

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ ФОРМУЛЫ МАГНУСА

© 2022 г. С. О. Гладков^{1,*}

Представлено академиком РАН А.С. Сиговым 28.02.2022 г.

Поступило 05.03.2022 г.

После доработки 05.03.2022 г.

Принято к публикации 09.06.2022 г.

Исходя из условия потенциальности течения гидродинамического потока, обтекающего стационарно вращающийся шар, впервые приведен подробный аналитический вывод формулы для силы Магнуса, описывающей не диссипативное боковое воздействие со стороны поступательно движущегося вязкого потока.

Ключевые слова: эффект Магнуса, частота вращения, потенциальное течение, закон Бернулли

DOI: 10.31857/S2686740022060086

Вопрос, о котором сейчас пойдет речь, относится к общим проблемам теоретической гидродинамики, и связан он с эмпирически полученным почти двести лет назад эффектом, впервые наблюдавшимся Магнусом. Напомним, что его суть заключается в следующем. Если на стационарно вращающийся с постоянной угловой частотой ω шар натекает также стационарно движущийся с поступательной скоростью \mathbf{u} поток газа (или жидкости), то оказывается, что в этих условиях возникает дополнительная (не диссипативная!) боковая сила, действующая перпендикулярно траектории движения шара.

Полученная для нее эмпирическая зависимость имеет вид (см., к примеру, [1–17]):

$$F_M = \rho_0 V_T \omega u = k m \omega u, \quad (1)$$

где ρ_0 – плотность натекающего потока, $V_T = \frac{4\pi}{3} R^3$ – объем шара, коэффициент $k = \frac{\rho_0}{\rho_T}$, ρ_T – плотность шара, m – его масса.

Чтобы аналитически получить формулу (1), мы будем исходить из геометрии задачи, проиллюстрированной на рис. 1.

Принципиальным моментом в ее решении является факт потенциальности потока, натекающего на шар. Физически это связано с тем, что взаимодействием молекул газа (или жидкости) с поверхностью шара можно пренебречь. Такой же подход используется и в задаче Жуковского при вычислении подъемной силы крыла. В этом

смысле обе эти задачи качественно сильно отличаются от задачи Стокса, в которой взаимодействие с поверхностью шара имеет ключевое значение, приводящее к линейной зависимости силы сопротивления от скорости потока \mathbf{u} .

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В стационарном случае для распределения давления мы имеем право воспользоваться формулой Бернулли [18]:

$$P = P_0 - \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (2)$$

где P_0 – давление на большом расстоянии от шара.

Наряду с уравнением сохранения энергии (2) для потенциального обтекания нам необходимо воспользоваться также и условием несжимаемости, т.е. уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, то скорость можно искать в виде

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad (4)$$

где φ – потенциал.

Подстановка (4) в условие (3) приводит к уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (5)$$

Его фундаментальное решение, как известно, имеет вид (см. [18])

$$\varphi = \frac{C}{r}, \quad (6)$$

где C – константа.

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: sglad51@mail.ru

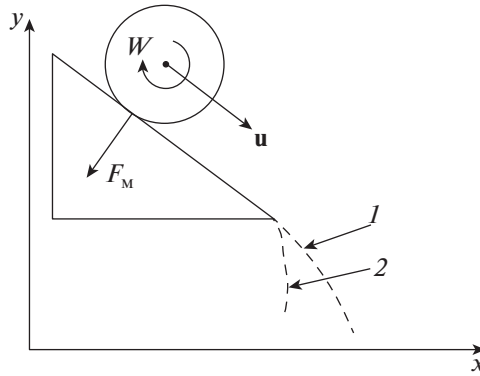


Рис. 1. Схематическое изображение задачи. Кривая 1 показывает траекторию без эффекта Магнуса. Кривая 2 – с учетом эффекта Магнуса.

