ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2022, том 506, № 1, с. 26–30

УДК 532.517.4, 52.337

О ВЫРОЖДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СИСТЕМЕ

© 2022 г. К. П. Зыбин[1,2,*], А. С. Ильин[1,2], А. В. Копьев[1], В. А. Сирота[1]

Поступило 25.04.2022 г.
После доработки 12.05.2022 г.
Принято к публикации 12.05.2022 г.

Рассмотрена динамика статистически однородного и изотропного магнитного поля, генерируемого несжимаемым турбулентным плазменным потоком с большим, но конечным, магнитным числом Прандтля. Оказывается, что в масштабах меньших, чем вязкий масштаб Колмогорова, нелинейное обратное воздействие магнитного поля на динамику жидкости экспоненциально затухает, несмотря на экспоненциально быстрый рост магнитного поля. Показано, что анизотропия диффузии в космической плазме приводит к дополнительному усилению эффекта затухания обратного воздействия. Также показано, что вырождение обратного воздействия приводит к энергетическому парадоксу, который разрешается на более поздней стадии развития начальных возмущений при приближении пространственного масштаба магнитных флуктуаций к колмогоровскому. Обсуждается возможность вырождения нелинейности в более сложных системах: нечто подобное может иметь место в гидродинамической турбулентности, давая возможность найти ключ к ее теоретическому анализу.

Ключевые слова: теория изотропной турбулентности, кинематическое динамо

DOI: 10.31857/S2686740022050169

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентное динамо является наиболее естественным механизмом роста затравочного магнитного поля в астрофизических системах [1, 2]. Идея этого механизма заключается в том, что случайный перенос растягивает магнитные линии, увеличивая тем самым флуктуации магнитного поля. Действительно, уравнение транспорта магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ в несжимаемом проводящем потоке описывается уравнением индукции [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} + \kappa\Delta\mathbf{B}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – скорость потока, κ – коэффициент магнитной диффузии. Заметим, что уравнение индукции с точностью до переобозначений совпадает с уравнением Гельмгольца для завихренности. Таким образом, магнитное поле удовлетворяет теоремам “вмороженности” на тех масштабах, на которых можно пренебречь диффузионным слагаемым, что и приводит к усилению флуктуаций магнитного поля на этих масштабах [3].

Принципиальным различием в динамике полей завихренности и магнитного поля является характер нелинейной обратной связи с полем скорости. Если для завихренности она проявляется в нелокальной кинематической связи со скоростью интегралом Био–Савара–Лапласа, то магнитное поле оказывает на проводящую среду обратное влияние динамически, с помощью силы Лоренца [3, 4]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p_B + \mathbf{F} + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}_{\nu}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}. \qquad (3)$$

Здесь $p_B = p + \frac{1}{8\pi}B^2$ – магнитное давление, ν – кинематическая вязкость, плотность взята равной единице, $\mathbf{f}_{\nu}$ – стохастическая крупномасштабная накачка, поддерживающая стационарное турбулентное поле скорости. Таким образом, обратное воздействие магнитного поля является

[1]*Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: zybin@lpi.ru*

квадратичным по полю и для малых затравочных полей является пренебрежимо малым. В данной работе исследуется зависимость от времени обратного влияния изначально малого магнитного поля на поле скорости. При этом рассматривается случай сильно проводящей турбулентной среды, характеризующейся большим магнитным числом Прандтля[1]:

$$\mathrm{Pr}_m = \frac{\nu}{\kappa} \approx \frac{r_\nu^2}{r_d^2} \gg 1, \tag{4}$$

