

УДК 532.527

## РАЗВИТИЕ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ НЕЗАКРЕПЛЕННОГО ЦИЛИНДРА ЦИРКУЛЯЦИОННЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

© 2022 г. М. А. Юдин<sup>1,\*</sup>, В. Ф. Копьев<sup>1</sup>, С. А. Чернышев<sup>1</sup>

Поступило 25.04.2022 г.

После доработки 12.05.2022 г.

Принято к публикации 12.05.2022 г.

Рассмотрена двумерная система, имеющая вид незакрепленного кругового цилиндра, помещенного в циркуляционный поток невязкой несжимаемой жидкости с переменной завихренностью. Работа посвящена изучению процессов, происходящих в критических слоях вихревых течений (область, в которой фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью среднего течения) на примере задачи, имеющей точное аналитическое решение. Ранее для такой системы была рассмотрена и описана дискретная часть спектра, т.е. были получены отдельные собственные колебания и показано, что в определенном диапазоне параметров система обладает сдвиговой неустойчивостью. В настоящей работе рассмотрены особенности динамики системы, связанные с непрерывным спектром. С этой целью решена начальная задача и проведен анализ процесса нарастания больших возмущений завихренности в окрестности критического слоя из состояния с гладкими начальными условиями.

*Ключевые слова:* сдвиговая неустойчивость, критический слой, начальная задача

**DOI:** 10.31857/S2686740022050145

### ВВЕДЕНИЕ

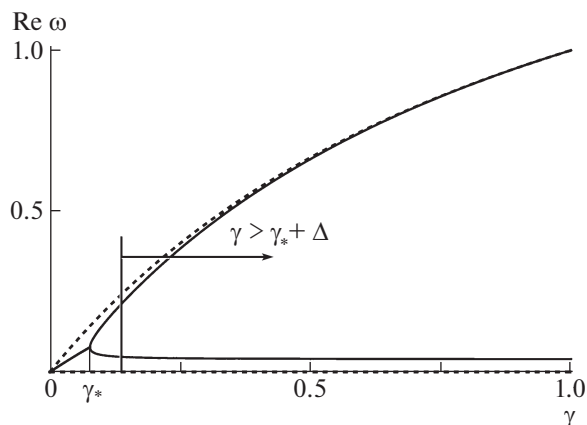
В работе [1] рассматривался случай потенциальных возмущений в двумерной системе, имеющей вид незакрепленного кругового цилиндра, помещенного в циркуляционный поток невязкой несжимаемой потенциальной жидкости или жидкости с постоянной завихренностью, ограниченный внешней жесткой круговой границей. Колебания такой системы характеризуются наличием критического слоя, в котором фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью среднего течения. В случае потенциальных возмущений на критическом слое не возникает особенностей возмущений скорости. Однако критический слой оказывается сингулярной областью для поля смещения, что оказывается важным при малых изменениях исходной системы, например, добавлении в течение пассивной примеси или малой неоднородности среднего поля завихренности. Для описания этих явлений в работе [2] для потенциальных возмущений поставлена и решена началь-

ная задача, в которой учтены возмущения как дискретного, так и непрерывного спектра (особенности такого решения на примере плоскопараллельной задачи рассмотрены в [3]). Решение этой задачи в [2] показывает, каким образом возникает особенность поля смещения в критическом слое при первоначально гладких возмущениях.

В данной работе рассматривается та же система, что и в [2], с тем отличием, что циркуляционный поток имеет монотонно меняющуюся по радиусу завихренность. В случае малой монотонной завихренности дискретные собственные колебания, имевшие действительные частоты в системе [2], приобретают мнимую добавку к частоте, в результате чего реализуется так называемая сдвиговая неустойчивость [4, 5]. Сдвиг собственной частоты в комплексную плоскость приводит к тому, что колебания перестают быть сингулярными в критическом слое. Тем не менее при близости собственной частоты к действительной оси амплитуда возмущений в окрестности критического слоя достигает большой величины. Отметим, что в отличие от плоскопараллельного течения, которое в потенциальном случае сводится к тривиальному постоянному потоку, циркуляционное потенциальное течение имеет характерную зависимость средней скорости от радиуса  $\sim 1/r$ . Поэтому

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

\*E-mail: mikleudin@ya.ru



**Рис. 1.** Зависимость действительной части собственных частот  $\omega_{1,2}$  от параметра  $\gamma$ , представляющего собой отношение плотности жидкости к плотности цилиндра ( $\gamma = 0$  соответствует бесконечно тяжелому цилиндру) [1], пунктирная линия соответствует безграничному случаю (отсутствие внешней границы) [4].

