

УДК 534.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД УЧЕТА ВЛИЯНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПОТОКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ МОД В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

© 2022 г. Н. Н. Остриков^{1,*}

Поступило 25.04.2022 г.

После доработки 12.05.2022 г.

Принято к публикации 12.05.2022 г.

Работа посвящена теоретическому исследованию особенностей распространения звука в цилиндрическом канале с жесткими стенками при наличии потока с тонким пограничным слоем. Получено равномерно пригодное асимптотическое решение уравнения Придмора–Брауна, описывающего распространение звуковых мод в рассмотренной модельной ситуации при условии малой толщины пограничного слоя. Показано, что пограничный слой может оказывать существенное влияние на осевые волновые числа распространяющихся звуковых мод, и этот эффект усиливается с ростом частоты. При этом для отдельных звуковых мод, находящихся вблизи условия отсечки, может иметь место эффект конечного порядка: звуковая мода, распространяющаяся в однородном потоке без затухания, может стать затухающей при наличии тонкого пограничного слоя.

Ключевые слова: кольцевой канал, распространение звука в потоках, пограничный слой, звукопоглощающие конструкции

DOI: 10.31857/S268674002205011X

ВВЕДЕНИЕ

Задача распространения звука в каналах с потоком находит применение при разработке звукопоглощающих конструкций (ЗПК) для каналов современных авиадвигателей. Звук распространяется по таким каналам в виде суперпозиции так называемых вращающихся звуковых мод. Если стенки канала облицованы ЗПК, характеризующимися некоторым комплексным значением импеданса, то на каждой частоте каждая распространяющаяся звуковая мода приобретает индивидуальное затухание. Варьируя импеданс ЗПК, необходимо добиться наибольшего суммарного затухания всей совокупности звуковых мод, распространяющихся в канале двигателя. Решение такой оптимизационной задачи требует знания модального состава звукового поля, т.е. распределения амплитуд между различными звуковыми модами, генерируемыми вентилятором в каналах двигателя с жесткими стенками (при отсутствии

ЗПК). В целом прикладная задача поиска оптимальных значений импеданса ЗПК для стенок каналов двигателя основывается на решении ряда задач о распространении звука в каналах с потоком при наличии жестких и импедансных стенок.

Поскольку в каналах двигателей, имеющих достаточно сложную форму, течет неоднородный поток, и на каждой частоте распространяется несколько тысяч звуковых мод, а интересующий диапазон частот достаточно широк, то решение оптимизационных задач о распространении звука в неоднородных потоках, в которых необходимо варьировать граничные условия, оказывается затруднительным даже на современных компьютерах. Поэтому для поиска физических эффектов, которые могут быть реализованы на практике, используют решения модельных задач с различным набором упрощающих предположений. До настоящего времени наиболее употребляемым было предположение об осевой однородности формы сечения канала при наличии однородности потока. Однако в экспериментальном исследовании процесса излучения звука из канала, выполненном в заглушенной камере АК-2 на маломасштабной модели воздухозаборника, было явно продемонстрировано влияние неоднородности потока на диаграмму направленности излучения [1]. Далее, в экспериментальном исследо-

¹Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

*E-mail: nikolay.ostrikov@tsagi.ru

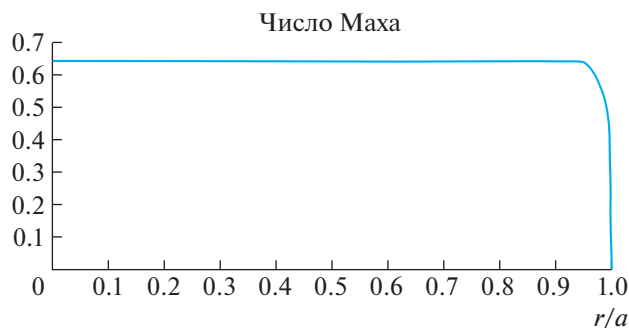


Рис. 1. Профиль скорости в сечении цилиндрического канала воздухозаборника.

вании зависимости импеданса ЗПК от скорости потока, выполненном на установке “Интерферометр с потоком”, имеющей прямоугольную форму сечения канала, в двух типах сборки (лабораторная сборка и сборка в условиях заглушенной камеры АК-2) были получены результаты, которые не могли быть объяснены с помощью стандартных математических моделей, опирающихся на предположение об однородности потока в канале установки, даже в самом простом случае жестких стенок канала [2]. Анализ этих результатов показал, что при описании процесса распространения звука в канале установки необходимо учитывать фактор неоднородности потока, и в работе [3] на основе решений уравнения Придмора–Брауна [4] был развит асимптотический метод описания процесса распространения звука в прямоугольном канале при наличии произвольного трехмерного плоскопараллельного потока, который позволил объяснить результаты экспериментов работы [2].

Способ получения асимптотического решения уравнения Придмора–Брауна в работе [3] базировался на методах, разработанных в работах [5–7] для описания волн неустойчивости, развивающихся в слое смешения слабо не осесимметричных струй. При этом был использован уточненный метод, представленный в работе [7], который основан на решении секулярного уравнения, обычно используемого в квантовой механике, если рассматривается задача устранения вырождения собственных решений в невозмущенном состоянии. Преимуществом данного метода является возможность описания всех видов резонансов в рамках равномерного асимптотического разложения. При этом под равномерностью для асимптотического решения понимается его применимость независимо от расстояния между собственными значениями невозмущенной задачи, включая случаи их слияния (резонансов).