где r_ν – колмогоровский масштаб турбулентности [5], а r_d – масштаб диффузии магнитного поля [6]. Назовем мелкомасштабными возмущения, начальный масштаб которых $l \ll r_\nu$. Хорошо известен эффект экспоненциального нарастания мелкомасштабных возмущений в сильно проводящей турбулентной среде [6, 7]. В такой системе поле скорости можно аппроксимировать линейной функцией координат, и рост магнитного поля оказывается особенно эффективным. Однако структура возрастающего стохастического магнитного поля такова, что наивная оценка для обратной связи $|(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}| \cong B^2/r_d$ оказывается сильно завышенной [8]. Более того, учет сколь угодно малой, но конечной диффузии, приводит к парадоксальному результату: обратная связь после начальной стадии экспоненциального роста экспоненциально затухает при одновременном экспоненциальном росте магнитного поля [9]. В разделе 1 мы кратко обсуждаем данный результат. В разделе 2 мы показываем, что анизотропия магнитной диффузии, имеющая место в космической плазме, усиливает эффект вырождения обратного воздействия. Далее, в разделе 3 мы показываем, что обратная связь не может бесконечно убывать в случае конечности кинетической энергии потока, и за стадией экспоненциального затухания возобновляется стадия экспоненциального роста. Причина этого заключается в том, что по истечении определенного времени изначально мелкомасштабное магнитное поле существенным образом развивается в инерционном диапазоне турбулентных масштабов, где линейная аппроксимация скорости становится недостаточной, и хотя темп роста магнитного поля на этой стадии остается таким же, его механизм становится принципиально другим [10]. Наконец, в разделе 4 обсуждаются полученные результаты и их важность для теории гидродинамической турбулентности.

[1] Заметим, что при $\mathrm{Pr}_m = 1$ начальная динамика магнитного поля совпадает с начальной динамикой акустической турбулентности [3].

1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ [9]

В работе [9] нами рассматривались уравнения магнитной гидродинамики (1), (2) и анализировалась сила Лоренца, влияющая на поле скоростей. Как видно из уравнения (2), ее можно разделить на два члена: один из этих членов имеет градиентную форму и приводит к перенормировке давления, поэтому он не влияет на динамику скорости. Для другого члена показывается, что, хотя он содержит коррелятор магнитной индукции второго порядка и несмотря на экспоненциальный рост магнитного поля, этот член уменьшается. Причина в том, что стохастическое магнитное поле не является бесструктурным: области высокой индукции имеют форму трубок и листов, а градиент магнитного поля всегда почти точно ортогонален магнитной линии. Таким образом, его произведение на магнитную индукцию остается малым, а обратная связь на турбулентность остается пренебрежимо малой, даже несмотря на то, что сама индукция увеличивается.

Обнаруженное уменьшение “эффективной” части силы Лоренца тесно связано с магнитной диффузией потока. Аппроксимация “идеального проводника” ($\kappa = 0$) была проанализирована в работе [8]; было показано, что сила Лоренца возрастает экспоненциально. В работе [9] показано, что даже малая диффузия существенна: она замедляет рост магнитного поля (хотя он все еще остается экспоненциальным), и статистические моменты силы Лоренца всех степеней экспоненциально уменьшаются. Таким образом, сила Лоренца остается малой для любой конечной диффузии, если масштаб и амплитуда начальных флуктуаций достаточно малы.

Итак, оказывается, что обратная связь не останавливает механизм генерации поля и не влияет на стационарное значение флуктуаций магнитного поля в вязком диапазоне турбулентности. В связи с этим возникает вопрос об ограничении роста поля. Его причиной оказывается конечность вязкого диапазона скорости, что будет показано в разделе 3.

2. УЧЕТ АНИЗОТРОПИИ МАГНИТНОЙ ДИФФУЗИИ

Остановимся на приложении результата [9] к внутрикластерной среде (ICM), где возможно достижение больших магнитных чисел Прандтля [11, 12]. Физические условия в перегретой сильно разреженной плазме, пронизывающей скопления галактик, не подходят для вывода классических уравнений (1), (2). Так, частота соударений электронов в данной среде столь мала ($\sim 10^{-12}$ Гц), что даже в относительно слабом поле на магнитную диффузию начинает сказываться циклотронное вращение электронов [13]. Нарастающее из затравочных мелкомасштабных возмущений магнитное поле достигает этих значений на кинематической стадии. Коэффициент магнитной диффузии вдоль магнитного поля остается не зависящим от поля, а поперек — становится пропорционален квадрату магнитного поля B^2, что делает задачу динамо нелинейной и приводит к фактической невозможности дальнейшего аналитического анализа.