наложение на такое течение даже слабой монотонно меняющейся средней завихренности позволяет проявиться важным эффектам, связанным с появлением критических слоев в системе и, в частности, сдвиговой неустойчивости.

Целью настоящей работы является исследование процессов нарастания возмущений в окрестности критического слоя, что требует решения задачи о развитии начального возмущения, включающего возмущения непрерывного спектра. Рассматривается малая средняя завихренность простейшего вида с зависимостью от радиуса  $\sim 1/r$ , позволяющая получать и анализировать точное решение.

Отметим, что ситуация с произвольным профилем средней завихренности также в ряде случаев имеет точное аналитическое решение, но нас будет в первую очередь интересовать случай слабо меняющейся завихренности, в котором инкремент неустойчивости оказывается малым. Именно такая ситуация приводит к интересным физическим следствиям, главная особенность которых связана с большой амплитудой возмущений на критическом слое. Наличие слабой завихренности фактически запускает процесс интенсификации вихревого поля на критическом слое и может иметь важные приложения в динамике интенсивных криволинейных вихревых нитей, когда наличие множества близко расположенных критических слоев приводит к турбулизации целых областей течения вблизи вихревого ядра [5].

Рассматриваемая в работе начальная задача для колебаний свободного цилиндра в безграничном [4] или ограниченном [1] циркуляционном

потоке имеет точное аналитическое решение. Анализ этого решения показывает, что в ограниченном течении сдвиговая неустойчивость, сопровождаемая интенсификацией возмущений завихренности вблизи критического слоя, возникает как в случае нарастающей, так и убывающей средней завихренности. Это приводит к реализации двух ветвей неустойчивости [1] (рис. 1). Сдвиговая неустойчивость реализуется справа от точки пересечения дисперсионных кривых. Слева реализуется неустойчивость, связанная с конечностью области течения, которая исчезает в случае безграничного течения. Наличие неустойчивости второго типа дополнительно осложняет задачу, и соответствующая ей область параметров в этой работе рассматриваться не будет, поскольку нас интересуют в первую очередь эффекты, связанные с реализацией сдвиговой неустойчивости.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, состоящую из внутреннего свободного цилиндра, циркуляционного потока невязкой несжимаемой жидкости вокруг него и внешнего закрепленного цилиндра, ограничивающего область течения (рис. 2). В положении равновесия цилиндры расположены коаксиально. Зададим угловую скорость среднего течения  $U_0(r) = \frac{U_m}{r^2} + \mu \frac{\Omega_1}{r}$ , где  $U_m$ ,  $\Omega_1$  – некоторые константы,  $\mu \ll 1$  – безразмерный малый параметр. Первый член соответствует потенциальной части среднего течения, второй – наложенной малой монотонной завихренности, которая имеет вид  $\mu \Omega_1/r$ , малость  $\mu$  означает, что для среднего течения угловая скорость, индуцированная такой завихренностью, много меньше потенциальной части скорости.

Цилиндр в начальный момент времени  $t = 0$  приводится в движение импульсной передачей ему скорости  $V_0$ , в предположении, что при  $t < 0$  система находится в равновесии. В линейном приближении исследуются динамика цилиндра и развитие возмущений в потоке, в частности, особенности поля течения в окрестности критического слоя, связанные с ростом смещения жидких частиц и интенсификации завихренности.

Как и в работах [1, 2, 4–6], решение ищется с помощью переменной поля смещения  $\epsilon$ , впервые введенной Чандрасекхаром [7] и описанной в монографии Дразина и Рейда [8]. Поле смещения  $\epsilon$  – эйлерова переменная, описывающая отклонение жидких частиц при возмущении течения от их траектории в стационарном течении. В несжимаемой жидкости поле смещения является бездивергентным

$$\nabla \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (1)$$

и его эволюция описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) = \mathbf{v}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{V}_0$  – поле скорости стационарного течения,  $\mathbf{v}$  – возмущения скорости. Для замыкания уравнений (1), (2) будем использовать дополнительное условие изозавихренности возмущений, введенное Арнольдом [9, 10]. Для таких возмущений поле смещения  $\boldsymbol{\varepsilon}$  связывает возмущение поля завихренности  $\delta\boldsymbol{\Omega}$  со значением завихренности в стационарном течении  $\boldsymbol{\Omega}_0(r)$  с помощью соотношения [8]

$$\delta\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0), \quad \boldsymbol{\Omega}_0 = \nabla \times \mathbf{V}_0, \quad (3)$$

и с возмущением скорости

$$\mathbf{v} = \nabla \times \delta\boldsymbol{\Omega}. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) описывают динамику изозавихренных возмущений стационарного течения при произвольном поле завихренности. Отметим, что изозавихренные возмущения не исчерпывают всех возмущений вихревого поля, а представляют собой только возмущения, которые могут быть получены произвольным бездивергентным смещением жидких частиц.

