ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2022, том 506, № 2, с. 56–59

## МЕХАНИКА

УДК 539.3:534.1

# О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

© 2022 г. Ю. Д. Каплунов[1,*], Д. А. Приказчиков[1], Р. Ф. Сабирова[2]

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 10.04.2022 г.
Поступило 03.06.2022 г.
После доработки 03.06.2022 г.
Принято к публикации 26.07.2022 г.

Выведено одномерное гиперболическое уравнение для описания волны Рэлея, возбуждаемой поверхностной нагрузкой, приложенной к границе упругой полуплоскости. При этом волновой оператор оказывается не зависящим от вертикальной переменной, которая присутствует только в правой части полученного уравнения в качестве параметра, входящего в псевдодифференциальный оператор, действующий на заданную нагрузку. Показано, что в случае плоской задачи Лэмба этот оператор отвечает за "размазывание" поверхностного сосредоточенного импульса с увеличением расстояния от поверхности. Предлагаемая в работе трактовка также позволяет выявить важные отличительные особенности упругой поверхностной волны.

*Ключевые слова:* волна Рэлея, гиперболическое уравнение, псевдодифференциальный оператор, задача Лэмба

**DOI:** 10.31857/S2686740022070057

Синусоидальная упругая поверхностная волна, впервые обнаруженная Рэлеем [1], впоследствии нашла ряд важных приложений и обобщений. Так, например, исследования поверхностных волн общей формы, начатые Соболевым [2], получили заметное развитие в более поздних публикациях, см., например, [3–5]. При этом собственные решения динамических уравнений теории упругости, представленные в цитируемых работах, оказываются тесно связанными с явной асимптотической формулировкой для поля волны Рэлея, возбуждаемой заданными поверхностными нагрузками. Такая формулировка, впервые предложенная в [6] на основе символического метода Лурье [7], была затем развита и обоснована с помощью метода многих масштабов, см., например, главу [8], а также цитируемые в ней работы. Она включает в себя эллиптическое уравнение, описывающее пространственное затухание, и гиперболическое уравнение, отвечающее за распространение волны вдоль поверхности. Асимптотический подход был в дальнейшем распространен на интерфейсные и краевые волны, а также слоистые среды [8, 9].

В настоящей работе упомянутая выше эллиптико-гиперболическая модель для волны Рэлея, распространяющей вдоль границы упругой полуплоскости, сводится к одномерному волновому уравнению в переменных "горизонтальная координата – время". Псевдодифференциальный оператор в правой части полученного уравнения действует на поверхностную нагрузку и может быть переписан в терминах интегрального преобразования Фурье. При этом вертикальная переменная входит в правую часть уравнения в качестве параметра, определяющего затухание по глубине. Рассмотрены примеры, включающие, в частности, плоскую задачу Лэмба о вертикальном мгновенном сосредоточенном импульсе, приложенном к поверхности полуплоскости, см., например, [10]. Показано, что действие псевдодифференциального оператора на функцию Дирака, зависящую только от продольной координаты, ведет к ее "размазыванию", степень которого определяется значением вертикальной координаты.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамику упругой, изотропной полуплоскости $\{(x; y) \mid -\infty < x < +\infty, 0 \le y < +\infty\}$ под действием заданной вертикальной нагрузки $P(x, t)$, где $t$ – время (рис. 1). Канонические уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \frac{1}{c_1^2}\varphi_{tt} = 0, \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{1}{c_2^2}\psi_{tt} = 0, \quad (1)$$

[1] *School of Computer Science and Mathematics, Keele University, Keele, Staffordshire, United Kingdom*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан*
**E-mail: j.kaplunov@keele.ac.uk*