Применение уравнения Придмора–Брауна в задачах распространения звука в каналах с неоднородным потоком имеет обширную историю

[8, 9]. Это уравнение, записанное только относительно возмущенного давления, является следствием линеаризованных уравнений Эйлера в случае плоскопараллельного основного потока и описывает как процесс распространения звуковых возмущений, так и гидродинамических возмущений, включая процесс их взаимодействия.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию влияния пограничного слоя в потоке на процесс распространения звуковых мод в цилиндрическом канале с жесткими стенками. Рассматривается модель плоскопараллельного потока в канале, в котором возмущенное движение описывается уравнением Придмора–Брауна. Для определения собственных решений этого уравнения в работе используется асимптотический метод, развитый в работе [3] для канала с прямоугольным сечением. При этом в работе [3] при построении асимптотического решения в качестве невозмущенного состояния рассматривался случай отсутствия потока, а малым параметром выступало число Маха потока. С точки зрения приложений к задаче, например, определения модального состава звукового поля для натуральных двигателей, для которых канал воздухозаборника имеет большой радиус, а число Маха потока может превышать $M = 0.6$, выбирать в качестве малого параметра асимптотического решения число Маха нецелесообразно. Поэтому в качестве невозмущенного состояния рассматривается случай однородного потока в канале с произвольным дозвуковым числом Маха M_0 ($M_0 < 1$). При этом в качестве малого параметра рассматривается отклонение поля скорости потока от однородного (конкретный вид малого параметра представлен ниже в соотношении (18)) при постоянстве скорости звука c . Адекватность выбора малого параметра подтверждает рис. 1, на котором представлен реалистичный профиль осевой скорости (число Маха) в цилиндрической части канала воздухозаборника от безразмерного радиуса, в котором пограничный слой имеет толщину порядка 6% от радиуса канала a .

Кроме этого, необходимо обратить внимание на следующую особенность. В работе [3] строится равномерно пригодное сингулярное асимптотическое решение задачи на собственные значения, что обусловлено возможностью слияния собственных решений в невозмущенном случае из-за присутствия одной импедансной стенки в прямоугольном канале. В настоящей работе рассматривается случай жесткой стенки в цилиндрическом канале, для которого отсутствует слияние звуковых мод в невозмущенном случае, т.е. при распространении звуковых мод в однородном потоке. Поэтому, казалось бы, можно в данном случае применить упрощенный метод построения асимптотического решения, соответствующий регулярному случаю.

Однако можно показать, что регулярное асимптотическое решение будет несправедливо для возмущения звуковых мод, находящихся вблизи условия отсечки. Таким образом, в настоящей работе, как и в работе [3], строится равномерно пригодное сингулярное асимптотическое решение задачи на собственные значения.

Заметим, что рассмотрение в настоящей работе только случая жестких стенок цилиндрического канала является принципиальным ограничением, поскольку в случае импедансных стенок нарушается ортогональность звуковых мод в главном приближении. Тем не менее метод, развитый в настоящей работе, может быть применен и в случае импедансных стенок, но при этом процедура получения решения несколько изменится. Поскольку задача распространения звука в каналах с жесткими стенками имеет самостоятельное значение, то поэтому случай импедансных стенок канала будет рассмотрен и подробно исследован в следующих публикациях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный цилиндрический канал радиуса a . Введем цилиндрическую систему безразмерных координат (r, φ, x) , нормированных на радиус канала. Пусть в канале имеется осесимметричный плоскопараллельный поток с числом Маха вида $M(r) = M_0 + \delta M(r)$, причем следующая величина является малой:

$$\langle \delta M(r) \rangle = \frac{1}{\pi} \iint \delta M(r) dS = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta M(r) r dr d\varphi \ll 1. \quad (1)$$

В данном случае величина $\delta M(r)$ описывает пограничный слой в потоке, т.е. она отлична от нуля только в небольшой области вблизи стенки канала. Поэтому требование малости величины (1) означает требование малости толщины пограничного слоя по отношению к радиусу канала.

На стенках предполагается выполнение условия прилипания основного потока:

$$M(r)|_{r=1} = 0. \quad (2)$$

При отсутствии зависимости поля скорости от осевой координаты x собственное решение линеаризованных уравнений Эйлера для возмущенно-го давления имеет вид

$$p(r, \varphi, x, t) = p(r, \varphi) e^{ik_x x - i\omega t}, \quad (3)$$

где ω — круговая частота, k_x — безразмерное осевое волновое число, являющееся собственным значением. При этом поле $p(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Придмора—Брауна, которое может быть записано в безразмерном виде [3]:

$$\hat{L}[p] \equiv \Delta p - \nabla \ln \left(k - \frac{k_x}{k} M(r) \right)^2 \cdot \nabla p + [(k - k_x M(r))^2 - k_x^2] p = 0, \quad (4)$$

где $k = \omega a/c$ — безразмерное главное волновое число,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (5)$$

В случае жестких стенок канала давление $p(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему граничному условию:

$$\left. \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=1} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, ставится задача определения собственных решений и собственных значений k_x уравнения (4) с граничным условием вида (6) в условиях малой толщины пограничного слоя по отношению к радиусу канала.

Решение указанной задачи будет производиться асимптотическими методами. Поэтому в первую очередь необходимо описать главное приближение, в качестве которого будет выступать однородный поток.