В линейном приближении, следуя [1], уравнение границы подвижного цилиндра запишем как

$$r = R_1 + \xi_0 \exp(i\varphi),$$

где  $\xi_0 = x_0 - iy_0$  – смещение центра цилиндра относительно положения равновесия. Нормальная к поверхности цилиндра компонента поля смещения должна совпадать со смещением поверхности цилиндра в силу условия непротекания. Таким образом, будем искать поле смещения в виде первой гармоники по углу  $\varphi$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, t, \varphi) = \begin{pmatrix} \varepsilon^r(r, t) \\ \varepsilon^\varphi(r, t) \end{pmatrix} \exp(i\varphi). \quad (5)$$

Тогда уравнения (1)–(5) с учетом радиально симметричного среднего течения с угловой скоростью  $U_0(r)$  можно переписать в виде

$$ir \frac{\partial^3 \varepsilon^r}{\partial r^2 \partial t} + 3i \frac{\partial^2 \varepsilon^r}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 \varepsilon^r}{\partial r^2} r U_0 - \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial r} (3U_0 + 2rU_0') = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями непротекания на внешнем и внутреннем цилиндрах  $\varepsilon^r|_{r=R_1} = \xi_0$ ,  $\varepsilon^r|_{r=R_2} = 0$  и начальным условием отсутствия возмущений течения при  $t = 0$ :  $\varepsilon^r|_{t=0} = 0$ . Смещение центра цилиндра  $\xi_0$  само определяется динамикой цилиндра под действием сил давления со стороны жидкости [2]:

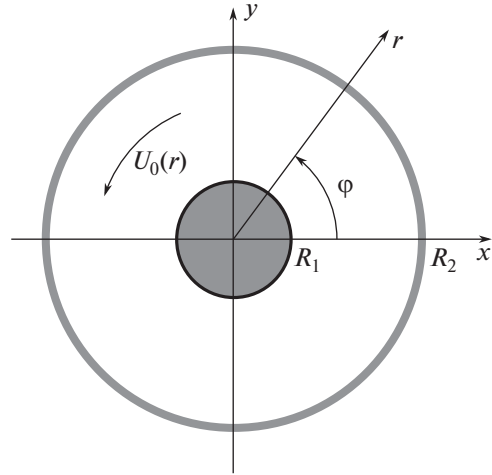


Рис. 2. Рассматриваемая колебательная система.

$$M \ddot{\xi}_0 = -\pi R_1 \left( -r \frac{\partial^2 \varepsilon^r}{\partial t^2} + r^2 U_0^2 \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial r} - 2ir^2 U_0 \frac{\partial^2 \varepsilon^r}{\partial r \partial t} - r^2 \frac{\partial^3 \varepsilon^r}{\partial r \partial t^2} \right)_{r=R_1}. \quad (7)$$

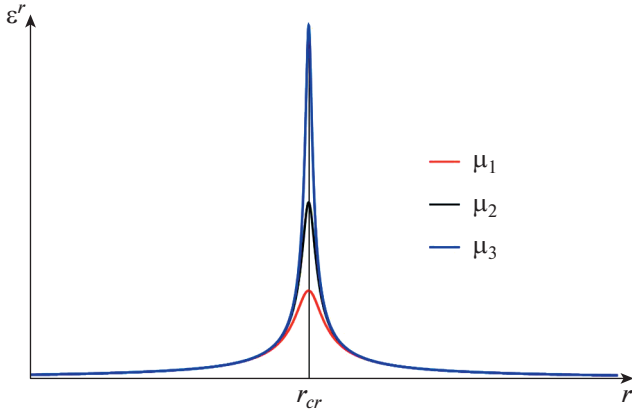
Уравнение (7) дополним начальными условиями  $\xi_0|_{t=0} = 0$ ,  $\frac{\partial \xi_0}{\partial t}|_{t=0} = V_0$ , соответствующими приданию в начальный момент скорости  $V_0$  подвижному цилиндру.

