

УДК 534.23, 532.517.4

## О РАЗДЕЛЕНИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В МОДЕЛИ ЗВУКОВЫХ ИСТОЧНИКОВ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

© 2022 г. В. Ф. Копьев<sup>1</sup>, С. А. Чернышев<sup>1,\*</sup>

Поступило 25.04.2022 г.

После доработки 12.05.2022 г.

Принято к публикации 12.05.2022 г.

В работе исследуется механизм генерации шума в турбулентной струе на основе метода акустической аналогии. Целью работы является разработка модели звукового источника, в которой отсутствует так называемая сдвиговая компонента шума. Это условие было сформулировано ранее в результате анализа мультимикрофонных акустических измерений струи, которые показали, что акустические аналогии, учитывающие сдвиговой шум, расходятся с данными эксперимента. Предложенная в настоящей работе модель основана на разделении акустических и гидродинамических переменных и использовании оператора распространения, в котором не содержатся гидродинамические степени свободы. Такой подход позволяет естественным образом исключить сдвиговую компоненту в звуковом излучении и добиться хорошего соответствия данным акустических измерений. Моделирование звукового источника проводится в рамках предположений о квадрупольности и изотропности пульсаций, ответственных за звуковое излучение. Проводится сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными по направленности основных азимутальных гармоник звукового излучения струи со скоростью 120 м/с. Полученные результаты дают важный вклад в понимание природы излучающей звук турбулентности в сдвиговых потоках.

*Ключевые слова:* турбулентная струя, генерация шума, акустическая аналогия, квадруполь, сдвиговой шум

DOI: 10.31857/S268674002205008X

### ВВЕДЕНИЕ

Стандартным подходом к описанию генерации шума мелкомасштабной турбулентностью является метод акустической аналогии. Этот метод основан на разделении процессов генерации и распространения акустических возмущений. При этом распространение звуковых волн описывается линейным оператором, а источник, отвечающий за генерацию звуковых колебаний, моделируется случайным полем, параметры которого подбираются из условий соответствия данным измерений или численных расчетов. В процессе развития представлений о шуме турбулентной струи был разработан ряд акустических аналогий, различающихся по тому, какие эффекты отнесены к распространению звука или его генерации [1–5]. Несмотря на значительную историю, в ме-

тоде акустической аналогии остается ряд открытых вопросов, связанных с выделением той части гидродинамических пульсаций в турбулентной струе, которая ответственна за генерацию звуковых волн. В частности, остается нерешенной проблема сдвигового шума [6], представляющего собой вторичное звуковое излучение от вихревых колебаний сдвигового слоя, возбуждаемых первичными источниками в правой части соответствующей акустической аналогии. Сдвиговой шум возникает в тех акустических аналогиях, в которых оператор распространения обладает гидродинамическими степенями свободы. В этом случае правая часть акустической аналогии не только служит непосредственным источником звуковых волн, но также осуществляет накачку собственных вихревых возмущений оператора распространения, которые, в свою очередь, являются дополнительным источником звука [7]. В частности, это касается аналогии Голдстейна [4] и уравнения Лилли [3], в которых оператор распространения включает в себя все линейные по возмущениям члены, в том числе ответственные за вихревые возмущения среднего течения. Один из главных вопросов в методе акустической

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

\*E-mail: chernyshev01@mail.ru

аналогии, не закрытый до сих пор, состоит в том, имеет ли сдвиговая компонента шума физическую природу, или это артефакт, связанный с тем, как в той или иной акустической аналогии осуществляется разделение процесса звукового излучения на генерацию и распространение звука.

Акустические измерения шума струи [8], полученные с помощью многомикрофонных методов [9], позволяют вернуться к этой проблеме на новом уровне. В частности, данные по направленности азимутальных гармоник звукового излучения свидетельствуют скорее об отсутствии сдвиговой компоненты в шуме струи. Этот факт играет важную роль, сужая круг возможных сценариев генерации шума. Например, он означает, что акустические аналогии, в которых оператор распространения содержит в себе гидродинамические степени свободы, не соответствуют физике процесса излучения звука турбулентным потоком, что проявляется в существенном и неоправданном усложнении эмпирической модели звуковых источников.

Целью настоящей работы является разработка подхода к моделированию шума струи с помощью акустической аналогии, которая не привела бы к появлению сдвигового шума. С этой целью предлагается новая акустическая аналогия, основанная на специальном разделении гидродинамических и акустических переменных, при котором к звуковому источнику отнесены все гидродинамические пульсации, а не только нелинейные по возмущениям члены, как это делается в аналогии Голдстейна. В этом случае в операторе распространения нет гидродинамических степеней свободы, и он сводится к конвективному волновому уравнению, описывающему распространение звуковых волн в пассивной неоднородной среде. Именно это свойство позволяет исключить из модели сдвиговую компоненту шума.

Конвективное волновое уравнение для описания распространения звуковых волн в неоднородном потенциальном потоке впервые было получено в работе [10]. В методе акустических аналогий конвективное волновое уравнение для возмущений давления впервые использовалось в работе [2]. Впоследствии аналогичный подход для возмущений полной энтальпии был предложен в работе [5], где в качестве оператора распространения используется обобщенный оператор Блохинцева [11]. Конвективный волновой оператор также использовался при разработке численных методов расчета аэродинамического шума [12, 13]. Преимущество такого подхода состояло в том, что в отличие от других операторов распространения, использование которых в численных расчетах требует принудительного подавления волн неустойчивости, конвективное волновое уравнение не содержит неустойчивых мод среди

собственных решений оператора, что автоматически обеспечивает устойчивость численной схемы. В настоящей работе показано, что при моделировании шума струи важную роль играет не только устойчивость оператора распространения, но и отсутствие нейтральных гидродинамических волн среди собственных решений оператора.

При описании возмущений в данной работе используется разложение возмущений скорости на две компоненты, которые выражаются через акустический потенциал и плотность вихревого импульса. Ранее такое разделение переменных использовалось в работах [14–17] для описания линейных возмущений вихревых течений. В частности, в работе [17] для этой системы был выписан лагранжиан, что позволило получить выражения для плотности и потока акустической энергии в вихревых течениях.