Если поток в канале однороден, т.е. $\delta M(r) = 0$, то уравнение (4) переходит в уравнение Гельмгольца, нормированные собственные решения которого для граничного условия (6) имеют следующий вид:

$$p(r, \varphi) = v_{m,n}(r, \varphi) = \frac{J_m(\eta_{m,n} r)}{J_m(\eta_{m,n})} e^{im\varphi}, \quad (7)$$

$$k_x = \zeta_{m,n}^{(0)} = \frac{-k M_0 \pm \sqrt{k^2 - \eta_{m,n}^2 (1 - M_0^2)}}{1 - M_0^2}, \quad (8)$$

где $\eta_{m,n}$ — радиальные волновые числа, зависящие от азимутального и радиального чисел m и n и являющиеся корнями производной функции Бесселя

$$J'_m(\eta_{m,n}) = 0. \quad (9)$$

Собственные функции $v_{m,n}(r, \varphi)$ удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\langle v_{m_1, n_1}^*(r, \varphi) \cdot v_{m_2, n_2}(r, \varphi) \rangle = N_{m_1, n_1} \delta_{m_1, m_2} \delta_{n_1, n_2}, \quad (10)$$

где δ_{m_1, m_2} — символ Кронекера, звездочка обозначает комплексное сопряжение,

$$N_{m,n} = \begin{cases} 1 - \frac{m^2}{\eta_{m,n}^2} & \text{при } m \neq 0 \text{ или } n \neq 0, \\ 1 & \text{при } m = 0 \text{ и } n = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к рассмотрению постановки задачи о возмущении главного приближения.

Так как величина $\delta M(r)$ не зависит от азимутального угла, то собственные решения уравнения (4) могут быть представлены в виде разложения по собственным функциям $v_{m,n}(r, \varphi)$ при каждом фиксированном азимутальном числе m :

$$p(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} v_{m,n}(r, \varphi). \quad (11)$$

Заметим, что выражение (11) автоматически удовлетворяет граничному условию (6) в силу свойств функций (7). Подставляя разложение (11) в уравнение (4), умножая обе части уравнения на

$v_{m,n}^*(r, \varphi)$ и интегрируя по сечению канала, получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов $C_{m,n}$ и осевого волнового числа k_x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{n_1,n}(k_x, \delta M(r)) C_{m,n} = 0, \quad (12)$$

где

$$W_{n_1,n}(k_x, \delta M(r)) = \langle \hat{L}[v_{m,n}(r, \varphi)] \cdot v_{m,n}^*(r, \varphi) \rangle. \quad (13)$$

Используя обозначения работ [3, 5–7], запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{W}(k_x, \delta M(r)) \mathbf{q} = 0, \quad (14)$$

где бесконечномерный вектор \mathbf{q} составлен из неизвестных амплитудных коэффициентов $C_{m,n}$, т.е. компонента вектора \mathbf{q} с номером n имеет вид $(\mathbf{q})_n = C_{m,n}$.

Заметим, что система уравнений (14) эквивалентна основному уравнению (4).

Бесконечномерная матрица $\mathbf{W}(k_x, \delta M(r))$ (13) после некоторых преобразований может быть представлена в виде суммы двух матриц:

$$\mathbf{W}(k_x, \delta M(r)) = \mathbf{W}^{(0)}(k_x) + \delta \mathbf{W}(k_x, \delta M(r)), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{n_1,n}^{(0)} &= ((k - k_x M_0)^2 - k_x^2 - \eta_{m,n}^2) \times \\ &\times \langle v_{m_1,n_1}^*(r, \varphi) \cdot v_{m,n}(r, \varphi) \rangle = \\ &= ((k - k_x M_0)^2 - k_x^2 - \eta_{m,n}^2) N_{m,n} \delta_{n_1,n} \equiv D_n(k_x) \delta_{n_1,n}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W}_{n_1,n} &= \langle f(k_x, \delta M(r)) \cdot \text{div}(v_{m_1,n_1}^*(r, \varphi) \cdot \nabla v_{m,n}(r, \varphi)) \rangle - \\ &- \langle k_x \delta M(r) (2k + k_x (2M_0 + \delta M(r))) \times \\ &\times v_{m_1,n_1}^*(r, \varphi) \cdot v_{m,n}(r, \varphi) \rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$f(k_x, \delta M(r)) = \ln \left(1 - \frac{k_x \delta M(r)}{1 - \frac{k_x}{k} M_0} \right)^2.$$

В разложении (15) матрица $\mathbf{W}^{(0)}(k_x)$ не зависит от $\delta M(r)$, а $\delta \mathbf{W}(k_x, \delta M(r)) = 0$ при $\delta M(r) = 0$. Анализ выражения (17) показывает, что при выполнении условия (1), а также вследствие $k_x \sim k$, малым параметром задачи о возмущении является величина

$$\varepsilon = 2k^2 \langle \delta M(r) \rangle \ll 1. \quad (18)$$

Заметим, что малый параметр (18) явно зависит от частоты звука, и его значение квадратично возрастает с ростом частоты.

Система (14) имеет нетривиальное решение относительно амплитуд \mathbf{q} только при неизвестных собственных значениях осевого волнового числа k_x . В случае главного приближения, когда $\delta M(r) = 0$, имеет место равенство $\mathbf{W}(k_x, \delta M(r)) = \mathbf{W}^{(0)}(k_x)$, и система (14) имеет для каждого азимутального числа m решения вида

$$(\mathbf{q}_{n_0}^{(0)})_n = \delta_{n_0 n}, \quad k_x = \zeta_{m,n_0}^{(0)}. \quad (19)$$

Это означает, что в главном приближении собственные решения системы (14) имеют форму (7) и (8).

В случае $\delta M(r) \neq 0$ и при выполнении условия (18) решения (19) системы уравнений (14) получают некоторые поправки. Задача состоит в том, чтобы найти эти поправки за счет неоднородности потока.