Таким образом, необходимо совместное решение уравнений динамики жидкости и цилиндра с заданными начальными и граничными условиями.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Для нахождения решения можно воспользоваться методом, использованным в [2], где получено искомое решение в частотном пространстве, от которого затем взято обратное преобразование Фурье для того, чтобы получить решение поставленной начальной задачи во временной области. Исследуется процесс развития возмущений в среднем течении после мгновенного придания начального движения внутреннему цилиндру. Для случая потенциального среднего течения между цилиндрами или течения с постоянной завихренностью [2] такой метод решения в частотном пространстве оказался очень удобен, поскольку интеграл, определяющий структуру решения в частотной области, удается взять точно.

В рассматриваемом случае среднего течения с переменной по радиусу завихренностью удобно поступить по-другому. Разобьем решение поставленной задачи Коши в линейном приближении на сумму двух решений:



**Рис. 3.** Амплитуда поля смещения вблизи критического слоя для различной завихренности в среднем течении ( $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ ).

1) решение  $\epsilon_1^r(r, t)$ , удовлетворяющее граничным условиям непротекания на внешнем и внутреннем цилиндре. Это решение не обязано быть нулевым в области между цилиндрами в началь-

ный момент времени, поэтому в качестве подходящего решения могут быть выбраны собственные колебания, полученные ранее [2];

2) решение  $\epsilon_2^r(r, t)$  с нулевыми граничными условиями и начальным условием  $\epsilon_2^r(r, 0) = -\epsilon_1^r(r, 0)$ .

Легко видеть, что решение  $\epsilon^r(r, t) = \epsilon_1^r(r, t) + \epsilon_2^r(r, t)$  будет удовлетворять и граничным условиям на поверхностях цилиндров, и начальному условию отсутствия возмущений в самом течении, и таким образом оно будет представлять искомое решение задачи.

Решение для собственных колебаний  $\epsilon_1^r(r, t)$ , полученное в [2], удовлетворяющее требуемым граничным условиям, представляет собой сумму двух гармоник

$$\epsilon_1^r(r, t) = \frac{iV_0 I(r, \omega_1)}{(\omega_1 - \omega_2) I(R_1, \omega_1)} \exp(-i\omega_1 t) + \frac{iV_0 I(r, \omega_2)}{(\omega_2 - \omega_1) I(R_1, \omega_2)} \exp(-i\omega_2 t), \tag{8}$$

где

$$I(r, \omega) = \frac{(R_2 - r)(2rU_m\omega + 2R_2U_m\omega - \mu U_m\Omega_1 + \mu rR_2\omega\Omega_1)}{(4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2)(U_m + r(-r\omega + \mu\Omega_1))(U_m + R_2(-R_2\omega + \mu\Omega_1))} + \frac{\mu\Omega_1 \ln \left[ \frac{(2R_2\omega - \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})(-2r\omega + \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})}{(2r\omega - \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})(-2R_2\omega + \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})} \right]}{(4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2)^{3/2}},$$

а частоты  $\omega_{1,2}$  определяются из решения следующего уравнения  $-\omega^2 + \gamma \left( \omega^2 - \frac{1}{R_1^2 I(R_1, \omega)} \right) = 0$ . Однако это решение, как указано выше, не обращается в начальный момент в нуль во всей области между цилиндрами и не является, очевидно, решением искомой начальной задачи.

Собственные колебания (8) во многом аналогичны колебаниям в задаче о потенциальных возмущениях, однако их амплитуда теперь не обращается в бесконечность на критическом слое, а остается конечной, хотя и большой. В случае безграничного течения [4] собственное колебание имеет вид

$$\epsilon_1^r(r, t) = C \frac{U_m - \omega_1 R_1^2}{((U_m - \omega_1 r^2) - i\delta r^2)} \exp(-i(\omega_1 + i\delta)t), \tag{9}$$

где инкремент пропорционален градиенту завихренности в критическом слое, т.е.  $\delta \sim \mu$ .

При уменьшении градиента средней завихренности, т.е. при  $\mu \rightarrow 0$ , уменьшается инкремент неустойчивости  $\delta$ . При этом поле смещения на

критическом слое  $r^2 = U_m/\omega_1$  оказывается не бесконечным, но большим с амплитудой, растущей обратно пропорционально инкременту неустойчивости  $\delta$  (рис. 3). В предельном случае потенциального обтекания получим сингулярность за счет обращения в бесконечность амплитудного множителя (9).

