ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 508, с. 27–29

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ТРЕХЧЛЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

© 2023 г. Д. В. Георгиевский[1,2,3,*]

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 23.06.2022 г.
Поступило 24.06.2022 г.
После доработки 24.06.2022 г.
Принято к публикации 10.08.2022 г.

В трехмерном пространстве рассмотрен класс степенных тензорных рядов (определяющих соотношений) с коэффициентами (материальными функциями), являющимися функциями трех независимых инвариантов. На основе формулы Гамильтона–Кели найдены в виде матричных рядов точные выражения для коэффициентов трехчленных представлений таких степенных рядов. Выведена взаимосвязь коэффициентов прямых и обратных трехчленных определяющих соотношений. Обсуждены случаи тензорной линейности, или квазилинейности, а также независимости материальных функций от инвариантов.

Ключевые слова: изотропная тензорная функция, инвариант, тензорный ряд, квазилинейность, взаимообратность, матричные представления

DOI: 10.31857/S2686740023010042, **EDN:** TKXDGO

1. Изотропные нелинейные тензор-функции в трехмерном пространстве в виде степенных рядов

$$\mathbf{b} = A_0\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\mathbf{a}^n, \tag{1}$$

связывающие два симметричных тензорных поля второго ранга $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in R^3$, моделируют зависимость силового тензора (например, $\mathbf{b}$) от кинематического $\mathbf{a}$ в теории определяющих соотношений для широкого класса изотропных сплошных сред [1–5]. С позиций механики сплошной среды $A_0, A_1, A_2, \ldots$ в (1) являются материальными функциями трех независимых инвариантов [6] тензора $\mathbf{a}$, в качестве которых удобно выбрать I_{a1}, I_{a2}, I_{a3}, где

$$I_{an} = \sqrt[n]{\operatorname{tr}\mathbf{a}^n}, \quad n = 1,2,\ldots; \quad I_{a2} = \|\mathbf{a}\|. \tag{2}$$

Инварианты I_{an}, $n \ge 4$, алгебраически выражаются через I_{a1}, I_{a2} и I_{a3}. Например, для $n = 4,5,6$ имеем [7]

$$\begin{gathered} 6I_{a4}^4 = I_{a1}^4 - 6I_{a1}^2 I_{a2}^2 + 8I_{a1}I_{a3}^3 + 3I_{a2}^4, \\ 6I_{a5}^5 = I_{a1}^5 - 5I_{a1}^3 I_{a2}^2 + 5I_{a1}^2 I_{a3}^3 + 5I_{a2}^2 I_{a3}^3, \\ 12I_{a6}^6 = I_{a1}^6 - 3I_{a1}^4 I_{a2}^2 + 4I_{a1}^3 I_{a3}^3 - \\ - 9I_{a1}^2 I_{a2}^4 + 12I_{a1}I_{a2}^2 I_{a3}^3 + 3I_{a2}^6 + 4I_{a3}^6. \end{gathered} \tag{3}$$

Помимо I_{a2} и I_{a3} будем использовать и другие квадратичный и кубический инварианты тензора $\mathbf{a}$:

$$\begin{gathered} J_a = \frac{1}{2}(I_{a1}^2 - I_{a2}^2), \\ \Delta_a \equiv \det\mathbf{a} = \frac{1}{6}I_{a1}^3 - \frac{1}{2}I_{a1}I_{a2}^2 + \frac{1}{3}I_{a3}^3. \end{gathered} \tag{4}$$

Воспользуемся формулой Гамильтона–Кели в R^3:

$$\mathbf{a}^3 = \Delta_a\mathbf{I} - J_a\mathbf{a} + I_{a1}\mathbf{a}^2. \tag{5}$$

Обозначим через $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$ коэффициенты в трехчленном разложении

$$\mathbf{a}^n = K_{a0}^{(n)}\mathbf{I} + K_{a1}^{(n)}\mathbf{a} + K_{a2}^{(n)}\mathbf{a}^2, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Тогда, согласно (5),

$$\mathbf{a}^{n+1} = K_{a0}^{(n)}\mathbf{a} + K_{a1}^{(n)}\mathbf{a}^2 + K_{a2}^{(n)}(\Delta_a\mathbf{I} - J_a\mathbf{a} + I_{a1}\mathbf{a}^2), \tag{7}$$

откуда следует рекуррентная связь

$$\begin{gathered} K_{a0}^{(n+1)} = \Delta_a K_{a2}^{(n)}, \quad K_{a1}^{(n+1)} = K_{a0}^{(n)} - J_a K_{a2}^{(n)}, \\ K_{a2}^{(n+1)} = K_{a1}^{(n)} + I_{a1}K_{a2}^{(n)}, \end{gathered} \tag{8}$$

которую можно записать в матричной форме

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[*] *E-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

$$(K_{a0}^{(n+1)}, K_{a1}^{(n+1)}, K_{a2}^{(n+1)})^T = Q_a \cdot (K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}, K_{a2}^{(n)})^T,$$
$$Q_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_a \\ 1 & 0 & -J_a \\ 0 & 1 & I_{a1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$(K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}, K_{a2}^{(n)})^T = Q_a^n \cdot (1,0,0)^T, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

т.е. тройка коэффициентов $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$ является первым столбцом матрицы Q_a^n. Технически выписать общий вид Q_a^n для любого n, очевидно, затруднительно, поэтому оставим выражения для инвариантов $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$, фигурирующих в (6), в форме (10).