Согласно методу, развитому в работах [3, 7], собственные решения для каждого азимутального и радиального чисел m и n_0 ищутся в виде

$$k_x = \zeta_{m,n_0}^{(0)} + \zeta^{(1)}(\delta M(r)), \quad (20)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{n_0}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)}, \quad (21)$$

где $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$ – искомая поправка к осевому волновому числу $\zeta_{m,n_0}^{(0)}$, которая должна удовлетворять условию

$$\zeta^{(1)}(\delta M(r)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (22)$$

Заметим, что при поиске асимптотического решения малость поправки $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$ по отношению к волновому числу $\zeta_{m,n_0}^{(0)}$ не предполагается, поскольку вблизи частоты отсечки осевое волновое число $\zeta_{m,n_0}^{(0)}$ (8) приобретает малое значение, хотя требование (22) должно выполняться в любом случае. Поправка $\mathbf{q}^{(1)}$ к амплитудным коэффициентам $\mathbf{q}_{n_0}^{(0)}$ также должна обладать свойством (22) и, кроме этого, удовлетворять условию $(\mathbf{q}^{(1)})_{n_0} = 0$, которое определяет нормировку амплитудных коэффициентов, в которой $C_{m,n_0} = 1$, хотя в исходно

поставленной задаче эти коэффициенты заданы с точностью до произвольного множителя.

Таким образом, основная задача теперь состоит в определении поправок $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$ и $\mathbf{q}^{(1)}$.

2. ПРОЦЕДУРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

Указанные выше особенности показывают, что для определения поправок к главному приближению необходимо применить процедуру получения равномерно пригодных асимптотических решений, развитую в работах [3, 7]. В настоящем разделе представлены преобразования системы уравнений (14) к виду, который позволяет удобно получать равномерно пригодное асимптотическое решение. Заметим, что в этих преобразованиях малость величины (18) не используется, т.е. преобразования являются равносильными.

Используя представления (15), (20) и (21), уравнение (14) можно переписать в следующем виде:

$$(\mathbf{W}^{(0)} + \delta\mathbf{W})\mathbf{q}^{(1)} + [\Delta^{(1)}(\mathbf{W}^{(0)} + \delta\mathbf{W})\mathbf{q}_{n_0}^{(0)}]\zeta^{(1)} = -\xi. \quad (23)$$

Здесь и далее используются следующие обозначения для любой функции $f(k_x)$ от волнового числа k_x : $f_0 = f(\zeta_{m,n_0}^{(0)})$, $\Delta f = f - f_0$, $\Delta^{(1)}f = \frac{\Delta f}{k_x - \zeta_{m,n_0}^{(0)}} = \frac{\Delta f}{\zeta^{(1)}}$.

Также введено следующее обозначение:

$$\xi = \delta\mathbf{W}_0\mathbf{q}_{n_0}^{(0)}. \quad (24)$$

Кроме этого, для вывода уравнения (23) использовано следующее равенство:

$$\mathbf{W}_0^{(0)}\mathbf{q}_{n_0}^{(0)} = 0. \quad (25)$$

Так как компонента n_0 искомого вектора $\mathbf{q}^{(1)}$ принимается равной нулю, то неизвестное значение $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$ может быть вставлено вместо этой компоненты. Определим модифицированный бесконечный вектор $\hat{\mathbf{q}}^{(1)}$ следующим образом:

$$(\hat{\mathbf{q}}^{(1)})_n = \begin{cases} (\mathbf{q}^{(1)})_n & \text{при } n \neq n_0, \\ \zeta^{(1)} & \text{при } n = n_0. \end{cases} \quad (26)$$

Введем матрицу $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\zeta_{n_0}^{(0)} + \zeta^{(1)}, \delta M(r))$ со следующими элементами:

$$\mathbf{U}_{nn} = \begin{cases} \mathbf{W}_{nn} & \text{при } n \neq n_0, \\ (\Psi)_{n_1} & \text{при } n = n_0, \end{cases} \quad (27)$$

где введен следующий бесконечный вектор:

$$\Psi = \Delta^{(1)}(\mathbf{W}^{(0)} + \delta\mathbf{W})\mathbf{q}_{n_0}^{(0)} = (\Delta^{(1)}\mathbf{W})\mathbf{q}_{n_0}^{(0)}. \quad (28)$$

В результате уравнение (23) может быть представлено в следующей компактной форме:

$$\mathbf{U}\hat{\mathbf{q}}^{(1)} = -\xi. \quad (29)$$

Решение этого уравнения можно записать с помощью обратной матрицы:

$$\hat{\mathbf{q}}^{(1)} = -\mathbf{U}^{-1}\xi. \quad (30)$$

Согласно определению модифицированного вектора $\hat{\mathbf{q}}^{(1)}$ (26), выражение (30) можно записать для отдельных компонент следующим образом:

$$C_{m,n} = -(\mathbf{U}^{-1}\xi)_n \quad \text{при } n \neq n_0, \quad (31)$$

$$\zeta^{(1)} = -(\mathbf{U}^{-1}\xi)_{n_0}. \quad (32)$$

Выражение (32) зависит только от неизвестной поправки $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$ и представляет модифицированный вид дисперсионного соотношения для задачи на собственные значения. Это уравнение должно решаться первым относительно $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$, а затем полученное значение подставляется в выражения (31), из которых определяются неизвестные амплитудные коэффициенты $C_{m,n}$ при $n \neq n_0$. Заметим, что согласно выбранной нормировке $C_{m,n_0} = 1$.

Важно отметить, что выражения (31) и (32) представляют собой точное следствие уравнения (14) и выведены без каких-либо дополнительных допущений.

3. ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Построим теперь асимптотическую процедуру решения дисперсионного уравнения (32) относительно малого числа ϵ (18), ограничившись рассмотрением только первых двух приближений.