Для возмущений завихренности предельный переход  $\mu \rightarrow 0$  отличается от описанного выше предела для поля смещения. Если поле смещения на критическом слое стремится к бесконечности, поле возмущений завихренности остается конечным, хотя и большим. Действительно, из (3) следует соотношение, связывающее амплитуды возмущений завихренности и поля смещения при любом  $r$ , в том числе и в критическом слое  $\delta\Omega(r, t) = \mu \frac{\Omega_1}{r^2} \epsilon_1^r$ . Легко видеть, что при  $\mu \rightarrow 0$  возмущения завихренности стремятся к нулю во всей области течения, кроме окрестности критического слоя, где амплитуда возмущений завихренности остается конечной, поскольку в этой области малый параметр  $\mu$  входит одновременно и в числи-

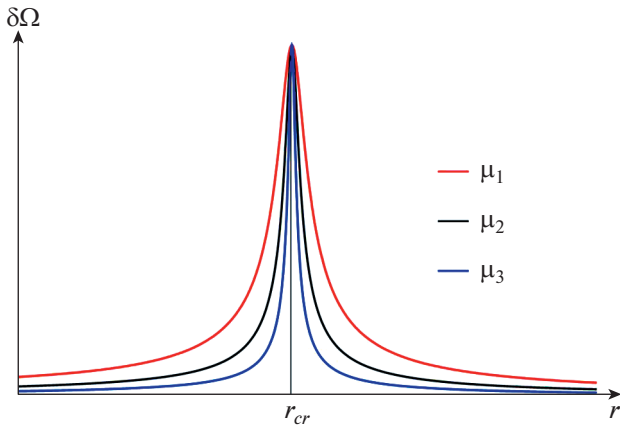


Рис. 4. Амплитуда возмущений завихренности вблизи критического слоя для различной завихренности в среднем течении ( $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ ).

тель, и в знаменатель выражения для амплитуды  $\delta\Omega(r, t) \sim \mu \frac{\Omega_1}{r^2} \frac{1}{\delta} \exp(-i(\omega + i\delta)t)$ .

На рис. 4 представлено изменение амплитуды возмущений завихренности при уменьшении градиента завихренности в среднем течении ( $\mu \rightarrow 0$ ). Можно видеть уменьшение ширины слоя, в котором возмущения завихренности значительны, при сохранении максимального значения амплитуды. В предельном случае потенциального течения ширина слоя завихренности стремится к нулю, что соответствует стремлению к нулю вклада этой завихренности в поле скорости.

Теперь перейдем к получению решения  $\varepsilon_2^r(r, t)$ . Будем решать уравнение (6) с нулевыми граничными условиями

$$\varepsilon_2^r(R_1, t) = 0, \quad \varepsilon_2^r(R_2, t) = 0 \quad (10)$$

и начальным условием

$$\varepsilon_2^r(r, 0) = -\varepsilon_1^r(r, 0) = \varepsilon_0(r),$$

где в силу (8)  $\varepsilon_0(r) = \frac{iV_0}{(\omega_1 - \omega_2)} \left[ \frac{I(r, \omega_1)}{I(R_1, \omega_1)} - \frac{I(r, \omega_2)}{I(R_1, \omega_2)} \right]$ .

Легко видеть, что при  $r = R_{1,2}$  величина  $\varepsilon_0(r)$  обра-

щается в нуль, что согласуется с граничным условием (10) в начальный момент.

Применим одностороннее преобразование Фурье

$$E^r(r, \omega) = \int_0^\infty \varepsilon_2^r(r, t) \exp(i\omega t) dt$$

к уравнению (6) и с учетом начального условия получим

$$r(\omega - U_0(r)) \frac{\partial^2 E^r}{\partial r^2} + 3(\omega - U_0(r)) \frac{\partial E^r}{\partial r} - 2rU_0' \frac{\partial E^r}{\partial r} = ir \frac{\partial^2 \varepsilon^r}{\partial r^2} \Big|_{t=0} + 3i \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial r} \Big|_{t=0}. \quad (11)$$

Правая часть определяется начальным условием и вычисляется взятием производных от  $\varepsilon_0(r)$ . Граничные условия (10) переписутся в виде  $E(R_1, \omega) = 0, E(R_2, \omega) = 0$ .