Однако описанный в предыдущем разделе эффект возникает из конечности поперечной магнитной диффузии (градиент магнитного поля всегда почти точно ортогонален магнитной линии). Таким образом, линейный анализ (1), (2) оказывается в данном случае оценкой сверху для времени начала экспоненциального затухания обратного влияния, поскольку увеличение поперечной магнитной диффузии способно только приблизить стадию вырождения.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС

Вернемся к исходной постановке задачи с изотропной диффузией. Рассмотрим развитие малых мелкомасштабных возмущений магнитного поля в потоке плазмы с большим числом Прандтля [6, 7]. Используя уравнения (1) и (2), запишем уравнения динамики корреляторов плотностей магнитной и кинетической энергии:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\left\langle B^2\right\rangle}{\partial t} = -\left\langle \mathbf{vF}\right\rangle - \frac{\kappa}{4\pi}\left\langle(\nabla\mathbf{B})^2\right\rangle, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\langle \mathrm{v}^2\rangle}{\partial t} = \left\langle \mathbf{vF}\right\rangle - \nu\left\langle(\nabla\mathbf{v})^2\right\rangle + \left\langle \mathbf{vf_v}\right\rangle. \tag{6}$$

Индукционный член $J_S = -\left\langle \mathbf{vF}\right\rangle > 0$ перекачивает кинетическую энергию в магнитную, а диссипативные члены $P_\kappa = -\kappa\langle(\nabla\mathbf{B})^2\rangle/4\pi$, $P_\mathrm{v} = -\nu\langle(\nabla\mathbf{v})^2\rangle$ характеризуют тепловые потери. Кроме того, имеется крупномасштабная подкачка возмущений $\left\langle \mathbf{vf_v}\right\rangle > 0$, необходимая для установления статистически стационарного состояния [4, 14]. При отсутствии обратной связи магнитная энергия в рассматриваемой системе экспоненциально увеличивается, поэтому экспоненциально увеличивается и индукционный член J_S, тем самым забирая все больше из кинетической энергии. Однако крупномасштабная подкачка $\left\langle \mathbf{vf_v}\right\rangle$ является стационарной и не может поддерживать неограниченный рост индукционного члена. Возникающий тем самым энергетический парадокс означает, что рост обратной связи должен рано или поздно возобновиться. Для количественной оценки времени, на котором происходит возобновление роста, воспользуемся неравенством Коши—Буняковского:

$$\langle|\mathbf{vF}|\rangle \le \sqrt{\langle\mathbf{v}^2\rangle\langle\mathbf{F}^2\rangle}. \tag{7}$$

Из стационарности потока на кинематической стадии $\langle\mathbf{v}^2\rangle = \mathrm{const}$. Таким образом, парадокс возникает уже на стадии идеального проводника: инкремент роста правой части (7) в два раза меньше инкремента роста в левой части, поскольку $\langle\mathbf{F}^2\rangle$, $\langle\mathbf{B}^2\rangle$ и $\langle|\mathbf{vF}|\rangle$ на этой стадии растут одинаково [8, 9]. Парадокс частично разрешается тем, что левая часть имеет гораздо меньшее значение на начальной стадии. Действительно,

$$-\left\langle \mathbf{vF}\right\rangle \cong \frac{\partial\langle B^2\rangle}{\partial t} \cong \frac{B^2\mathrm{v}}{r_\mathrm{v}}, \tag{8}$$

$$\sqrt{\langle\mathbf{v}^2\rangle\langle\mathbf{F}^2\rangle} \cong \frac{B^2\mathrm{v}}{l}. \tag{9}$$