Так как бесконечный вектор ξ (24) имеет порядок малости $O(\epsilon)$, то для поиска поправки $\zeta^{(1)}$ в первом приближении можно использовать непосредственно уравнение (32). Действительно, если пренебречь поправкой $\zeta^{(1)}$ в выражении (27) для матрицы $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\zeta_{n_0}^{(0)} + \zeta^{(1)}, \delta M(r))$, то уравнение (32) приобретет вид $\zeta^{(1)} = -(\mathbf{U}^{-1}(\zeta_{n_0}^{(0)}, \delta M(r))\xi)_{n_0}$, т.е. непосредственно даст решение для поправки $\zeta^{(1)}$, имеющее порядок малости $O(\epsilon)$. Такой подход приводит к отличному результату в случае отсутствия слияния корней в главном приближении или других резонансных ситуаций. К сожалению, в нашем случае такой подход не годится из-за присутствия резонансных случаев вблизи условия отсечки. С математической точки зрения, поправка $\zeta^{(1)}$ не может быть корректно определена только правой частью выражения (32), когда величина $\partial(\mathbf{U}^{-1}(\zeta_{n_0}^{(0)}, \delta M(r))\xi)_{n_0} / \partial k_x$ имеет значение на несколько порядков больше, чем величина

$(\mathbf{U}^{-1}(\zeta_{n_0}^{(0)}, \delta M(r))\xi)_{n_0}$. Эта особенность как раз появляется в резонансных случаях, и поэтому для решения уравнения (32) должна быть использована теория сингулярных возмущений.

Для того чтобы получить равномерно пригодное асимптотическое решение уравнения (32), необходимо использовать следующее разложение для матрицы (27):

$$\mathbf{U}(k_x, \delta M(r)) = \mathbf{U}^{(0)}(k_x) + \delta\mathbf{U}(k_x, \delta M(r)), \quad (33)$$

причем $\|\delta\mathbf{U}\| \ll \|\mathbf{U}^{(0)}\|$.

Как правило, в матрице $\mathbf{U}^{(0)}$ необходимо собрать все элементы матрицы \mathbf{U} , которые остаются конечными, когда малый параметр стремится к нулю, а в матрице $\delta\mathbf{U}$ необходимо собрать все элементы матрицы \mathbf{U} , которые стремятся к нулю при стремлении к нулю малого параметра. В нашем случае это правило приводит к разложению следующего вида:

$$\mathbf{U}_{n_n}^{(0)} = \begin{cases} \mathbf{W}_{n_n}^{(0)} & \text{при } n \neq n_0, \\ (\boldsymbol{\psi}^{(0)})_{n_1} & \text{при } n = n_0. \end{cases} \quad (34)$$

$$\delta\mathbf{U}_{n_n} = \begin{cases} \delta\mathbf{W}_{n_n} & \text{при } n \neq n_0, \\ (\delta\boldsymbol{\psi})_{n_1} & \text{при } n = n_0, \end{cases} \quad (35)$$

где используются обозначения (15)–(17) и введены следующие бесконечные векторы:

$$\boldsymbol{\psi}^{(0)} = \Delta^{(1)}\mathbf{W}^{(0)}\mathbf{q}_{n_0}^{(0)}, \quad (36)$$

$$\delta\boldsymbol{\psi} = (\Delta^{(1)}\delta\mathbf{W})\mathbf{q}_{n_0}^{(0)}. \quad (37)$$

Заметим, что в силу выражений (16) и (19) матрица $\mathbf{U}^{(0)}$ является диагональной:

$$\mathbf{U}_{n_n}^{(0)} = \hat{D}_n(k_x)\delta_{n,n}, \quad (38)$$

где

$$\hat{D}_n^{(0)} = \begin{cases} D_n & \text{при } n \neq n_0, \\ \Delta^{(1)}D_{n_0} & \text{при } n = n_0. \end{cases} \quad (39)$$

В силу представления (33) и условия $\|\delta\mathbf{U}\| = O(\epsilon)$ обратная матрица \mathbf{U}^{-1} может быть разложена по малому параметру ϵ следующим образом:

$$\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^{(0)} + \delta\mathbf{U})^{-1} = (\mathbf{U}^{(0)})^{-1} - (\mathbf{U}^{(0)})^{-1}\delta\mathbf{U}(\mathbf{U}^{(0)})^{-1} + ((\mathbf{U}^{(0)})^{-1}\delta\mathbf{U})^2(\mathbf{U}^{(0)})^{-1} + O(\epsilon^3). \quad (40)$$

Так как $\xi = O(\epsilon)$, то использование разложения (40) приводит к следующему виду уравнения (32) с учетом членов $O(\epsilon^2)$:

$$\zeta^{(1)} = -[(\mathbf{U}^{(0)})^{-1} \cdot \xi]_{n_0} + [[(\mathbf{U}^{(0)})^{-1}\delta\mathbf{U}(\mathbf{U}^{(0)})^{-1} \cdot \xi]_{n_0} + O(\epsilon^3)]. \quad (41)$$

При использовании всей совокупности выражений (15)–(17), (19), (34)–(39) уравнение (41) приобретает следующую аналитическую форму:

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} = & -\frac{(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0n_0}}{\Delta^{(1)}D_{n_0}} + \frac{(\Delta^{(1)}\delta\mathbf{W}_{n_0n_0})(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0n_0}}{(\Delta^{(1)}D_{n_0})^2} + \\ & + \sum_{n \neq n_0} \frac{\delta\mathbf{W}_{n_0n}(\delta\mathbf{W}_0)_{nn_0}}{(\Delta^{(1)}D_{n_0})D_n} - \frac{(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0n_0}}{(\Delta^{(1)}D_{n_0})^2} \times \\ & \times \left[\sum_{n \neq n_0} \frac{\delta\mathbf{W}_{n_0n}(\Delta^{(1)}\delta\mathbf{W}_{nn_0})}{D_n} + \frac{(\Delta^{(1)}\delta\mathbf{W}_{n_0n_0})^2}{\Delta^{(1)}D_{n_0}} \right] - \\ & - \sum_{n \neq n_0} \frac{(\delta\mathbf{W}_0)_{nn_0}}{(\Delta^{(1)}D_{n_0})D_n} \left[\sum_{n_1 \neq n_0} \frac{\delta\mathbf{W}_{n_0n_1}\delta\mathbf{W}_{n_1n}}{D_{n_1}} + \right. \\ & \left. + \frac{(\Delta^{(1)}\delta\mathbf{W}_{n_0n_0})\delta\mathbf{W}_{n_0n}}{(\Delta^{(1)}D_{n_0})D_n} \right] + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (42)$$