В качестве основных переменных в настоящей работе используются акустический потенциал и плотность вихревого импульса. При этом линеаризация проводится только для процесса распространения звуковых волн, описываемого акустическим потенциалом, в то время как звуковой источник, определяемый плотностью вихревого импульса, имеет нелинейную динамику. После преобразований этот источник моделируется случайным полем. Такой подход соответствует физике рассматриваемого процесса. Действительно, малые величины возмущений скорости и плотности по сравнению со средними значениями этих величин позволяют описывать линейными уравнениями распространение звуковых волн в неоднородном течении струи. В то же время возмущения завихренности для мелкомасштабных турбулентных пульсаций оказываются не малыми, в связи с чем плотность вихревого импульса, определяющего звуковой источник, имеет нелинейную динамику. Вместо описания сложной нелинейной динамики турбулентных пульсаций используется стандартный подход, состоящий в представлении пульсаций в виде случайного поля в рамках сформулированного в работе метода акустических аналогий.

При моделировании параметров звуковых источников используется ряд физических представлений о вихревой динамике мелкомасштабной турбулентности в струе. В частности, предполагается, что основной вклад в излучение дают квадрупольные источники, обладающие свойством изотропности. Хотя течение струи имеет выделенное направление, это не исключает возможности того, что на малых масштабах турбулентные пульсации обладают свойством изотропности. Вопрос состоит в том, является ли изотропной та часть турбулентности, которая ответственна за излучение звука. Для проверки этой гипотезы используются данные, полученные по

методу азимутальной декомпозиции [9]. Показано, что соотношение амплитуд азимутальных гармоник звукового излучения струи действительно соответствует предположению об изотропности квадрупольных источников.

На основе предложенного подхода определены направленности азимутальных гармоник звукового излучения струи. Результаты моделирования сравниваются с данными измерений в дальнем звуковом поле для струи со скоростью 120 м/с. Получено хорошее совпадение результатов моделирования и эксперимента, что при учете нетривиальной формы направленности отдельных гармоник указывает на то, что предлагаемая акустическая аналогия правильно описывает основные факторы в механизме генерации шума в турбулентной струе.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается изэнтропическое течение сжимаемого идеального газа. В этом случае уравнения неразрывности и импульса записываются в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nabla \frac{v^2}{2} + \nabla h = 0, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}, \rho, h$  – поля скорости, завихренности, плотности и энтальпии. Изменение энтальпии  $dh$  в общем случае определяется через другие термодинамические переменные соотношением

$dh = TdS + \frac{1}{\rho} dp$ , где  $T, S, p$  – температура, энтропия и давление. В случае изэнтропического течения эти переменные связаны соотношениями  $dh = \frac{1}{\rho} dp$ ,  $d\rho = \frac{1}{c^2} dp$ , где  $c$  – скорость звука.

В турбулентной дозвуковой струе пульсации завихренности, очевидно, имеют нелинейную динамику. В то же время возмущения скорости и плотности являются относительно малыми, что позволяет частично линеаризовать систему уравнений (1.1), (1.2). Представим поля скорости и плотности в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , где  $\mathbf{V}_0, \rho_0$  – средние поля скорости и плотности,  $\mathbf{v}', \rho'$  – возмущения. Будем рассматривать случай изотермической струи, для которой  $\rho_0 = \text{const}$ . С учетом квазиоднородности течения струи примем  $\nabla \mathbf{V}_0 = 0$ . Тогда для линейных возмущений из уравнения неразрывности (1.1) получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \rho' + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' = 0. \quad (1.3)$$

В области потенциального течения линеаризуем также уравнение импульса. Представляя возмущение скорости в виде  $\mathbf{v}' = \nabla \Phi$ , из (1.2) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \Phi + h' = 0, \quad (1.4)$$

где  $h'$  – возмущения энтальпии.

В области завихренного течения уравнения не могут быть полностью линеаризованы, поскольку в турбулентном потоке пульсации завихренности  $\boldsymbol{\Omega}'$  на малых масштабах могут иметь величину, превышающую среднюю завихренность  $\boldsymbol{\Omega}_0$ . Представим возмущение скорости в виде разложения

$$\mathbf{v}' = \mathbf{B} + \nabla \Phi, \quad (1.5)$$

где поле  $\mathbf{B}$  отлично от нуля только в области завихренности, и, соответственно, в области потенциального течения поле  $\Phi$  представляет собой потенциал скорости.

Аналогичное представление для линейных возмущений использовалось в работах [15–17], где вихревая составляющая  $\mathbf{B}$  выражалась через поле смещения  $\xi$  соотношением  $\mathbf{B} = \xi \times \boldsymbol{\Omega}_0$ , а для потенциала  $\Phi$  было получено конвективное волновое уравнение с источником в правой части

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{D\Phi}{Dt} \right) - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \Phi) = \nabla \mathbf{B}, \quad (1.6)$$

где  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{V}_0 \nabla$  – конвективная производная.

В такой постановке поле  $\mathbf{B}$  так же, как и потенциал, рассматривается как малое возмущение стационарного течения, и для него выписывается соответствующее линейное уравнение.

В рассматриваемом случае вихревая составляющая  $\mathbf{B}$  имеет нелинейную динамику и не может быть выражена через малые смещения стационарного поля завихренности, как в случае линейной задачи. Тем не менее для потенциала  $\Phi$  по-прежнему может быть получено конвективное волновое уравнение. Для того чтобы это показать, необходимо дополнить разложение (1.5) условием, в соответствии с которым потенциал  $\Phi$  определяется уравнением (1.4) не только в потенциальной области, но и во всем пространстве. Тогда, подставляя (1.5) в (1.3) и используя соотношение между возмущениями энтальпии и плотности для изэнтропического течения  $h' = \frac{c_0^2}{\rho_0} d\rho'$ , получим из (1.3), (1.4) уравнение для акустического потенциала

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2} - \nabla^2 \Phi = \nabla \mathbf{B}. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) является основным уравнением в предлагаемой в настоящей работе акустической

аналогии. Это уравнение совпадает при постоянных  $\rho_0, c_0$  с уравнением (1.6), полученным для линейной задачи, с тем отличием, что источник в правой части, определяемый дивергенцией векторного поля  $\mathbf{V}$ , может иметь нелинейную динамику.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗВУКОВОГО ИСТОЧНИКА

В полученном уравнении (1.7) в соответствии с методом акустической аналогии правая часть будет моделироваться как случайное поле с некоторыми заданными характеристиками. При оценке характеристик этого поля принимаются имеющиеся к настоящему времени физические представления о вихревой динамике турбулентных пульсаций.