Таким образом, на начальной стадии отношение правой и левой частей (7) равно $r_\mathrm{v}/l \gg 1$. Однако инкремент роста $\langle\mathbf{B}^2\rangle$ и $\langle\mathbf{F}^2\rangle$ на стадии идеального проводника в два раза больше инкремента роста корреляционного масштаба возмущений магнитного поля [9]. Поэтому к тому моменту, когда левая и правая части (7) станут одинаковыми, масштаб возмущений будет равен $\sqrt{r_\mathrm{v}l} \ll r_\mathrm{v}$, т.е. будет лежать глубоко внутри диссипативной области. Внутри этой области, казалось бы, разложение поля скорости до линейного члена является бесспорным [15]. Однако оказывается, что для оценки обратной связи этого разложения становится недостаточно. Действительно, динамика $\mathbf{F}$ подчиняется уравнению [8]:

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{F} = (\mathbf{F}\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{G} + \kappa(\ldots), \tag{10}$$

$$\mathbf{G} = \sum_{i,j=1}^{3} B_i B_j \partial_i \partial_j \mathbf{v}, \tag{11}$$

где (...) — это диффузионные слагаемые, которыми можно пренебречь на стадии идеального проводника; $\mathbf{G}$ содержит вторую производную скорости и вначале мал по сравнению с остальными слагаемыми в (10) как l/r_v. Таким образом, на начальной стадии уравнения (10) и (1) совпадают, поэтому рост $\mathbf{F}$ и $\mathbf{B}$ идентичен. В то же время $\mathbf{G}$ растет с удвоенным инкрементом как квадрат $\mathbf{B}$ и начинает воздействовать на динамику $\mathbf{F}$ (и определять ее), когда масштаб возмущений равен $\sqrt{r_\mathrm{v}l}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, несмотря на экспоненциальный рост магнитного поля в стохастически изотропном сдвиговом поле скорости, его обратное влияние $|(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}|$ на поток вырождается. А именно, в процессе эволюции малых начальных возмущений происходит смена качественно различных асимптотических режимов. Первая стадия, в течение которой статистические моменты магнитного поля и силы Лоренца экспоненциально нарастают [8], сменяется стадией, в течение которой моменты магнитного поля продолжают экспоненциально нарастать, а моменты силы Лоренца экспоненциально убывают [9]. Таким образом, магнитное поле не оказывает обратного воздействия на поток на тех масштабах, на которых поле скорости корректно аппроксимировать линейной функцией координат. Более того, в данной работе показано, что характерная для космической плазмы анизотропия магнитной диффузии только усиливает данный эффект.

Важным выводом данной работы является разрешение возникающего энергетического парадокса, согласно которому мощность вкачиваемой в магнитное поле энергии неограниченно возрастает и не может быть обеспечена стационарным турбулентным потоком. Оказывается, что квадратичные поправки в разложении поля скорости начинают сказываться на динамике обратной связи на масштабах порядка $\sqrt{r_\nu l}$. Найденная в [9] асимптотика оказывается промежуточной, что заранее неочевидно. Так, в вопросе роста магнитной энергии различие в механизмах роста на различных этапах может быть идентифицировано только при рассмотрении динамики локализованных возмущений [10]. Итак, мы видим, что неизменность инкремента роста квадратичного коррелятора магнитного поля не является общим свойством остальных корреляторов магнитного поля.