Будем искать решение уравнения (42) для поправки $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$ в виде разложения

$$\zeta^{(1)}(\delta M(r)) = \zeta^{(1,0)} + \delta\zeta, \quad (43)$$

где $\zeta^{(1,0)}$ – первое приближение, для поиска которого в правой части уравнения оставляются только члены порядка $O(\epsilon)$, а $\delta\zeta$ – второе приближение, для поиска которого в правой части уравнения оставляются только члены порядка $O(\epsilon)$ и $O(\epsilon^2)$.

В первом приближении уравнение (42) приобретает следующий вид:

$$\zeta^{(1,0)} = \frac{\delta\mathbf{W}_{n_0n_0}(\zeta_{mn_0}^{(0)}, \delta M(r))}{(2(kM_0 + (1 - M_0^2)\zeta_{mn_0}^{(0)}) + (1 - M_0^2)\zeta^{(1,0)})N_{mn_0}}. \quad (44)$$

С учетом выражения (8) видно, что пренебречь в знаменателе правой части членом, содержащим поправку $\zeta^{(1,0)}$, нельзя, если мода с числами m и n_0 находится вблизи условия отсечки. Из уравнения (44) следует, что поправка $\zeta^{(1,0)}$ удовлетворяет квадратному уравнению.

$$(\zeta^{(1,0)})^2 + 2P\zeta^{(1,0)} + Q = 0, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} P = & \frac{kM_0 + (1 - M_0^2)\zeta_{mn_0}^{(0)}}{1 - M_0^2}, \\ Q = & -\frac{\delta\mathbf{W}_{n_0n_0}(\zeta_{mn_0}^{(0)}, \delta M(r))}{(1 - M_0^2)N_{mn_0}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Решение уравнения (45) имеет вид

$$\zeta^{(1,0)} = -P \pm \sqrt{P^2 - Q}, \quad (47)$$

где знак перед корнем выбирается исходя из удовлетворения условию (22). Аналитический способ

такого выбора знака, исходя из знания комплексных величин P и Q , можно найти в работе [7].

Заметим, что согласно выражению (17) $Q = O(\varepsilon)$, а величина P согласно выражению (8), варьируется в широких пределах. Если $P = O(1)$, то согласно (26) $\zeta^{(1,0)} = O(\varepsilon)$. Однако если $P = O(\sqrt{\varepsilon})$, что имеет место для звуковых мод, находящихся вблизи условия отсечки, то согласно (47) $\zeta^{(1,0)} = O(\sqrt{\varepsilon})$. Таким образом, наибольшую поправку к осевым волновым числам приобретают звуковые моды, находящиеся вблизи условия отсечки.

После того как поправка $\zeta^{(1,0)}$ определена, производится вычисление поправки $\delta\zeta$. Для этого разложение (43) подставляется в аргументы выражений $\delta\mathbf{W}(\zeta^{(1)}, \delta M(r))$ и $D_n(\zeta^{(1)}, \delta M(r))$ в правой части уравнения (42), после чего производится разложение в ряд Тейлора относительно величины $\delta\zeta$ с точностью до линейного члена. В итоге для поправки $\delta\zeta$ получается линейное уравнение, решение которого имеет вид

$$\delta\zeta = \frac{B}{A}, \quad (48)$$

где

$$A = - \left[(\gamma + 2(1 - M_0^2)\zeta^{(1,0)})N_{mn_0} + \frac{\left(\frac{\partial^2 \delta\mathbf{W}_{n_0 n_0}}{\partial k_x^2} \right)_0 (\delta\mathbf{W}_0)_{n_0 n_0}}{2\Delta^{(1)} D_{n_0}(\zeta^{(1,0)})} + \frac{(1 - M_0^2)N_{mn_0} \delta\mathbf{W}_{n_0 n_0}(\zeta^{(1,0)})(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0 n_0}}{(\Delta^{(1)} D_{n_0}(\zeta^{(1,0)}))^2} \right], \quad (49)$$

$$B = \frac{(\Delta^{(1)} \delta\mathbf{W}_{n_0 n_0}(\zeta^{(1,0)}))(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0 n_0}}{\Delta^{(1)} D_{n_0}(\zeta^{(1,0)})} + \sum_{n \neq n_0} \frac{(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0 n} (\delta\mathbf{W}_0)_{n n_0}}{(D_0)_{n_0}} - \frac{(\delta\mathbf{W}_0)_{n_0 n_0} \left(\frac{\partial \delta\mathbf{W}_{n_0 n_0}}{\partial k_x} \right)_0}{(\Delta^{(1)} D_{n_0}(\zeta^{(1,0)}))^2}, \quad (50)$$

и введено обозначение $\gamma = 2(kM_0 + (1 - M_0^2)\zeta_{mn_0}^{(0)})$.

Таким образом, выражения (20), (43) и (47) являются решением задачи об определении поправок к осевым волновым числам из-за наличия в цилиндрическом канале с жесткими стенками потока с тонким пограничным слоем. Поправки к

амплитудным коэффициентам определяются из выражения (31) после подстановки решения для поправки к волновым числам $\zeta^{(1)}(\delta M(r))$. Решение относительно амплитудных коэффициентов здесь не выписывается из-за их громоздкости.