Решение неоднородного уравнения (11) будем искать с помощью метода неопределенных коэффициентов  $E(r, \omega) = C_1(r, \omega) + C_2(r, \omega) I(r, \omega)$ , где

$$C_1(r, \omega) = \int_r^{R_2} \frac{ir_1 \frac{\partial^2 \varepsilon^r(r_1)}{\partial r_1^2} \Big|_{t=0} + 3i \frac{\partial \varepsilon^r(r_1)}{\partial r_1} \Big|_{t=0}}{r_1(\omega - U_0) \frac{\partial I(r_1, \omega)}{\partial r_1}} I(r_1, \omega) dr_1 + B_1(\omega),$$

$$C_2(r, \omega) = - \int_r^{R_2} \frac{ir_1 \frac{\partial^2 \varepsilon^r(r_1)}{\partial r_1^2} \Big|_{t=0} + 3i \frac{\partial \varepsilon^r(r_1)}{\partial r_1} \Big|_{t=0}}{r_1(\omega - U_0) \frac{\partial I(r_1, \omega)}{\partial r_1}} dr_1 + B_2(\omega).$$

Константы  $B_1(\omega)$  и  $B_2(\omega)$ , в свою очередь, определяются из граничных условий. Так, из условия  $E(R_2, \omega) = 0$  сразу следует, что  $B_1(\omega) = 0$ . Второе граничное условие рассмотрим позднее. Решение можно представить в виде

$$E(r, \omega) = \int_r^{R_2} (F_1 + F_2) dr_1, \quad (12)$$

$$F_1 = \frac{i(r - r_1)(2(r + r_1)U_m\omega - \mu U_m\Omega_1 + rr_1\omega\mu\Omega_1)(3\varepsilon_0'(r_1) + r_1\varepsilon_0''(r_1))}{(4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2)(U_m + r(-\omega r + \mu\Omega_1))},$$

$$F_2 = - \frac{i\mu\Omega_1(U_m + r_1(-\omega r_1 + \mu\Omega_1))(3\varepsilon_0'(r_1) + r_1\varepsilon_0''(r_1))}{(4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \ln \left[ \frac{(-2r\omega + \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})(2r_1\omega - \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})}{(2r\omega - \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})(-2r_1\omega + \mu\Omega_1 + \sqrt{4U_m\omega + \mu^2\Omega_1^2})} \right].$$

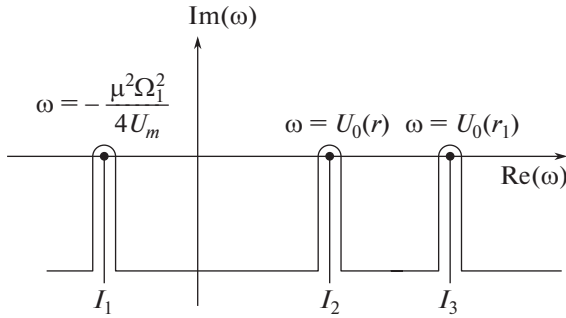


Рис. 5. Разрезы функции  $F_2$ .

Интегрирование выражения (12) и взятие обратного преобразования Фурье перестановочны. Рассмотрим обратное преобразование Фурье от подынтегральной функции

$$f_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1 \exp(i\omega t) dt = \pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega = \frac{\mu^2 \Omega_1^2}{4U_m}} [F_1 \exp(-i\omega t)] + \pi i \operatorname{res}_{\omega = U_0(r)} [F_1 \exp(-i\omega t)] = O(\mu) \exp\left(-i \frac{\mu^2 \cdot \Omega_1^2}{4U_m} t\right) + \left(\frac{r^2 - r_1^2}{2r^2} (3\varepsilon_0'(r_1) + r_1 \varepsilon_0''(r_1)) + O(\mu)\right) \exp(-iU_0(r)t).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (12). Функция  $F_2$  обладает алгебраической точкой ветвления  $\omega = -\frac{\mu^2 \Omega_1^2}{4U_m}$  и двумя логарифмическими точками ветвления  $\omega = U_0(r)$ ,  $\omega = U_0(r_1)$ . Проведем разрезы функции  $F_2$ , как указано на рис. 5, и выберем ветвь функции  $\sqrt{4U_m \omega + \Omega_1^2}$  таким образом, что при  $4U_m \omega + \Omega_1^2 > 0$  корень принимает положительное значение. Ветви логарифмических функций выберем так, чтобы логарифм обращался в нуль при обращении аргумента в единицу.