Прежде всего, рассмотрим мультипольный порядок поля звуковых источников, которыми будет моделироваться правая часть в (1.7). Из сохранения интеграла импульса течения следует, что для нестационарных возмущений интеграл импульса должен быть равен нулю, т.е.

$$\mathbf{I} = \int (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{V}_0) d\mathbf{r} = 0. \quad (2.1)$$

В случае несжимаемого течения из (2.1) получим

$$\mathbf{I} = \rho_0 \int \mathbf{V} d\mathbf{r} = 0, \quad (2.2)$$

откуда следует, что поле  $\mathbf{V}$  имеет смысл плотности импульса [18]. Равенство нулю интеграла (2.2) означает, что в случае несжимаемого течения векторное поле  $\mathbf{V}$  может быть представлено в виде дивергенции квадрупольного поля

$$V^i = \frac{\partial Q^{ij}}{\partial r^j}, \quad (2.3)$$

что означает квадрупольность источников в правой части уравнения (1.7). Отметим, что в случае сжимаемого течения подынтегральное выражение в (2.1) содержит компоненту, связанную с возмущениями плотности, которая в соответствии с оценкой  $\rho' V_0 \sim \frac{V_0^2}{c_0^2} \rho_0 V'$  имеет относительную величину порядка  $O(M^2)$ , где  $M$  – число Маха струи. То есть для высокоскоростных струй звуковой источник в акустической аналогии (1.7), кроме квадрупольной части, может также содержать дипольный член. Тем не менее мы будем пользоваться представлением (2.3), пренебрегая дипольным членом в звуковом источнике, поскольку для струи со скоростью  $V = 120$  м/с, используемой для сравнения с моделью, рассматриваемой в настоящей работе, величина  $M^2$  действительно мала и составляет около 0.12.

Далее будут сделаны некоторые предположения о спектральных характеристиках источника

звука. Проверка этих предположений проводится сравнением модели излучения с данными акустических измерений.

Динамику плотности импульса представим как стохастическую сумму элементарных событий, представляющих собой возникновение локального возмущения импульса с последующей конвекцией и линейным ростом амплитуды возмущения по времени. Запишем уравнение, описывающее этот процесс в виде

$$\frac{D^2 Q^{ij}}{Dt^2} = D^{ij} \eta(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

где  $Q^{ij}$  определяется уравнением (2.3),  $D^{ij}$  – постоянный тензор, задающий квадрупольную структуру источников, случайное поле  $\eta(\mathbf{r}, t)$  определяет интенсивность возникновения локальных возмущений импульса. Для поля  $\eta$  запишем спектральную плотность в простейшей гауссовской форме

$$S_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) = A(\mathbf{r}', \omega) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^2}{2l_0^2}\right). \quad (2.5)$$

Будем предполагать, что пространственный масштаб корреляции возмущений импульса  $l_0$  является малым. С учетом этого перепишем выражение (2.5) в виде

$$S_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) = A(\mathbf{r}', \omega) (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \quad (2.6)$$

Для того чтобы пояснить физический смысл уравнения (2.4), выделим элементарные вихревые события в турбулентном потоке, которые характеризуются локальным возмущением импульса. В работах [19–21], посвященных турбулизации вихревых течений, в качестве основного события рассматривается взаимодействие вихревых шнуров, приводящее к их локальной деформации, растяжению и образованию петель в области максимального сближения. В настоящей работе в качестве основного события вихревой динамики также рассматривается локальная деформация вихревого шнура при воздействии на него внешних вихревых структур, схематически изображенная на рис. 1.

Заметим, что деформированная вихревая нить эквивалентна вихревой системе, состоящей из прямолинейной вихревой нити и вихревого кольца (рис. 2). Течение, создаваемое вихревым кольцом, обладает импульсом, направленным вдоль его оси. Это означает, что деформация вихревой нити сопровождается локальным изменением плотности импульса, которое при малых пространственных масштабах возмущения может быть записано в виде  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{r})$ , где  $\delta(\mathbf{r})$  – пространственная дельта-функция. С учетом сохранения интеграла импульса течения локальное изменение импульса должно компенсироваться изменением импульса

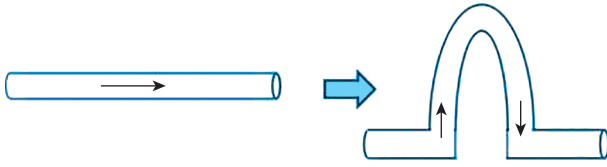


Рис. 1. Изменение формы вихревого шнура при локальном воздействии гидродинамической силы.

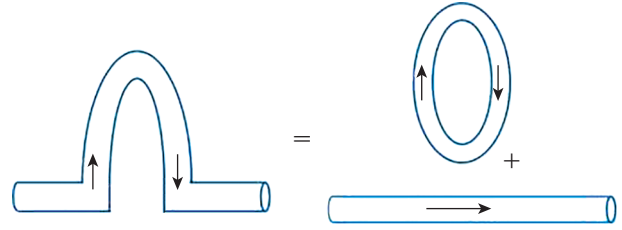


Рис. 2. Эквивалентные вихревые структуры.

окружающих вихревых структур. В соответствии с этим элементарному вихревому событию сопоставим возмущение импульса вида  $B^i(\mathbf{r}) = \frac{\partial Q^{ij}}{\partial r^j}$ , где  $Q^{ij}(\mathbf{r}) \sim D^{ij}\delta(\mathbf{r})$ .

Таким образом, звуковой источник, динамика которого описывается уравнением (2.4), можно трактовать как стохастическую сумму элементарных событий рождения точечных возмущений импульса, соответствующих локальной деформации вихревых нитей при воздействии внешних вихревых структур. Эволюция возмущений импульса, определяемая уравнением (2.4), соответствует линейному росту вихревых возмущений по времени. В действительности рост возмущений ограничен масштабом временной корреляции возмущений  $\tau_0$ . Здесь это ограничение не учитывается в связи с тем, что основной вклад в звуковое излучение дают быстрые процессы, а время потери корреляции  $\tau_0$  локальных возмущений велико по сравнению с временным масштабом возникновения этих возмущений.

Следует отметить, что представление звукового источника в струе на основе дифференциального уравнения с дельта-коррелированной правой частью использовалось ранее в работе [22] для monopольных источников, а для квадрупольных источников впервые в работах [7, 23]. Однако в этих работах в качестве дифференциального оператора использовалось уравнение Ланжевена с конвективной производной первого порядка, в отличие от уравнения (2.4) с дифференциальным оператором второго порядка. Это различие обусловлено тем, что в настоящей работе источник определяется плотностью импульса, в то время как в работах [7, 22, 23] источник выражался через тензор Рейнольдса, который можно трактовать как гидродинамическую силу. Поскольку производная по времени от импульса жидкой частицы равна гидродинамической силе, действующей на эту частицу, то в уравнении (2.4) появляется дополнительная конвективная производная. На этом языке рождение силы в некоторый момент времени будет соответствовать линейному нарастанию импульса начиная с этого момента, что соответствует нарастающему искривлению вихревой нити.