Наконец, отметим особую важность описанных эффектов магнитной гидродинамики для гидродинамической турбулентности. В более ранней работе авторов [16] предложены соображения об аналогичном вырождении нелинейного члена $|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|$ в гидродинамической турбулентности. Применяя данное соображение, в [16] удалось обосновать известные универсальные статистические свойства изотропной турбулентности и сделать некоторые предсказания, подтверждение которым в численных экспериментах было получено лишь совсем недавно [17]. Данная работа аналитически иллюстрирует соображения из [16] в конкретной турбулентной системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rincon F.* Dynamo theories // Journal of Plasma Physics. 2019. V. 85. № 4. P. 205850401.
2. *Kulsrud R.M., Anderson S.W.* The spectrum of random magnetic fields in the mean field dynamo theory of the galactic magnetic field // The Astrophysical Journal. 1992. V. 396. P. 606–630.
3. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б.* О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы “динамо”) // Успехи физических наук. 1972. Т. 106. № 3. С. 431–457.
4. *Schekochihin A.A., Cowley S.C., Taylor S.F., Maron J.L., McWilliams J.C.* Simulations of the small-scale turbulent dynamo // The Astrophysical Journal. 2004. V. 612. № 1. P. 276.
5. *Колмогоров А.Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 32. №. 1. С. 19–21.
6. *Казанцев А.П.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. № 5 (11). С. 1806.
7. *Chertkov M., Falkovich G., Kolokolov I., Vergassola M.* Small-scale turbulent dynamo // Physical review letters. 1999. V. 83. № 20. P. 4065.
8. *Schekochihin A., Cowley S., Maron J., Malyshkin L.* Structure of small-scale magnetic fields in the kinematic dynamo theory // Physical Review E. 2001. V. 65. № 1. P. 016305.
9. *Zybin K.P., Il’yn A.S., Kopyev A.V., Sirota V.A.* No feedback is possible in a small-scale turbulent magnetic field // Europhysics Letters. 2020. V. 132. № 2. P. 24001.
10. *Il'yn A.S., Kopyev A.V., Sirota V.A., Zybin K.P.* Evolution of localized magnetic field perturbations and the nature of turbulent dynamo // Physics of Fluids. 2021. V. 33. № 7. P. 075105.
11. *Schekochihin A.A., Boldyrev S.A., Kulsrud R.M.* Spectra and growth rates of fluctuating magnetic fields in the kinematic dynamo theory with large magnetic Prandtl numbers // The Astrophysical Journal. 2002. V. 567. № 2. P. 828.
12. *Plunian F., Stepanov R., Frick P.* Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // Physics Reports. 2013. V. 523. № 1. P. 1–60.
13. *Richardson A.S.* 2019 NRL plasma formulary. US Naval Research Laboratory, 2019.
14. *Новиков Е.А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. № 5. С. 1919.
15. *Batchelor G.K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid Part 1. General discussion and the case of small conductivity // Journal of fluid mechanics. 1959. V. 5. № 1. P. 113–133.
16. *Зыбин К.П., Сирота В.А.* Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности // Успехи физических наук. 2015. Т. 185. № 6. С. 593–612.
17. *Iyer K.P., Sreenivasan K.R., Yeung P.K.* Scaling exponents saturate in three-dimensional isotropic turbulence // Physical Review Fluids. 2020. V. 5. № 5. P. 054605.

ON THE DEGENERACY OF NONLINEARITY IN A TURBULENT SYSTEM

K. P. Zybin[a,b], A. S. Il'yn[a,b], A. V. Kopyev[a], and V. A. Sirota[a]

[a] *Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

The dynamics of a statistically homogeneous and isotropic magnetic field generated by an incompressible turbulent plasma flow with a large, but finite, magnetic Prandtl number is considered. It turns out that at scales smaller than the viscous Kolmogorov scale, the nonlinear feedback of the magnetic field on the fluid dynamics exponentially decreases, despite the exponential growth of the magnetic field. It is shown that the anisotropy of diffusion in the cosmic plasma leads to an additional decrease of the feedback. It is also shown that the degeneration of the feedback leads to an energy paradox, which is resolved at a later stage of the development of initial disturbances when the spatial scale of magnetic fluctuations approaches the Kolmogorov scale. The possibility of degeneracy of nonlinearity in more complex systems is discussed: something similar can take place in hydrodynamic turbulence, making it possible to find the key to its theoretical analysis.

Keywords: turbulence theory, kinematic dynamo problem