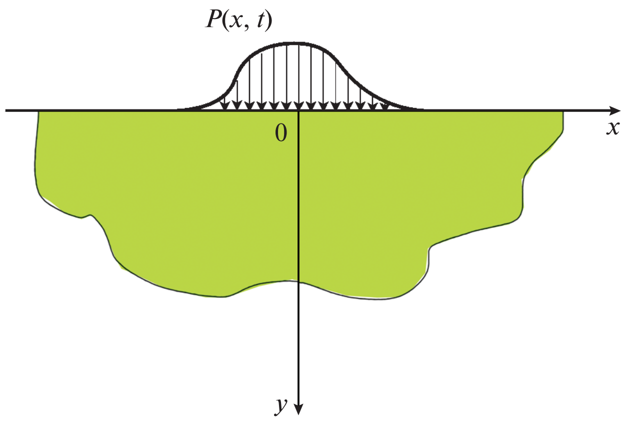


**Рис. 1.** Упругая полуплоскость под действием вертикальной динамической нагрузки.

где $\varphi$ и $\psi$ – волновые потенциалы Ламе. Здесь $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ обозначают скорости продольной и поперечной волн соответственно; в приведенных выше соотношениях параметры Ламе и объемная плотность, как обычно, обозначаются через $\lambda$, $\mu$ и $\rho$. Соответствующие граничные условия на поверхности $y = 0$ имеют вид

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = P(x,t), \tag{2}$$

где напряжения $\sigma_{xy}$ и $\sigma_{yy}$ выражаются через волновые потенциалы в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu\left(2\varphi_{xy} + \psi_{xx} - \psi_{yy}\right), \\ \sigma_{yy} &= \lambda\varphi_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varphi_{yy} + 2\mu\psi_{xy}. \end{aligned} \tag{3}$$

В рамках специализированной асимптотической модели, позволяющей явным образом выделить вклад поверхностной волны Рэлея в общее волновое поле, плоская динамическая задача теории упругости (1), (2) сводится к скалярной задаче для одного из упругих потенциалов, см., например, [8]. В случае продольного потенциала затухание в приповерхностной области $y > 0$ определяется эллиптическим уравнением

$$\varphi_{yy} + \alpha_R^2\varphi_{xx} = 0, \tag{4}$$

тогда как распространение волны Рэлея вдоль границы $y = 0$ описывается гиперболическим уравнением

$$\Phi_{xx} - \frac{1}{c_R^2}\Phi_{tt} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B}P, \tag{5}$$

где $\Phi(x, t) = \varphi(x, 0, t)$ обозначает значение потенциала на поверхности полуплоскости. Кроме этого, используются следующие обозначения: $c_R$ – скорость волны Рэлея и

$$\begin{gathered} \alpha_R = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}, \quad \beta_R = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}, \\ B = \frac{\alpha_R}{\beta_R}(1 - \beta_R^2) + \frac{\beta_R}{\alpha_R}(1 - \alpha_R^2) - 1 + \beta_R^4, \end{gathered} \tag{6}$$

при

$$4\alpha_R\beta_R - (1 + \beta_R^2)^2 = 0.$$

При этом горизонтальное и вертикальное перемещения точек полуплоскости $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$ выражаются соответственно в виде [8]

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) &= \varphi_x(x - c_Rt, \alpha_Ry, t) - \\ &- \frac{1 + \beta_R^2}{2}\varphi_x(x - c_Rt, \beta_Ry, t), \\ u_2(x,y,t) &= \varphi_y(x - c_Rt, \alpha_Ry, t) - \\ &- \frac{2}{1 + \beta_R^2}\varphi_y(x - c_Rt, \beta_Ry, t). \end{aligned} \tag{7}$$

Целью работы является вывод более общего, чем (5), волнового уравнения, которое, в отличие от последнего, было бы применимо не только на поверхности полуплоскости $y = 0$, а и в приповерхностной области $y > 0$. Для этого в следующем разделе будет получено решение эллиптического уравнения (4), представленное в псевдодифференциальной форме аналогично результатам, излагаемым в параграфе 5 главы [8].

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

Перепишем уравнение (4) в форме

$$\varphi_{yy} - \alpha_R^2\left(\sqrt{-\partial_{xx}}\right)^2[\varphi] = 0, \tag{8}$$

где $\sqrt{-\partial_{xx}}$ – псевдодифференциальный оператор, см., например, [11], и внесем в (5) затухающее решение (8)

$$\varphi(x, y, t) = e^{-\alpha_R y\sqrt{-\partial_{xx}}}[\Phi(x, t)]. \tag{9}$$

В результате получим более общее волновое уравнение

$$\varphi_{xx} - \frac{1}{c_R^2}\varphi_{tt} = \frac{1 + \beta_R^2}{2\mu B}e^{-\alpha_R y\sqrt{-\partial_{xx}}}[P], \tag{10}$$

решение которого параметрически зависит от вертикальной координаты $y$, в отличие от исходного уравнения (5). Это является результатом действия псевдодифференциального оператора $e^{-\alpha_R y\sqrt{-\partial_{xx}}}$ на заданную нагрузку $P(x, t)$. В задачах теории упругости уравнения с псевдодифференциальной правой частью ранее изучались в [12].