Тензор  $D^{ij}$  в правой части (2.4) может иметь различную пространственную ориентацию. В общем случае квадрупольная часть звукового источника представляет собой сумму случайных полей

$$B^i = \frac{\partial Q^{ij}}{\partial r^j}, \quad Q^{ij} = \sum_{n=1}^5 \xi_n(\mathbf{r}, t) D_n^{ij}, \quad (2.7)$$

где  $D_n^{ij}$  – система линейно-независимых базисных квадруполей, поля  $\xi_n(\mathbf{r}, t)$  в соответствии с (2.4) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{D^2 \xi_n}{Dt^2} = \eta_n(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

В настоящей работе при моделировании процесса излучения звука турбулентной струей используется предположение об изотропности квадрупольного поля источников. Справедливость этого предположения в конечном счете подтверждается согласием построенной модели эксперименту. Условие изотропности накладывает определенные связи между компонентами квадрупольного случайного поля (Приложение А). С учетом этого выберем базисные квадруполи  $D_n^{ij}$  в виде (A2). Тогда из условия изотропности следует, что случайные поля  $\eta_n(\mathbf{r}, t)$  должны быть взаимно не коррелированными и иметь одинаковые спектральные характеристики, определяемые выражением (2.6).

Выражения (2.6)–(2.8) определяют случайное поле квадрупольных источников в акустической аналогии (1.7).

### 3. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО КВАДРУПОЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

При вычислении звукового поля струи будем использовать локально-однородное приближение. Это означает, что при вычислении звукового поля от точечного источника будем пренебрегать неоднородностью течения струи в осевом направлении, принимая локальные характеристики среднего поля в том сечении, где расположен источник. Но при вычислении звукового поля от всей струи будем вычислять интеграл по всей области источников, взяв в каждом поперечном сечении струи

функцию Грина, вычисленную именно для этого сечения.

Найдем звуковое поле для гармонического по времени локализованного возбуждения рассматриваемой гидродинамической системы, т.е. решение системы уравнений (1.7), (2.7), (2.8) с правой частью вида  $\eta_k(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \exp(-i\omega t)$ . Определим цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью струи. Используя преобразование Фурье по времени и координатам  $\varphi$  и  $z$ , преобразуем уравнение (1.7) к виду

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho} + \left( \frac{\bar{\omega}^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \Phi = q(\rho, m, \alpha, \omega), \quad (3.1)$$

где  $\bar{\omega} = \omega - \alpha V_0(\rho)$ ,  $c_0$  – скорость звука, источник в правой части уравнения (3.1) имеет вид

$$q(\rho, m, \alpha, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(\rho, \varphi, z, \omega) \exp(-i\alpha z - im\varphi) d\varphi dz, \quad (3.2)$$

где  $q(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \mathbf{B}$ .

Также, применяя Фурье-преобразование к уравнению (2.8), получим

$$-\bar{\omega}^2 \xi_k = \eta_k. \quad (3.3)$$

Найдем решения уравнений (3.1), (3.3) для точечных квадрупольных источников. Будем полагать, что слой смешения с переменной средней скоростью  $V_0(\rho)$  находится в интервале  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ . Соответственно  $V_0(\rho) = V_{jet} = \text{const}$  при  $\rho < \rho_1$ ,  $V_0(\rho) = 0$  при  $\rho > \rho_2$ . Точка расположения источника  $\rho = \rho_s$  предполагается лежащей внутри слоя смешения, т.е.  $\rho_1 < \rho_s < \rho_2$ . Решение должно быть конечным в нуле, плавно сшиваться на границах слоя смешения  $\rho = \rho_1$ ,  $\rho = \rho_2$  и удовлетворять условию Зоммерфельда для уходящих волн при  $\rho \rightarrow \infty$ .

В областях с постоянной скоростью уравнение (3.1) сводится к однородному уравнению Бесселя, решения которого с учетом граничных условий в нуле и на бесконечности имеют вид

$$\Phi_{in}(\rho, m, \alpha, \omega) = A J_m(i\beta\rho), \quad \rho < \rho_1, \quad (3.4)$$

$$\Phi_{out}(\rho, m, \alpha, \omega) = B H_m^{(1)}(i\gamma\rho), \quad \rho > \rho_2,$$

где  $J_m$  и  $H_m^{(1)}$  – функции Бесселя и Ганкеля порядка  $m$ ,  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ ,  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - (k - M_{jet}\alpha)^2}$ ,  $k = \frac{\omega}{c_0}$ ,

$$M_{jet} = \frac{V_{jet}}{c_0}.$$

Внутри слоя смешения при  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  решение имеет разрывы потенциала  $[\Phi]_s$  и его производной  $[\partial\Phi]_s$  в точке расположения источника

$\rho = \rho_s$ . В предельном случае тонкого слоя смешения решение можно получить, используя постоянство потенциала  $\Phi$  и его радиальной производной  $\frac{d\Phi}{d\rho}$  в той части слоя смешения, где нет источников. В этом случае сшивание решений (3.4) дает амплитуду излучения вне струи

$$B = i \frac{1}{\beta \rho_s A_m} (-\rho_s [\partial\Phi]_s J_m(i\beta\rho_s) + [\Phi]_s i\beta\rho_s J'_m(i\beta\rho_s)), \quad (3.5)$$

где  $A_m = \frac{\gamma}{\beta} H_m^{(1)}(i\gamma\rho_s) J_m(i\beta\rho_s) - H_m^{(1)}(i\gamma\rho_s) J'_m(i\beta\rho_s)$ .

Разрывы потенциала и его производной определяются типом мультипольного источника. Не приводя громоздких вычислений, выпишем лишь конечный результат для квадрупольного источника  $Q^{ij} = D^{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$ , расположенного в точке  $\rho = \rho_s, \varphi = 0, z = 0$ :

$$[\Phi] = (D^{xx} - D^{yy}) \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^2} + D^{xy} \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^2} 2im + D^{xz} \frac{1}{4\pi^2 \rho_s} 2i\alpha, \quad (3.6)$$

$$[\partial\Phi] = -D^{xx} \frac{1}{4\pi^2 \rho_s} \frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} + (D^{xx} - D^{yy}) \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^3} m^2 + (D^{xx} - D^{zz}) \frac{1}{4\pi^2 \rho_s} \alpha^2 + D^{xy} \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^3} 2im - D^{yz} \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^2} 2\alpha m.$$

При произвольном расположении источника в точке  $\rho = \rho_s, \varphi = \varphi_s, z = z_s$  выражения (3.6) содержат дополнительный множитель  $\exp(-i\alpha z_s - im\varphi_s)$ .