Деформируя контур интегрирования (рис. 5), получим, что обратное преобразование Фурье будет равно сумме трех интегралов по разрезам

$$f_2 = I_1 + I_2 + I_3.$$

Проводя необходимые вычисления, получим, что  $I_1 = O(\mu)$ ,  $I_2 = O(\mu)$ ,  $I_3 = O(\mu)$ . Таким образом,

$$\varepsilon_2^r = \int_r^{R_2} \frac{(r^2 - r_1^2)}{2r^2} (3\varepsilon_0'(r_1) + r_1 \varepsilon_0''(r_1)) \times \exp(-iU_0(r)t) dr_1 + O(\mu).$$

Проводя интегрирование, получим

$$\varepsilon_2^r(r, t) = \varepsilon_0(r) \exp(-iU_0(r)t) + O(\mu).$$

Полученное решение удовлетворяет граничному условию на внутреннем цилиндре с точностью до  $O(\mu)$ :

$$\varepsilon_2^r(R_1, t) = -\varepsilon_1^r(R_1, 0) \exp(-iU_0(R_1)t) + O(\mu) = O(\mu).$$

Нас в первую очередь интересуют возмущения завихренности, которые легко выразить через полученное решение начальной задачи

$$\delta\Omega = \varepsilon^r \frac{\Omega_1}{r^2}, \quad (13)$$

где поле смещения  $\varepsilon^r$  определяется суммой  $\varepsilon^r = \varepsilon_1^r + \varepsilon_2^r$ , в которой  $\varepsilon_1^r$  и  $\varepsilon_2^r$  определены ранее. Найденные выражения являются итоговыми в решении начальной задачи для поля смещения и поля завихренности. Возмущения поля скорости определяются выражением (4).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим решение для возмущения поля завихренности (13). Оно состоит из трех слагаемых: два соответствуют собственным частотам колебания, а третье — непрерывному спектру. При разложении по малому параметру  $\mu$  можно представить собственную частоту как  $\omega_1 = \omega_0 + i\delta$ , где мнимая добавка имеет порядок  $O(\mu)$ , а  $\omega_0$  — нулевое приближение в решении, которое соответствует потенциальному течению. Таким образом, решение для завихренности можно выписать в следующем виде:

$$\delta\Omega = A_1 \frac{I(r, \omega_1)}{r} \exp(-i\omega_1 t + \delta t) + A_2 \frac{I(r, \omega_2)}{r} \exp(-i\omega_2 t) + f(r) \exp(-iU_0(r)t).$$

На критическом слое  $U_0(r) = \omega_0$ , и при сложении первого и третьего слагаемого возникает вековой член и на временах  $\delta \cdot t \ll 1$  в нулевом приближении решение может быть получено в следующей форме:

$$\delta\Omega = \frac{V_0 \omega_0 (-\Gamma + \omega_0 R_2^2) (-\Gamma + \omega_0 R_1^2) \Omega_1}{(R_2^2 - R_1^2) \Gamma^2 (\omega_0 - \omega_2)} t \times \exp(-i\omega_0 t) + o(1). \quad (14)$$

Как видно из полученного решения, рост возмущений в критическом слое не зависит от инкремента неустойчивости.

Эволюция возмущений завихренности во всей области течения, определяемая уравнениями (1)–(4), изображена на рис. 6, 7. Первоначально гладкое решение (рис. 6а) с течением времени превращается в интенсивную спиральную структуру (рис. 6в), которая все более локализуется около критического слоя.

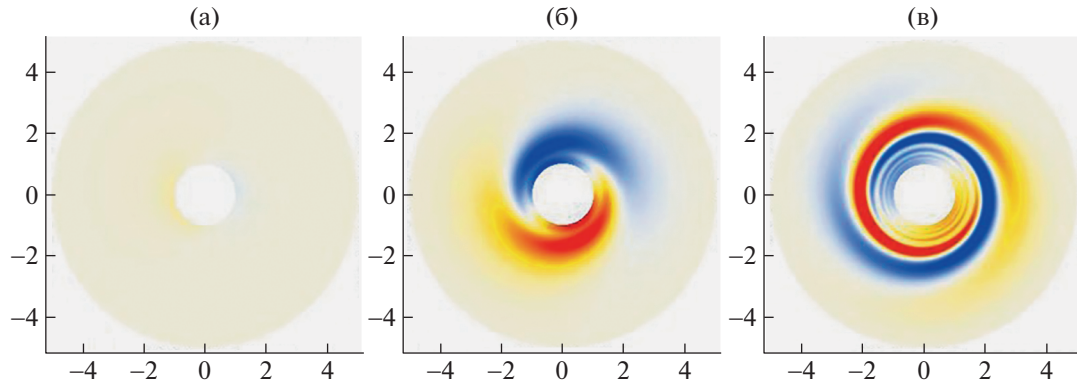


Рис. 6. Эволюция возмущения завихренности вблизи критического слоя.