Псевдодифферециальный оператор в правой части полученного уравнения может быть представлен в виде интегрального преобразования Фурье. При этом (10) принимает вид

$$\varphi_{xx} - \frac{1}{c_R^2}\varphi_{tt} = \frac{1+\beta_R^2}{4\pi\mu B}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)e^{-isx}dx\, e^{-\alpha_R|s|y}e^{isx}ds, \tag{11}$$

где $s$ – параметр преобразования.

В малой окрестности поверхности ($y \to 0$), используя формальное разложение операторной экспоненты в ряд Тейлора, получим из (10)

$$\varphi_{xx}(x,y,t) - \frac{1}{c_R^2}\varphi_{tt}(x,y,t) = \\ = \frac{1+\beta_R^2}{2\mu B}\left(1 - \alpha_R y\sqrt{-\partial_{xx}} - \frac{1}{2}\alpha_R^2 y^2 \partial_{xx} + \ldots\right)[P(x,t)]. \tag{12}$$

Таким образом, для определения вклада волны Рэлея в общее поле перемещений вместо исходной эллиптико-гиперболической модели (4), (5) достаточно рассматривать гиперболическое уравнение (10) с правой частью, соответствующей действию псевдодифференциального оператора на заданную поверхностную нагрузку.

## ПРИМЕРЫ

В качестве примера рассмотрим сначала вертикальную поверхностную нагрузку в виде бегущей гармонической волны

$$P(x,t) = P_0 e^{i(kx-\omega t)},$$

где $P_0$ – амплитуда, $k$ – волновое число, $\omega$ – круговая частота. В этом случае сразу находим из уравнения (10)

$$\varphi(x,y,t) = \frac{1+\beta_R^2}{2\mu B}\frac{c_R^2}{\omega^2 - k^2c_R^2}P_0 e^{i(kx-\omega t)-\alpha_R kxy}. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что выписанное решение совпадает с главным членом асимптотического разложения точного решения плоской динамической задачи теории упругости (1), (2) в околорезонансном случае, для которого $\frac{\omega}{k} \to c_R$, см. [8].

Теперь рассмотрим плоскую задачу Лэмба [10, 13], для которой вертикальная нагрузка записывается в форме $P(x, t) = P_0\delta(t)\delta(x)$. В этом случае уравнение (10) для волны Рэлея принимает вид

$$\varphi_{xx} - \frac{1}{c_R^2}\varphi_{tt} = \frac{1+\beta_R^2}{2\mu B}P_0\delta(t)e^{-\alpha_R y\sqrt{-\partial_{xx}}}[\delta(x)]. \tag{14}$$

Вычисляя выражение в правой части, получим

$$\varphi_{xx} - \frac{1}{c_R^2}\varphi_{tt} = \frac{1+\beta_R^2}{2\mu B}P_0\delta_y(x)\delta(t), \tag{15}$$

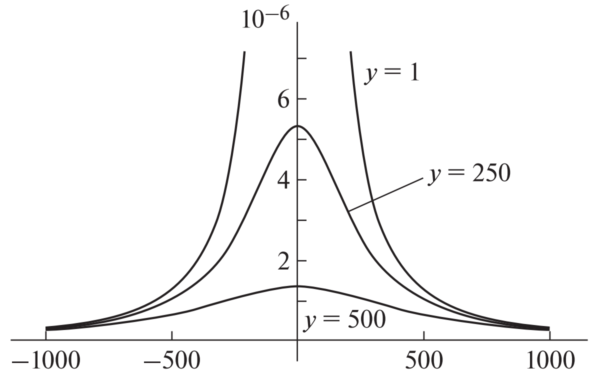


**Рис. 2.** Функция $\delta_y(x)$ при $y = 1$, $y = 250$, $y = 500$.

где $\delta_y(x) = \dfrac{\alpha_R y}{\pi(x^2 + \alpha_R^2 y^2)}$ – “размазанная” дельта-функция, в которой вертикальная координата отвечает за “размазывание”. На рис. 2 приведено поведение функции $\delta_y(x)$ на различной глубине при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$, для которого $c_R = 0.9194c_2$.