Выражения (3.5), (3.6) дают решение уравнения (3.1) с точечным квадрупольным источником в правой части  $Q^{ij} = D^{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$ . Для перехода к решению системы уравнений (3.1), (3.3) с точечным возбуждением вида  $\eta_k(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$  необходимо в соответствии с (3.3) умножить решение на  $-\bar{\omega}^{-2}$ . В результате получим звуковое излучение для точечного квадрупольного возбуждения

$$G(\rho, m, \alpha, \omega) = -\frac{k^2}{\bar{\omega}^2} F(m, \alpha, \omega) \frac{i}{2} H_m^{(1)}(i\gamma\rho) \exp(-i\alpha z_s - im\varphi_s), \quad (3.7)$$

где  $F(m, \alpha, \omega)$  – безразмерные направленности излучения, определяемые соотношением  $F = -i \frac{2}{k^2} B$ , величина  $B$  определяется из (3.5). Используя (3.5), (3.6), выпишем эти выражения для базисных квадрупольей (A2) в случае тонкого слоя смешения

$$\begin{aligned}
F_{(1)m} &= \frac{1}{4\pi^2 k^2 \beta \rho_s A_m} \left( 3\alpha^2 - \frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} \right) J_m(i\beta \rho_s), \quad (3.8) \\
F_{(2)m} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta \rho_s^3 A_m} \alpha \beta \rho_s^2 J'_m(i\beta \rho_s), \\
F_{(3)m} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta \rho_s^3 A_m} m \alpha \rho_s J_m(i\beta \rho_s), \\
F_{(4)m} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta \rho_s^3 A_m} \times \\
&\times \left( \left( \frac{\rho_s^2}{2} \left( \frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} - \alpha^2 \right) - m^2 \right) J_m(i\beta \rho_s) + i\beta \rho_s J'_m(i\beta \rho_s) \right), \\
F_{(5)m} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta \rho_s^3 A_m} im(-J_m(i\beta \rho_s) + i\beta \rho_s J'_m(i\beta \rho_s)),
\end{aligned}$$

где индекс в скобках соответствует номеру базисного квадруполя.

Используя обратное преобразование Фурье по  $z$ -координате, получим функцию Грина задачи

$$\begin{aligned}
G_{(n)m}(\rho, \rho_s, \varphi_s, z, z_s, \omega) &= -\int \frac{k^2}{\bar{\omega}_s^2} F_{(n)}(m, \alpha, \omega) \times \\
&\times \frac{i}{2} H_m^{(1)}(i\gamma \rho) \exp(i\alpha(z - z_s) - im\varphi_s) d\alpha. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

В дальнейшем поле интеграл (3.9) вычисляется методом перевала:

$$\begin{aligned}
G_m(\rho, \rho_s, \varphi_s, z, z_s, \omega) &= \\
&= -(-i)^m \frac{k^2 F_{(n)}(m, k \cos \theta, \omega)}{\omega^2 (1 - M_s \cos \theta)^2} \frac{1}{r} \exp(ikr) \exp(-im\varphi_s), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_s)^2}$ ,  $\theta = \arccos\left(\frac{z - z_s}{r}\right)$ ,  $M_s = \frac{V_0(\rho_s)}{c_0}$ .

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ АЗИМУТАЛЬНЫХ ГАРМОНИК ЗВУКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СТРУИ

Используя полученные в разделе 3 выражения для функции Грина, найдем спектральную плотность звукового излучения от источников, определенных в разделе 2. Из полученных в Приложении Б формул (Б5), (Б6) для взаимного спектра звукового излучения при  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  следуют выражения для автоспектров звукового поля

$$S_\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^5 S_{\Phi(n)m}(\rho, z, \omega), \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
S_{\Phi(n)m}(\rho, z, \omega) &= \\
&= 2\pi \int |G_{(n)m}(\rho, z, \rho', z', \omega)|^2 (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} \times \\
&\times A(\rho', z', \omega) \rho' d\rho' dz', \quad (4.2)
\end{aligned}$$

где  $G_{(n)m}(\rho, z, \rho', z', \omega)$  –  $m$ -я азимутальная гармоника функции Грина, определяемой для  $n$ -го базисного квадруполя.

Подставляя функцию Грина (3.10) в (4.2) и переходя от потенциала  $\Phi$  к акустическому давлению  $p = -i\omega\Phi$ , получим спектральную плотность азимутальных гармоник дальнего звукового поля давления

$$\begin{aligned}
S_{pm}(\rho, z, \omega) &= 2\pi \sum_{n=1}^5 \int \frac{1}{r^2 c_0^4} \frac{|F_{(n)m}(k \cos \theta, \omega)|^2}{(1 - M_s \cos \theta)^4} \times \\
&\times \omega^2 (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} A(\rho_s, z_s, \omega) \rho_s d\rho_s dz_s. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

В настоящей работе рассматривается дальнейшее звуковое поле струи, которое имеет слабую чувствительность к распределению источников в объеме струи. С учетом этого сделаем некоторые упрощения модели, ограничив область локализации источников. Будем полагать, что источники расположены в конце начального участка в той области слоя смешения, где средняя скорость струи составляет 0.7 от скорости струи на оси. В соответствии с этим для распределения мощности источников будем использовать выражение  $A(\rho, z) = A_0 \Delta_\rho \Delta_z \delta(\rho - \rho_s) \delta(z - z_s)$ , где  $\Delta_\rho$ ,  $\Delta_z$  – величины разброса по радиальной и осевой координате,  $\rho_s$  определяется из соотношения  $V_0(\rho_s) = 0.7 \cdot V_{jet}$ , координата  $z_s = 6D$  соответствует концу начального участка струи. Тогда из (4.3) получим спектральную мощность  $m$ -й азимутальной гармоники звукового излучения

$$\begin{aligned}
S_{pm}(\rho, z, \omega) &= \\
&= \frac{1}{r^2 c_0^4} \frac{\omega^2 S_W(\omega)}{(1 - M_s \cos \theta)^4} \sum_{n=1}^5 |F_{(n)m}(k \cos \theta, \omega)|^2, \quad (4.4)
\end{aligned}$$

где  $r$  и  $\theta$  отсчитываются от конца начального участка струи,  $S_W(\omega)$  – суммарная спектральная мощность источника, которая определяется выражением

$$\begin{aligned}
S_W(\omega) &= \iint S_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' = \\
&= (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} A_0(\omega) \Delta_\rho \Delta_z 2\pi r_s. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Выражение (4.4) дает направленности азимутальных гармоник звукового излучения струи и будет далее использоваться для сравнения с экспериментом.