В силу линейности уравнения (5) мы имеем право искать его решение в аддитивном виде с учетом двух независимых факторов: частоты вращения и скорости поступательного движения. Именно поэтому благодаря (6) для интересующего нас распределения скоростей в окрестности шара можно написать, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + B \left[\boldsymbol{\omega} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right], \quad (7)$$

где \mathbf{A} , B – постоянные, которые легко определить из граничного условия “сшивки” скорости со скоростью точек на поверхности шара:

$$\mathbf{v}|_{r=R} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}]. \quad (8)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что векторная функция (7) будет удовлетворять уравнению непрерывности (3).

Подстановка (7) в условие (8) немедленно приводит к следующим значениям постоянных:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}, \quad B = R^3. \quad (9)$$

То есть решение (7) можно представить как

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{R\mathbf{r}}{r^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) - \frac{R^3}{r^3} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]. \quad (10)$$

В соответствии с рис. 1 боковая сила, действующая на вращающийся шар, должна быть направлена вдоль оси y , а ее проекция может быть найдена как скалярное произведение:

$$dF_y = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F}, \quad (11)$$

где согласно (2)

$$d\mathbf{F} = \left(P_0 - \frac{\rho_0 v^2}{2} \right) d\mathbf{S}, \quad (12)$$

а вектор элемента поверхности определяется обычным образом как

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \mathbf{n} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (13)$$

Поэтому согласно решению (10) из определения (11) с учетом промежуточных формул (12) и (13) следует, что поперечную силу можно вычислить, исходя из выражения

$$F_y = R^2 \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(P_0 - \frac{\rho_0}{2} \left\{ \mathbf{u} - \frac{R\mathbf{r}}{r^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) - \frac{R^3}{r^3} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \right\}^2 \right) \Big|_{r=R} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (14)$$

Сумма трех слагаемых в фигурных скобках после возведения в квадрат дает

$$G = \left\{ \mathbf{u} - \frac{R}{R^2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}] \right\}^2 = u^2 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}]^2 - 2(\mathbf{u} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}]) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})^2, \quad (15)$$

где, напомним, единичный вектор нормали к поверхности сферы вводится обычным образом как

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Если в формуле (15) ввести единичные орты в соответствии с рис. 1, то для G имеем

$$G = u^2 + \omega^2 R^2 [\mathbf{i} \times \mathbf{n}]^2 - 2u\omega R (\mathbf{k} \cdot [\mathbf{i} \times \mathbf{n}]) - u^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^2 = u^2 + \omega^2 R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2u\omega R (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) - u^2 \cos^2 \theta. \quad (16)$$

После подстановки (16) под знак интеграла в формуле (14) и, учитывая, что скалярное произведение единичных векторов можно представить как

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) = \sin \theta \sin \varphi,$$

получим

$$F_y = R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_0 - \frac{\rho_0}{2} \left[u^2 + \omega^2 R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2u\omega R \sin \theta \sin \varphi - u^2 \cos^2 \theta \right] \right) \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

При интегрировании по полярному углу φ видно, что первое, второе, третье и пятое слагаемые исчезают, и у нас остается только четвертое слагаемое, которое дает

$$F_y = \rho_0 u \omega R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi.$$

После элементарного интегрирования легко приходим к искомому ответу:

$$F_y = \frac{4\pi}{3} \rho_0 u \omega R^3 = \rho_0 V_T u \omega \quad (17)$$

Заметим, к слову, что решения задач близкой направленности довольно подробно изложены, например, и в работах [19, 20].

Сравнивая аналитическую формулу (17) с эмпирической зависимостью (1), видим их полное соответствие.

Учитывая специфику приведенного выше решения, формулу (17) можно переписать теперь в общем векторном виде:

$$\mathbf{F} = km[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}]. \quad (18)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Приведен строгий аналитический вывод формулы для силы Магнуса, найденной ранее чисто эмпирическим путем.

2. Показано, что полученное решение принципиально можно привести лишь в том случае, если исходить из формального предположения о потенциальности натекаемого потока ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$).