Таким образом, степенной тензорный ряд (1) эквивалентен трехчленному соотношению

$$\mathbf{b} = C_0\mathbf{I} + C_1\mathbf{a} + C_2\mathbf{a}^2 \tag{11}$$

с вычисляемыми согласно описанной выше процедуре материальными функциями

$$C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{a0}^{(n)},$$
$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_{a1}^{(n)}, \quad C_2 = \sum_{n=2}^{\infty} A_n K_{a2}^{(n)}. \tag{12}$$

Нижние пределы суммирования в (12) можно выбрать именно такими, поскольку, как следует из (6), $K_{a1}^{(0)} = 0$, $K_{a2}^{(0)} = 0$, $K_{a2}^{(1)} = 0$.

2. Положим, что ряд (1) обратим:

$$\mathbf{a} = B_0\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathbf{b}^n, \tag{13}$$

где материальные функции $B_0, B_1, B_2, \ldots$ зависят от инвариантов I_{b1}, I_{b2} и I_{b3}, определенных аналогично (2). Нетрудно [7] вывести следующие алгебраические связи троек инвариантов I_{b1}, I_{b2}, I_{b3} и I_{a1}, I_{a2}, I_{a3}:

$$\begin{aligned} I_{b1} &= 3C_0 + I_{a1}C_1 + I_{a2}^2 C_2, \\ I_{b2}^2 &= 3C_0^2 + 2I_{a1}C_0C_1 + I_{a2}^2(C_1^2 + 2C_0C_2) + \\ &+ 2I_{a3}^3 C_1C_2 + I_{a4}^4 C_2^2, \\ I_{b3}^3 &= 3C_0^3 + 3I_{a1}C_0^2C_1 + 3I_{a2}^2 C_0(C_1^2 + C_0C_2) + \\ &+ I_{a3}^3 C_1(C_1^2 + 6C_0C_2) + \\ &+ 3I_{a4}^4 C_2(C_1^2 + C_0C_2) + 3I_{a5}^5 C_1C_2^2 + I_{a6}^6 C_2^3, \end{aligned} \tag{14}$$

куда из (3) должны быть подставлены выражения I_{a4}^4, I_{a5}^5 и I_{a6}^6. Обратные к (14) связи запишем в общем виде

$$I_{an} = I_{an}(I_{b1}, I_{b2}, I_{b3}), \quad n = 1,2,3. \tag{15}$$

Построим теперь, как это сделано в (9), (10), последовательность троек инвариантов $K_{b0}^{(n)}$, $K_{b1}^{(n)}$ и $K_{b2}^{(n)}$:

$$(K_{b0}^{(n)}, K_{b1}^{(n)}, K_{b2}^{(n)})^T = Q_b^n \cdot (1,0,0)^T,$$
$$n = 0,1,2,\ldots, \quad Q_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_b \\ 1 & 0 & -J_b \\ 0 & 1 & I_{b1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

и запишем ряд (13) в виде трехчленного соотношения

$$\mathbf{a} = D_0\mathbf{I} + D_1\mathbf{b} + D_2\mathbf{b}^2, \tag{17}$$

$$D_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n K_{b0}^{(n)},$$
$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_{b1}^{(n)}, \quad D_2 = \sum_{n=2}^{\infty} B_n K_{b2}^{(n)}. \tag{18}$$

Подставляя тензорную функцию (11) в обратную ей (17), после преобразований получим связь материальных функций C_0, C_1, C_2 и D_0, D_1, D_2. Она следует из решения линейной неоднородной системы уравнений относительно D_0, D_1 и D_2:

$$\begin{aligned} &D_0 + C_0D_1 + (C_0^2 + 2C_1C_2\Delta_a + C_2^2 I_{a1}\Delta_a)D_2 = 0, \\ &C_1D_1 + (2C_0C_1 - 2C_1C_2J_a - C_2^2 I_{a1}J_a + C_2^2\Delta_a)D_2 = 1, \\ &C_2D_1 + (2C_0C_2 + C_1^2 + 2C_1C_2I_{a1} + \\ &+ C_2^2 I_{a1}^2 - C_2^2 J_a)D_2 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

и замены в решении инвариантов I_{an} на I_{bn}, $n = 1,2,3$, согласно (15). Из второго и третьего уравнений (19) находятся D_1 и D_2, после чего из первого уравнения определяется D_0.