#### 5. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИРУЕМОГО ПОЛЯ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Используемые в настоящей работе данные акустических измерений были получены методом азимутальной декомпозиции. Этот эксперимен-



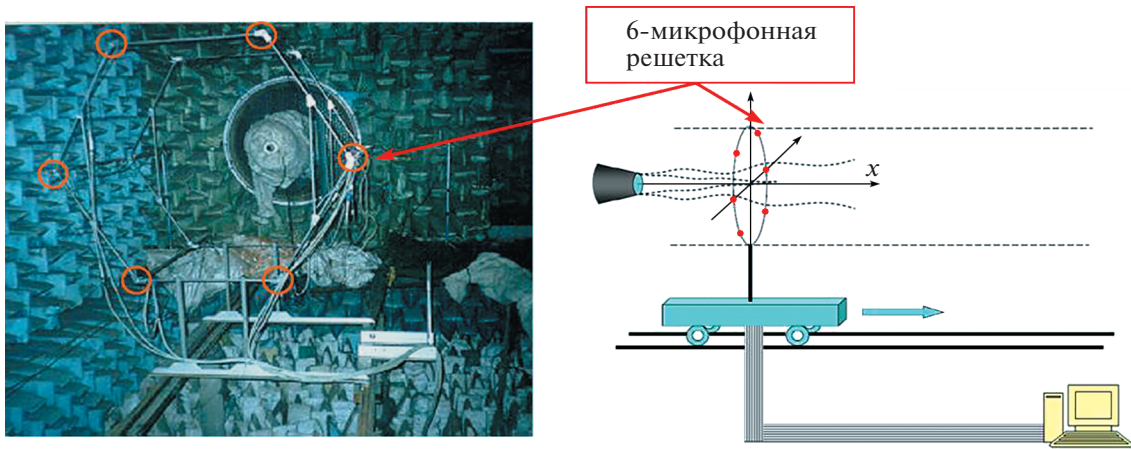


Рис. 3. Схема испытательного стенда. Расстояние от оси струи до микрофонов  $R = 0.85$  м, диаметр сопла – 0.04 м.

тальный метод был предложен в [9] специально для измерения азимутальных компонент звукового излучения аэродинамических источников шума. Схема эксперимента представлена на рис. 3. Метод основан на модальном разложении акустического сигнала с последующим усреднением данных. Акустические сигналы на круговой решетке из 6 микрофонов представляются в виде ряда Фурье

$$p(\varphi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi), \quad (5.1)$$

где  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) d\varphi$ ,  $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) \cos m\varphi d\varphi$ ,  $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) \sin m\varphi d\varphi$ , интегралы аппроксимируются суммой по 6 точкам расположения микрофонов. С использованием этих формул из результа-

тов измерений оцениваются спектральные плотности коэффициентов ряда (5.1).

В эксперименте [8] получены спектральные плотности первых трех азимутальных гармоник звукового излучения для различных расстояний от решетки микрофонов до сопла (рис. 4).

Полученные в эксперименте направленности излучения сравниваются с результатами моделирования. При этом модель содержит только одну свободную константу, зависящую от частоты, которая для всех квадрупольных компонент является универсальной благодаря изотропности источника. Для масштабирования по частотам использовалась зависимость

$$\begin{aligned} A_0(Sh) &= C_0, & Sh < 0.3, \\ A_0(Sh) &= C_0 \frac{0.3}{Sh}, & Sh > 0.3, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где число Струхала  $Sh = \frac{fD}{V}$ ,  $f$  – частота,  $D$  – диаметр сопла,  $V$  – скорость струи.

Сравнение результатов моделирования с экспериментом представлено на рис. 4. Можно видеть хорошее совпадение модели с измерениями для трех основных азимутальных гармоник акустического излучения струи.

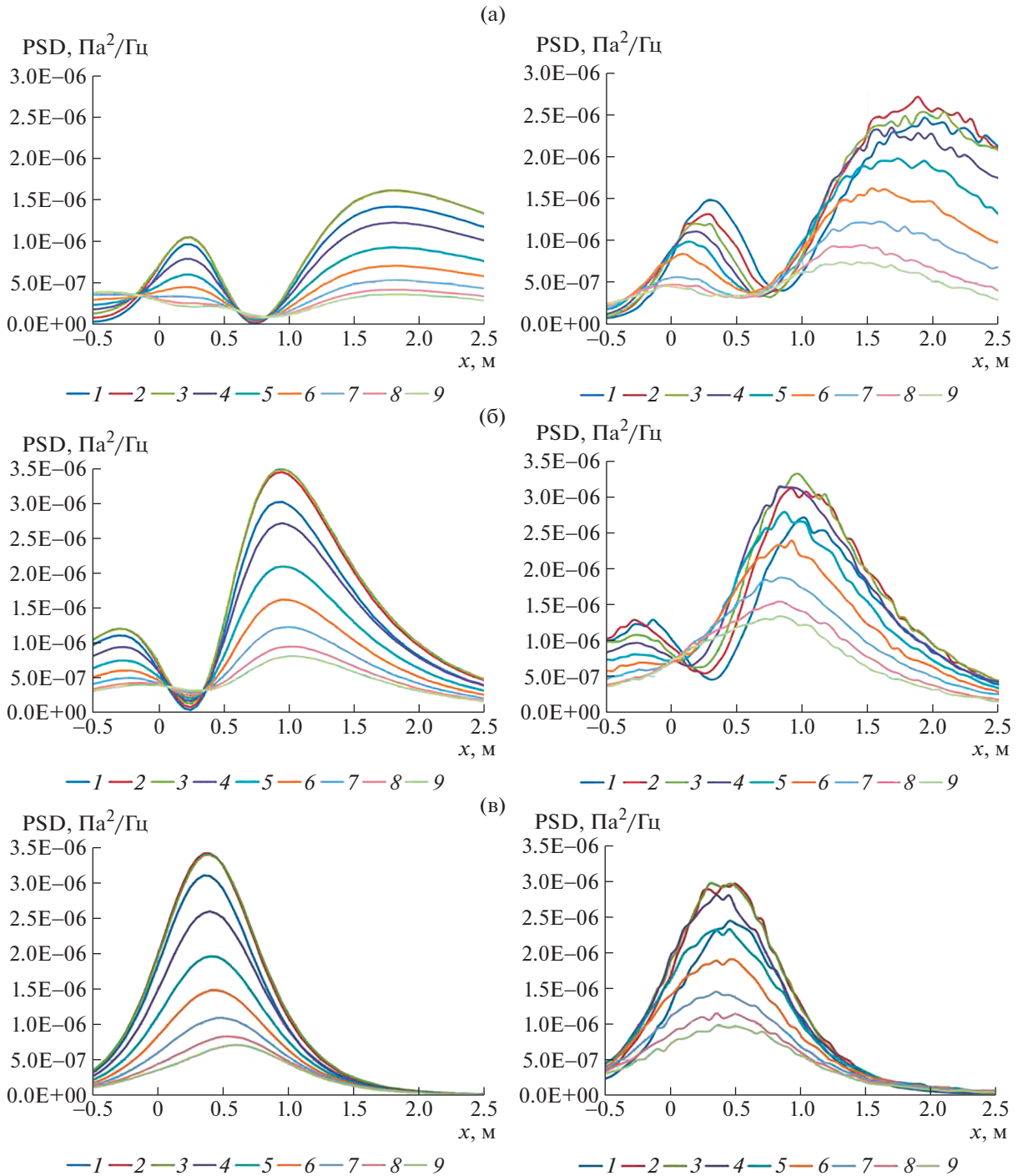
### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый подход к описанию звукового излучения струи, основанный на акустической аналогии с использованием в качестве основных переменных потенциала скорости и плотности импульса. Особенностью такой модели является то, что оператор распространения не содержит гидродинамических степеней свободы, благодаря чему в модели отсутствует сдвиговый шум, связанный с возбуждением гидродинамических мод оператора распространения в сдвиговом