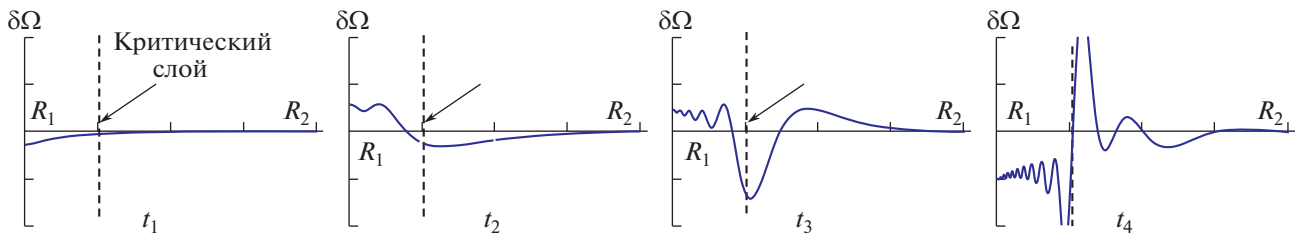


Рис. 7. Эволюция возмущения завихренности поперек линий тока.

На рис. 7 изображена эволюция поля смещения поперек линий тока, также демонстрирующая эффект интенсификации возмущений вблизи критического слоя.

Решение такого типа реализуется при малых инкрементах. Если инкременты значительны, что имеет место для течения с большой и сильно меняющейся средней завихренностью, неустойчивость также имеет место [1], но область вблизи критического слоя выделить не удастся, возмущения будут нарастать во всей области течения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что при развитии возмущений в вихревой системе с циркуляционным течением могут возникать характерные спиралевидные структуры, с нарастанием числа оборотов и увеличением амплитуды поля завихренности в критическом слое. Главным результатом работы является аналитическое описание этого сценария в задаче с гладкими начальными условиями.

Описанное в работе возникновение спиралевидной интенсивной структуры для возмущений завихренности является возможной причиной сложной слоистой структуры поля течения в окрестности ядра крупномасштабных вихревых структур, и в частности, вихревых колец. Для вихревых колец наличие множественных критических слоев в окрестности вихревого ядра может

приводить на нелинейной стадии (как было отмечено в [4]) к транспорту завихренности поперек линий тока с последующей турбулизацией всей области течения, которая заполнена критическими слоями.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-71-30016).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А. Неустойчивость цилиндра в циркуляционном потоке несжимаемой идеальной жидкости // ПММ. 2017. Т. 81. № 2. С. 216–229.
2. Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А. Развитие начальных возмущений в задаче о движении цилиндра, обтекаемого циркуляционным потоком // МЖГ. 2019. № 6. С. 75–83.
3. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
4. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Неустойчивость колеблющегося цилиндра в циркуляционном потоке идеальной жидкости // МЖГ. 2000. № 6. С. 78–92.
5. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерации звука // УФН. 2000. Т. 170. № 7. С. 713–742.

6. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 341. P. 19–47.
7. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven (CT): Yale Univ. Press, 1969.
8. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
9. *Арнольд В.И.* Об условии нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // *ДАН СССР.* 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.
10. *Арнольд В.И.* Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // *ПММ.* 1965. Т. 29. № 5. С. 846–851.

## DEVELOPMENT OF INITIAL DISTURBANCES IN THE CIRCULATING FLOW WITH VARIABLE VORTICITY AROUND FREE CYLINDER

M. A. Yudin<sup>a</sup>, V. F. Kopiev<sup>a</sup>, and S. A. Chernyshev<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Moscow Research Complex Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russia*

Two-dimensional system consists of a circular cylinder placed in a circulating flow of an inviscid incompressible fluid with variable vorticity is considered in this paper. The work is devoted to the study of the processes in the critical layers of vortex flows (the region in which the phase velocity of perturbations coincides with the velocity of the mean flow) using the example of a problem with exact analytical solution. Earlier, for such a system, the discrete part of the spectrum was considered and described, i.e. individual natural oscillations were obtained and it was shown that in a certain range of parameters the system exhibits shear instability. In this paper, we consider the features of the system dynamics related to the continuous spectrum. For this purpose, the initial problem is solved and an analysis of the growth of large vorticity perturbations in the vicinity of the critical layer from a state with smooth initial conditions is made.

*Keywords:* shear instability, critical layer, initial problem