Последнее уравнение наиболее полно отражает специфику выведенного гиперболического уравнения (10), описывающего распространение поверхностной волны. Примечательно, что вертикальная координата входит только в выражение для дельта-образной нагрузки в правой части (15), оказывая, в частности, влияние на сглаживание разрывов, распространяющихся вдоль свободной поверхности. При этом одномерный волновой оператор в левой части этого уравнения не содержит производных по вертикальной координате. Очевидно, что при приближении к поверхности $\lim\limits_{y\to 0}\delta_y(x) = \delta(x)$.

Решение уравнения (15) имеет вид

$$\varphi = \frac{(1+\beta_R^2)c_R P_0}{4\pi\mu B}\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{x - c_R t}{\alpha_R y} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{x + c_R t}{\alpha_R y}\right], \tag{16}$$

и, как и следовало ожидать, совпадает с вычетом в рэлеевском полюсе точного решения плоской задачи Лэмба [9].

В заключение укажем, что предлагаемое уравнение (10) может быть распространено на случай упругого полупространства, а также обобщено с учетом влияния вертикальной неоднородности и анизотропии [14]. Более того, развитые ранее эллиптико-гиперболические формулировки для поверхностной волны Рэлея, по-видимому, в ряде случае могут быть заменены гиперболическими уравнениями, обобщающими (10).

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20133).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh L.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. V. 1. № 1. P. 4–11.
2. *Соболев С.Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: ОНТИ; 1937. С. 468–617.
3. *Chadwick P.* Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media // J. Elast. 1976. V. 6. № 1. P. 73–80.
4. *Achenbach J.D.* Explicit solutions for carrier waves supporting surface waves and plate waves // Wave Motion. 1998. V. 28. P. 89–97.
5. *Kiselev A.P., Parker D.F.* Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Schölte waves with general time dependence // Proc. R. Soc. A. 2010. V. 466. P. 2241–2258.
6. *Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю.* Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // ДАН. 2004. Т. 395. № 4. С. 482–484.
7. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955.
8. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A.* Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // Adv. Appl. Mech. 2017. V. 50. P. 1–106.
9. *Вильде М.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. № 4. С. 74–86.
10. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. R. Soc., A. 1904. V. 203. № 359–371. P. 1–42.
11. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. 2-е изд. М.: Добросвет, 2005.
12. *Erbaş B., Kaplunov J., Nolde E., et al.* Composite wave models for elastic plates // Proc. R. Soc. A. 2018. V. 474. № 2214. P. 20180103.
13. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лэмба в случае полупространства // Ученые записки Ленинградского государственного университета. Серия математических наук. 1950. Т. 21. С. 71–118.
14. *Fu Y., Kaplunov J., Prikazchikov D.* Reduced model for the surface dynamics of a generally anisotropic elastic half-space // Proc. R. Soc. A. 2020. V. 476. № 2234. P. 20190590.

# ON A HYPERBOLIC EQUATION FOR THE RAYLEIGH WAVE

**J. Kaplunov[a], D. Prikazchikov[a], and R. Sabirova[b]**

[a] *School of Computer Science and Mathematics, Keele University, Keele, Staffordshire, UK*

[b] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

A 1D hyperbolic equation is derived for the Rayleigh wave induced by prescribed surface loading. The wave operator turns out to be independent of the vertical coordinate, which appears only in the right hand side of the equation as a parameter within the pseudo-differential operator acting on the given load. It is shown that in case of the classical 2D Lamb problem this operator causes smoothening of the surface concentrated impulse as the depth increases. The suggested formulation enables revealing of the peculiarities of surface elastic wave.

*Keywords:* Rayleigh wave, hyperbolic equation, pseudo-differential operator, Lamb problem