Таблица 1. Нумерация кривых на рис. 4

	Расчетная направленность Частота, Гц	Измеренная направленность Интервал частот, Гц
1	475	$350 < f < 600$
2	700	$600 < f < 800$
3	925	$800 < f < 1050$
4	1200	$1050 < f < 1350$
5	1525	$1350 < f < 1700$
6	1900	$1700 < f < 2100$
7	2350	$2100 < f < 2600$
8	2800	$2600 < f < 3000$
9	3100	$3000 < f < 3200$





**Рис. 4.** Направленности азимутальных гармоник для струи  $V = 120$  м/с. Справа эксперимент, слева модель. Азимутальные гармоники (а)  $m = 0$ , (б)  $m = 1$ , (в)  $m = 2$ . Кривые на графиках соответствуют частотам, указанным в табл. 1.

потоке струи. Показано, что эта особенность модели соответствует экспериментальным данным по направленности основных азимутальных гармоник звукового излучения турбулентной струи, полученных методом мультимикрофонных акустических измерений.

Проведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными для струи

со скоростью 120 м/с. Хорошее совпадение модели и эксперимента при учете нетривиальной формы направленности отдельных гармоник звукового поля указывает на то, что модель отражает основные факторы в механизме генерации шума в турбулентной струе.

Результаты работы имеют практическое значение, связанное с моделированием звукового из-

лучения турбулентных потоков. Вместе с тем полученные результаты дают представление о возможной структуре источника звука, связанного с мелкомасштабными турбулентными пульсациями в струе, что может оказаться важным для понимания природы турбулентности в сдвиговых потоках.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выпишем общий вид изотропного тензора  $Q^{ij}$ . Свертка такого тензора с вектором нормали должна иметь дисперсию, не зависящую от направления нормали. Представим тензор  $Q^{ij}$  в виде

$$Q^{ij} = \sum_{n=1}^5 a_n D_n^{ij}, \quad (A1)$$

где  $a_n$  – взаимно некоррелированные случайные величины с одинаковыми дисперсиями  $\langle a_n^2 \rangle = A$ , декартовы компоненты тензора  $D_n^{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_1^{ij} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & D_2^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_3^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & (A2) \\ D_4^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & D_5^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим свертку  $q = n^i n^j Q^{ij}$ , где  $n^i$  – единичный вектор нормали с декартовыми компонентами  $n^i = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , где  $\varphi, \theta$  – сферические углы направления нормали. Дисперсия свертки

$$\langle q^2 \rangle = \sum_{n=1}^5 \langle a_n^2 \rangle D_n^{ij} D_n^{rs} n^i n^j n^k n^s. \quad (A3)$$

Для каждого из базисных квадруполь вычислим свертку  $n^i n^j D^{ij}$ :

$$\begin{aligned} n^i n^j D_1^{ij} &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), & n^i n^j D_2^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta \cos \varphi, \\ n^i n^j D_3^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta \sin \varphi, & (A4) \\ n^i n^j D_4^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \theta \cos 2\varphi, & n^i n^j D_5^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \theta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя (A4) в (A3), получим

$$\langle q^2 \rangle = A \left( \frac{1}{4} (3 \cos^2 \theta - 1)^2 + \frac{3}{4} \sin^2 2\theta + \frac{3}{4} \sin^4 \theta \right) = A. \quad (A5)$$

Из (A5) следует, что свертка тензора  $Q^{ij}$  с вектором нормали имеет дисперсию, не зависящую от направления нормали, что означает изотропность этого тензора.

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Получим выражение для взаимного спектра звукового поля, излучаемого пространственно некоррелированным полем источников с взаимным спектром (2.6). В общем случае для случайного источника с взаимной спектральной плотностью  $S_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega)$  звуковое излучение будет иметь спектральную плотность

$$S_\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int G^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'', \omega) S_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \quad (B1)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  – функция Грина, определяемая как решение уравнений (1.7), (2.7), (2.8) с правой частью вида  $\eta_k(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \exp(-i\omega t)$ . Подставляя (2.6) в (B1) и проводя интегрирование по  $\mathbf{r}''$ , получим, что для каждого базисного квадруполь взаимный спектр звукового поля имеет вид

$$S_\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int G^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \omega) (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} A(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (B2)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  определяется для соответствующего базисного квадруполь.

Будем рассматривать струю с круглым сечением. Определим цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью струи. Вследствие осевой симметрии течения функция Грина зависит только от разницы азимутальных углов  $\varphi_1 - \varphi'$ , а ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= G(\rho_1, z_1, \varphi_1 - \varphi', \rho', z', \omega) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(\rho_1, z_1, \rho', z', \omega) \exp(im(\varphi_1 - \varphi')). \end{aligned} \quad (B3)$$

Кроме того, будем учитывать, что в осесимметричной струе пульсации должны описываться полями, инвариантными относительно вращения вокруг оси струи. В соответствии с этим взаимные спектры  $S_{\eta(n)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega)$  зависят только от разницы углов  $\varphi'' - \varphi'$ , спектральная плотность источников не зависит от азимутального угла  $\varphi$ , т.е.  $A(\mathbf{r}', \omega) = A(\rho', z', \omega)$ .

