetically ordered crystals. The

- mixed state of magnets // *J. Exp. Theor. Phys.* 1989. V. 68. № 1. P. 101–103.
8. *Белавин А.А., Поляков А.М.* Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // *Письма в ЖЭТФ.* 1975. Т. 22. № 10. С. 503–506.
 9. *Борисов А.Б.* Спиральные трехмерные структуры в ферромагнетике // *Письма в ЖЭТФ.* 2002. Т. 76. Вып. 2. С. 95–98.
 10. *Борисов А.Б.* Об интегрируемости $O(3)$ -модели // *Уфимский математический журнал.* 2021. Т. 13. № 2. С. 6–10.
 11. *Taurel B., Valet T., Naletov V.V., Vukadinovic N., de Loubens G., and Klein O.* Complete mapping of the spin-wave spectrum in a vortex-state nanodisk // *Phys. Rev. B* 2016. V. 93. P. 184427. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.184427>
 12. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
 13. *Борисов А.Б.* Спиральные вихри в ферромагнетике // *Письма в ЖЭТФ.* 2001. Т. 73. № 5. С. 279–282.
 14. *Ходенков Г.Е.* Некоторые точные многомерные решения уравнений Ландау–Лифшица в одноосном ферромагнетике // *ФММ.* 1982. Т. 54. С. 644.
 15. *Var'yakhtar V.G., Ivanov B.A., and Sukstanskil A.L.* Nonlinear waves and the dynamics of domain walls in weak ferromagnets // *J. Exp. Theor. Phys.* 1980. V. 51. № 4. P. 757–764.
 16. *Андреев А.Ф., Марченко В.И.* Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // *УФН.* 1980. Т. 130. № 1. С. 39–63.
 17. *Galkina E.G., Ivanov B.A.* Dynamic solitons in antiferromagnets // *Low Temperature Physics.* 2018. V. 44. P. 618. <https://doi.org/10.1063/1.5041427>
 18. *Горобец О.Ю., Горобец Ю.И.* Топологические характеристики строительных блоков в доменной стенке антиферромагнетика со взаимодействием Дзялошинского–Мория // *Фізика низьких температур.* 2020. Т. 46. № 8. С. 1008–1013. <https://doi.org/10.1063/10.0001553>
 19. *Dzhezherya Y.I., Sorokin M.V., Bubuk E.A.* The vortex state of an antiferromagnet with uniaxial anisotropy // *J. Exp. Theor. Phys.* 2005. V. 100. P. 559–567.
 20. *Gorobets O.Yu., Gorobets Yu.I., Kovalenko V.S.* 3D Analytical Model of Skyrmions and Skyrmion-like Structures in a Two-sublattice Antiferromagnet with Dzyaloshinskii–Moriya Interaction. arXiv. 2019. December.
 21. *Gorobets Y.I., Gorobets Y., Kulish V.V.* Spin waves in a two-sublattice antiferromagnet. A self-similar solution of the Landau–Lifshitz equation // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017. V. 42. P. 52–61. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.05.006>

3D VORTICES AND THEIR DYNAMICS FOR THE MODELS OF UNIAXIAL FERRO- AND ANTIFERROMAGNETS

Corresponding Member of the RAS **A. B. Borisov^a** and **A. S. Kovalev^{b,c}**

^a*M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

^b*B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*

^c*V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine*

3D structures for the model of uniaxial ferromagnet and dynamics of 3D structures for the model of uniaxial antiferromagnet are investigated. Imposing suitable differential constraints upon the set of possible solutions reduces the models to the simpler systems of equations for the complex functions. Discovered substitutions lead the systems to the integrable equations. As the result, new types of vortex structures for uniaxial ferro- and antiferromagnets are found, their simplest dynamics is studied.

Keywords: uniaxial ferromagnet, uniaxial antiferromagnet, vortices, magnetic domain boundary, integrable systems