В табл. 1 представлен пример результатов расчета комплексных безразмерных значений осевых волновых чисел при распространении звука в цилиндрическом канале против потока с пограничным слоем для профиля скорости, представленного на рис. 1 при безразмерном волновом числе $k = 39.4$. Поскольку число распространяющихся без затухания звуковых мод достаточно велико на данной частоте, то представлены выборочные данные, демонстрирующие основной тренд, причем кроме распространяющихся звуковых мод представлены данные и для некоторых не распространяющихся мод в однородном потоке. В третьем и четвертом столбцах представлены соответственно реальные и мнимые части волновых чисел, вычисленных из соотношения (8) для случая однородного потока, в пятом и шестом столбцах – реальные и мнимые части поправок $\zeta^{(1,0)}$, вычисленные из соотношения (47), в седьмом и восьмом столбцах – реальные и мнимые части поправок $\delta\zeta$, вычисленные из соотношения (48), а в девятом и десятом столбцах представлены итоговые значения реальных и мнимых частей волновых чисел (20).

Результаты расчетов, представленные в табл. 1, показывают, что наличие пограничного слоя в потоке в цилиндрическом канале воздухозаборника изменяет осевое волновое число не более чем на 3%, для звуковых мод с радиальным числом $n = 0$ при любых азимутальных числах m , для которых существуют более двух распространяющихся мод с радиальными числами $n > 0$. При этих же азимутальных числах для звуковых мод с радиальными числами $n > 0$ наблюдается достаточно слабое возрастание осевых волновых чисел порядка 0.5%. Если азимутальные числа звуковых мод достаточно велики настолько, что распространяются звуковые моды только с радиальными числами $n \leq 1$, то волновые числа могут изменить свои значения, причем на достаточно большую величину порядка 12% (случай $m = 47, n = 0$).

Наиболее сильным эффектом конечного порядка является обстоятельство, что звуковая мода, распространяющаяся в канале с однородным потоком, может стать при наличии пограничного слоя в потоке не распространяющейся с достаточно приличным коэффициентом затухания. В приведенном примере это звуковые моды с числами $m = 42, n = 1$ и $m = 48, n = 0$. Заметим, что сравнение величин $|\zeta^{(1,0)}|$ и $|\delta\zeta|$ для звуковой моды с $m = 48$ и $n = 0$ показывает, что представленные в табл. 1 расчеты проведены практически на макси-

Таблица 1

| m | n | $\text{Re}[\zeta_{mn_0}^{(0)}]$ | $\text{Im}[\zeta_{mn_0}^{(0)}]$ | $\text{Re}[\zeta^{(1,0)}]$ | $\text{Im}[\zeta^{(1,0)}]$ | $\text{Re}[\delta\zeta]$ | $\text{Im}[\delta\zeta]$ | $\text{Re}[k_x]$ | $\text{Im}[k_x]$ |
|-----|-----|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------|------------------|
| 0 | 0 | 110.9085 | 0 | 0.4302 | 0 | 1.7864 | 0 | 111.3388 | 0 |
| 0 | 17 | 43.478 | 21.8732 | 0.2971 | -0.2239 | 0.0541 | -0.0331 | 43.775 | 21.6493 |
| 4 | 0 | 110.5487 | 0 | 0.9778 | 0 | 1.6972 | 0 | 111.5264 | 0 |
| 4 | 7 | 99.4279 | 0 | 0.4339 | 0 | 0.0295 | 0 | 99.8618 | 0 |
| 11 | 0 | 108.7872 | 0 | 1.5315 | 0 | 1.5276 | 0 | 110.3187 | 0 |
| 11 | 4 | 99.696 | 0 | 0.4769 | 0 | 0.0354 | 0 | 100.1729 | 0 |
| 11 | 12 | 43.478 | 23.7495 | 0.3037 | -0.1862 | 0.0557 | -0.0251 | 43.7817 | 23.5632 |
| 30 | 0 | 95.7773 | 0 | 1.7925 | 0 | 0.7129 | 0 | 97.5698 | 0 |
| 30 | 3 | 69.7182 | 0 | 0.4925 | 0 | 0.0531 | 0 | 70.2107 | 0 |
| 30 | 4 | 47.7864 | 0 | 0.7784 | 0 | 0.0517 | 0 | 48.5648 | 0 |
| 35 | 0 | 89.5067 | 0 | 1.4461 | 0 | 0.3789 | 0 | 90.9529 | 0 |
| 35 | 2 | 65.0263 | 0 | 0.4117 | 0 | 0.0099 | 0 | 65.4379 | 0 |
| 42 | 0 | 76.7497 | 0 | 0.1958 | 0 | -0.3331 | 0 | 76.9455 | 0 |
| 42 | 1 | 45.3719 | 0 | -1.8939 | 4.4216 | 0.4267 | 1.2826 | 43.478 | 4.4216 |
| 47 | 0 | 60.1718 | 0 | -3.9289 | 0 | -2.4726 | 0 | 56.2429 | 0 |
| 47 | 1 | 43.478 | 31.3609 | 0.4867 | 0.907 | 0.0342 | 0.3789 | 43.9646 | 32.2679 |
| 48 | 0 | 53.6006 | 0 | -10.1226 | 6.8948 | 2.0444 | 4.9723 | 43.478 | 6.8948 |

мальной частоте звука, при которой параметр ϵ (18) можно считать малой величиной.