Подставляя (B3) в (B2) и интегрируя по углу  $\varphi'$ , получим взаимную спектральную плотность звукового излучения базисного квадруполь:

$$S_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{\Phi m}(\rho_1, z_1, \rho_2, z_2, \omega) \exp(im(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad (\text{Б4})$$

$$S_{\Phi m}(\rho_1, z_1, \rho_2, z_2, \omega) = 2\pi \int G_m^*(\rho_1, \rho', z_1, z', \omega) G_m(\rho_2, \rho', z_2, z', \omega) \times \\ \times (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} A(\rho', z', \omega) \rho' d\rho' dz'. \quad (\text{Б5})$$

Выражения (Б4), (Б5) определяют взаимный спектр звукового поля для каждого базисного квадруполь. С учетом предположения о взаимной некоррелированности амплитуд  $\eta_n(\mathbf{r}, t)$ , получим для суммарного звукового поля от источника (2.7)

$$S_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_{n=1}^5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{\Phi(n)m}(\rho_1, z_1, \rho_2, z_2, \omega) \exp(im(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad (\text{Б6})$$

где индекс  $n$  в скобках обозначает номер соответствующего базисного квадруполь, спектры  $S_{\Phi(n)m}$  находятся из интеграла (Б5), вычисленного для  $n$ -го базисного квадруполь.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение от 8 декабря 2020 г. № 075-11-2020-023). Экспериментальная часть работы выполнена на базе УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФГУП “ЦАГИ”, модернизируемой при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-11-2021-066.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically: I. general theory // *Proc. Royal Soc. Series A.* 1952. V. 211. P. 564–581.
2. *Phillips O.M.* On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers // *Journal of Fluid Mechanics.* 1960. V. 9. № 1. P. 1–28.
3. *Lilley G.M.* On the noise from jets // *AGARD CP-131.* 1974. V. 13. P. 1–12.
4. *Goldstein M.E.* A Generalized Acoustic Analogy // *Journal of Fluid Mechanics.* 2003. V. 488. P. 315–333.
5. *Howe M.S.* Contributions to the theory of aerodynamic sound with application to excess jet noise and theory of the flute // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 71. Pt 4. P. 625–673.
6. *Mani R.* The influence of jet noise. Part 1. The noise of unheated jets // *Journal of Fluid Mechanics.* 1976. V. 73. № 4. P. 753–778.
7. *Kopiev V., Chernyshev S.* Correlation model of quadrupole noise sources in turbulent jet: effect of refraction // *AIAA paper.* 2015. 2015–3130.
8. *Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Velichko S.A., Kotova A.N., Belyaev I.V.* Cross-correlations of far field azimuthal modes in subsonic jet noise // *AIAA paper.* 2008. 2008-2887.
9. *Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Chernyshev S.A., Kotova A.N.* The role of large-scale vortex in a turbulent jet noise // *AIAA paper.* 1999. 99–1839.
10. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Гостехиздат, 1946. 220 с.
11. *Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А.* Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 248 с.
12. *Ewert R., Schroder W.* Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 188. № 2. P. 365–398.
13. *Spieser E., Bailly C.* Sound propagation using an adjoint-based method // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 900. P. 469.
14. *Goldstein M.E.* Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 89. № 3. P. 433–468.
15. *Bergliaffa S.E.P., Hibberd K., Stone M., Visser M.* Wave equation for sound in fluids with vorticity // *Physica D.* 2004. V. 191. P. 121–136.
16. *Mercier J.-F., Pagneux V.* An iterative approach for Aeroacoustics in a non-potential-flow // *AIAA Paper.* 2013. AIAA-2013-2134.
17. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Об использовании методов лагранжовой механики для анализа баланса энергии в вихревых течениях сжимаемого газа // *Акустический журнал.* 2021. Т. 67. № 1. С. 1–9.
18. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Методы лагранжовой и гамильтоновой механики в задачах аэроакустики // *Акустический журнал.* 2018. Т. 64. № 6. С. 692–703.
19. *Goto S.* Coherent Structures and Energy Cascade in Homogeneous Turbulence // *Progress of Theoretical Physics Supplement.* 2012. № 195. P. 139–156.
20. *McKeown R., Ostilla-Monico R., Pumir A., Brenner M.P., Rubinstein S.M.* Turbulence generation through an iterative cascade of the elliptical instability. arXiv:1908.01804 [physics]. 2019.
21. *Ostilla-Mónico R., McKeown R., Brenner M.P., Rubinstein, S.M., Pumir A.* Cascades and reconnection in interacting vortex filaments. *Physical Review Fluids.* 2021. V. 6. 074701.
22. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // *AIAA paper.* 2007. 2007-3506.
23. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Новая корреляционная модель каскада турбулентных пульсаций как источник шума в струях // *Акустический журнал.* 2012. Т. 58. № 4. С. 482–497.

**ON SEPARATION OF ACOUSTIC AND HYDRODYNAMIC VARIABLES  
IN THE MODEL OF SOUND SOURCES OF A TURBULENT JET****V. F. Kopiev<sup>a</sup> and S. A. Chernyshev<sup>a</sup>***<sup>a</sup>Moscow Research Complex Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Moscow, Russia*

The paper investigates the mechanism of noise generation in a turbulent jet based on the method of acoustic analogy. The aim of this work is to develop a sound source model that does not contain the so-called shear noise component. This condition was formulated earlier as a result of the analysis of multi-microphone acoustic measurements of the jet, which showed that the acoustic analogies that take into account shear noise disagree with the experimental data. The model proposed in this paper is based on the separation of acoustic and hydrodynamic variables and the use of a propagation operator that does not contain hydrodynamic degrees of freedom. This approach makes it possible to eliminate the shear component in the sound emission and achieve good agreement with the acoustic measurement data. The simulation of a sound source is carried out under the assumptions of quadrupole nature and isotropy of the pulsations responsible for sound radiation. The simulation results are compared with experimental data on the directivity of the main azimuthal harmonics of the sound radiation of the jet at a velocity of 120 m/s. The results obtained provide an important contribution to understanding the nature of sound-emitting turbulence in shear flows.

*Keywords:* turbulent jet, noise generation, acoustic analogy, quadrupoles, shear noise