3. В теории определяющих соотношений обычно фигурируют два эквивалентных определения тензорной линейности функций (11) и (17) (по терминологии [2] квазилинейности). Одно из них связано с тождественным обращением в нуль коэффициентов C_2 в (12) и D_2 в (18), а другое — с тем, что угол между девиаторами $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - I_{a1}\mathbf{I}/3$ и $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - I_{b1}\mathbf{I}/3$ нулевой [8], т. е.

$$\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{b}} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}}}\sqrt{\bar{\mathbf{b}} : \bar{\mathbf{b}}}.$$

Условия разделения девиаторных и шаровых свойств изотропных тензор-функций в общем случае нелинейности и в случае квазилинейности подробно освещены в [9].

Взаимообратные тензорные функции (11) и (17) квазилинейны либо неквазилинейны одновременно. Наличие в рядах (1) и (13) слагаемых со степенями тензоров больше первой еще не говорит о тензорной нелинейности соответствующих функций. Так, например, если $A_2 = -I_{a1}A_3$, то функция $\mathbf{b} = A_2\mathbf{a}^2 + A_3\mathbf{a}^3$ тем не менее тензорно линейна и равна $A_3(\Delta_a\mathbf{I} - J_a\mathbf{a})$.

4. Важным частным случаем является ситуация, когда все коэффициенты A_n, $n = 0,1,2$, в (1) постоянны, т.е. не зависят от инвариантов тензора $\mathbf{a}$. Тогда их можно рассматривать как коэффициенты ряда Тейлора вблизи нуля $A_n = F^{(n)}(0)/n!$ некоторой скалярной функции $F(x)$, а сам ряд (1) интерпретировать как тензорную функцию $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, порожденную (посредством набора A_n) скалярной функцией F. Квазилинейность такой тензор-функции, эквивалентная, как было отмечено выше, равенству нулю C_2 в (12), имеет место тогда и только тогда, когда $A_2 = A_3 = \ldots \equiv 0$, т.е. при отсутствии в (1) слагаемых со степенями тензора $\mathbf{a}$ больше первой. Это сразу следует из того, что введенная в (6) функция $K_{a2}^{(n)}$ – многочлен степени $n-2$ от инвариантов I_{a1}, I_{a2} и I_{a3}.

Примерами подобных построений являются взаимообратные друг другу тензорные (матричные) экспонента и логарифм:

$$\mathbf{b} = \beta\left(\exp\frac{\mathbf{a}}{\alpha} - \mathbf{I}\right) \equiv \beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathbf{a}}{\alpha}\right)^n,$$

$$\mathbf{a} = \alpha\ln\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{b}}{\beta}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\mathbf{b}}{\beta}\right)^n,$$

где α и β – характерные величины с физическими размерностями, совпадающими с размерностями $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Для функции $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, допускающей трехчленное представление (11), (12), в матричной форме можно записать

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= (\mathbf{I},\mathbf{a},\mathbf{a}^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}A_n(K_{a0}^{(n)},K_{a1}^{(n)},K_{a2}^{(n)})^T = \\ &= (\mathbf{I},\mathbf{a},\mathbf{a}^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}A_nQ_a^n\cdot(1,0,0)^T = \\ &= (\mathbf{I},\mathbf{a},\mathbf{a}^2)\cdot F(Q_a)\cdot(1,0,0)^T.\end{aligned} \qquad (20)$$

Это означает, что столбец $(C_0,C_1,C_2)^T$ совпадает с первым столбцом матрицы $F(Q_a)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РНФ (грант 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
2. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
3. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
4. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017. 432 с.
5. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.
6. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
7. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
8. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
9. *Георгиевский Д.В.* Условия разделения девиаторных и шаровых свойств у изотропных тензорно-нелинейных функций // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 504. С. 32–35.

THREE-TERM REPRESENTATIONS OF POWER TENSOR SERIES IN THE THEORY OF CONSTITUTIVE RELATIONS

D. V. Georgievskii[a,b,c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[c] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

A class of power tensor series (constitutive relations) with coefficients (material functions), which are functions of three independent invariants, is considered in three-dimensional space. Based on the Hamilton–Cayley formula the exact expressions in the form of matrix series are found for the coefficients of three-term representations of such power series. The relationship of the coefficients of direct and inverse three-term constitutive relations is derived. The cases of tensor linearity, or quasi-linearity, as well as the independence of material functions from invariants are discussed.

Keywords: isotropic tensor function, invariant, tensor series, quasi-linearity, reciprocity, matrix representations