Таким образом, влияние пограничного слоя, несмотря на его достаточно малую толщину порядка 6% по отношению к радиусу канала, может оказать конечный эффект на отдельные звуковые моды. При этом важно отметить, что значение малого параметра (18) возрастает с ростом частоты звука, и поэтому описанные эффекты усиливаются с ростом частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено теоретическое исследование особенностей распространения звука в цилиндрическом канале с жесткими стенками при наличии потока с тонким пограничным слоем. В качестве модели распространения звука рассмотрено уравнение Придмора–Брауна, для решения которого применен асимптотический метод, развитый в предыдущих работах. При этом в отличие от работы [3], в которой в качестве малого параметра было выбрано число Маха для задачи распространения звука в прямоугольном канале с неоднородным потоком, в настоящей работе в качестве малого параметра рассматривается отклонение поля скорости потока в цилиндрическом канале от однородного.

Показано, что несмотря на то, что в случае жесткой стенки цилиндрического канала, когда отсутствует резонансный эффект слияния звуковых мод в невозмущенном случае, т.е. при рас-

пространении звуковых мод в однородном потоке, при построении асимптотического решения уравнения Придмора–Брауна необходимо использовать сингулярную теорию возмущений из-за резонансного эффекта, возникающего для звуковых мод, находящихся вблизи условия отсечки. С учетом двух первых приближений построено равномерно пригодное асимптотическое решение для поправок к осевым волновым числам звуковых мод, возникающим из-за наличия тонкого пограничного слоя, а также найдены поправки к звуковому полю каждой звуковой моды.

Анализ полученного решения показывает, что наличие тонкого пограничного слоя оказывает на каждую частоту достаточно малое влияние на осевые волновые числа звуковых мод, которые находятся вдали от условия отсечки и имеют относительно малые азимутальные числа. Однако для больших волновых чисел, когда звуковые моды оказываются вблизи условия отсечки, волновые числа, реализующиеся в однородном потоке, получают достаточно большие поправки при наличии пограничного слоя, причем этот эффект усиливается с ростом частоты звука. При этом для некоторых звуковых мод вблизи условия отсечки может иметь место эффект конечного порядка: звуковая мода, распространяющаяся в однородном потоке без затухания, может стать достаточно сильно затухающей при наличии пограничного слоя.

Непосредственным приложением результатов настоящей работы являются алгоритмы опреде-

ления модального состава звукового поля, генерируемого вентилятором авиадвигателя в канале воздухозаборника.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-71-30016) и инициирована результатами экспериментальных исследований, выполненных на базе УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФАУ “ЦАГИ”, модернизируемой при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-11-2021-066.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Yakovets M.A., Ipatov M.S., Kruglyayeva A.E., Sidorov S.Y.* Radiation of Sound from the Open End of a Duct Simulating an Air Inlet under Static Conditions and in a Flow // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. P. 76–89.
2. *Ostrikov N., Yakovets M., Denisov S., Ipatov M.* Experimental Investigation of Mean Flow Profile Effects on Impedance Eduction for Multi-Segment Liners // *AIAA Paper.* 2019. № 2019–2638.
3. *Denisov S.L., Ostrikov N.N., Yakovets M.A., Ipatov M.S.* Investigation of sound propagation in rectangular duct with transversally non-uniform flow and anisotropic wall impedance by asymptotic theory and 3D finite element method // *AIAA Paper.* 2019. No. 2019–2640.
4. *Pridmore-Brown D.C.* Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct // *J. Fluid Mech.* 1958. № 4. P. 393–406.
5. *Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Chernyshev S.A., Elliott J.W.* Aeroacoustics of supersonic jet issued from corrugated nozzle: new approach and prospects // *International Journal of Aeroacoustics.* 2004. V. 3 (3). P. 199–228.
6. *Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Chernyshev S.A., Elliott J.W.* Aeroacoustics of supersonic jet issued from corrugated nozzle: new approach and prospects // *Jet Aeroacoustics.* Ed. by G. Raman. Multi-Science Publishing CO. LTD. 2008. P. 33–66.
7. *Kopiev V.F., Ostrikov N.N.* Axisymmetrical Instability Wave Control due to Resonance Coupling of Azimuthal Modes in High-Speed Jet Issuing from Corrugated Nozzle // *AIAA Paper.* 2012. № 2012–2144.
8. *Rienstra S.W.* Duct Modes in Shear Flow: Properties and Applications of the Pridmore-Brown Equation // 4-th International Workshop “Computational experiment in aeroacoustics”. September 21–24, 2016. Svetlogorsk, Russia. <http://ceaa.imamod.ru/2016/ceaa2016mats.html>.
9. *Rienstra S.W.* Solutions and Properties of the Pridmore-Brown Equation // *AIAA Paper.* 2019. № 2019–2594.

AN ASYMPTOTIC METHOD FOR TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THE BOUNDARY LAYER OF A HIGH-SPEED FLOW ON THE PROPAGATION CHARACTERISTICS OF SOUND MODES IN A CYLINDRICAL DUCT WITH RIGID WALLS

N. N. Ostrikov^a

^a*Moscow Research Complex Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russia*

This work is devoted to the theoretical study of the features of sound propagation in a cylindrical duct with rigid walls in the presence of a flow with a thin boundary layer. A uniformly suitable asymptotic solution of the Pridmore-Brown equation describing the propagation of sound modes in the considered model situation is obtained under the condition of a small thickness of the boundary layer. It is shown that the boundary layer can have a significant effect on the axial wave numbers of cut-on sound modes, and this effect increases with increasing frequency. At the same time, for individual sound modes located near the cut-off condition, a finite-order effect may occur: a sound mode propagating in a homogeneous flow without attenuation may become attenuated in the presence of a thin boundary layer.

Keywords: annular duct, sound propagation in flows, boundary layer, sound-absorbing structures