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю признательность доценту МАИ С.Б. Богдановой за предоставленный рисунок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robins B.* New principles of gunnery: containing the determination of the force of gun-powder, and an investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions. Ed. J. Nourse. London, 1742.
2. *Magnus G.* Über die Abweichung der Geschosse, Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1852. P. 1–23.
3. *Magnus G.* Über die Abweichung der Geschosse, und: Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden

Körpern // *Annalen der Physik.* 1853. V. 164. № 1. P. 1–29.

4. *Rayleigh J.W.* On the Irregular Flight of a Tennis Ball // *Messenger of Mathematics.* 1877. V. 7. P. 14–27.
5. *Lafay A.* Sur l'Inversion du Phénomène de Magnus // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 1910. V. 151. P. 32–45.
6. *Martin J.C.* On the Magnus Effects Caused by the Boundary Layer Displacement Thickness on Bodies of Revolution at Small Angles of Attack. BRL. 1955. Rep. 870. Aberdeen Proving Ground, Maryland, USA.
7. *Platou A.S.* Magnus Characteristics of Fined and Non Fined Projectiles // *AIAA Journal.* 1960. V. 3. № 1. P. 83–90.
8. *Jacobson I.D.* Magnus Characteristics of Arbitrary Rotating Bodies. AGARDograph. 1970. No. AG-171.
9. *Dwyer H., Sander B.R.* Magnus Forces Spinning Supersonic Cones. Pt I. The Boundary Layer // *AIAA Journal.* 1976. V. 14. P. 498–522.
10. *Sander B.R., Dwyer H.* Magnus Forces Spinning Supersonic Cones. Part I: The Inviscid Flow. *AIAA Journal.* 1976. V. 14. P. 576–582.
11. *Sturek W.B., Dwyer H., Kayser L., Nietubicz C., Reklis R., Opalka K.* Computations of Magnus Effects for Yawed Spinning Body of Revolution // *AIAA Journal.* 1978. V. 16. № 7. P. 687–692.
12. *Sturek W.B., Schiff L.* Computations of the Magnus Effect for Slender Bodies in Supersonic Flow // *AIAA Paper.* 1980. No. 80–1586.
13. Элементарный учебник физики. Под редакцией академика Г.С. Ландсберга. Т. 1. Механика. Теплота. Молекулярная физика. М.: Наука, 1984. С. 370–372.
14. *Семенов М.В., Якута А.А.* Механика сплошных сред. Лекционный эксперимент. (Университетский курс общей физики). Под общ. ред. В.А. Алешкевича. МГУ: Изд-во Физического факультета, 1999. С. 56.
15. *Péchie M., Guillen P., Cayzac R.* Magnus Effect Over Finned Projectiles // *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets.* 2001. V. 38. № 4. P. 542–549.
16. *De Spirito J., Heavy K.R.* CFD Computations of Magnus Moment and Roll Damping Moment of Spinning projectile. 2004 // *AIAA paper* 2004-4713.
17. *Cayzac R., Carette E., Pascal D., Guillen P.* Magnus effect: Physical Origins and Numerical Prediction // *J. Applied Mechanics.* 2011. V. 78. № 5. 051005 (7 p.).
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 733 с.
19. *Гладков С.О.* Об одном доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса // *Известия вузов. Физика.* 2018. Т. 61. № 6 (726). С. 103–105.
20. *Гладков С.О., Зо Аунг.* О поправках к силе Стокса по числу Кнудсена // *Известия вузов. Физика.* 2020. Т. 63. № 12 (756). С. 68–81.

**ON THE QUESTION OF THE DERIVATION
OF THE MAGNUS FORMULA**

S. O. Gladkov^a

^a *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.S. Sigov

Based on the condition of the potentiality of the flow of the hydrodynamic flow flowing around the stationary rotating ball for the first time a detailed analytical conclusion of the formula for the Magnus force is given describing the non-dissipative lateral impact from the direction of the progressively moving viscous flow.

Keywords: Magnus effect, rotational speed, potential current, Bernoulli's law