

УДК 532.546

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДАРСИ И БРИНКМАНА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. А. Т. Ильичев^{1,*}, Г. Г. Цыпкин^{1,**}

Представлено академиком РАН А.Г. Куликовским 10.05.2022 г.

Поступило 13.05.2022 г.

После доработки 13.05.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

Проведено исследование устойчивости фронта испарения в пористой среде. Для описания течения используется обобщенное уравнение фильтрации Бринкмана. Представлено сравнение полученных результатов с результатами, найденными в рамках приближения Дарси. Показано, что использование приближения Бринкмана устраняет неограниченность скорости роста возмущений на малых масштабах, что имеет место в случае закона Дарси. Поверхность раздела становится более устойчивой, а в случае неустойчивости наиболее неустойчивая мода соответствует конечному значению волнового числа.

Ключевые слова: пористая среда, испарение, поверхность раздела, уравнение Бринкмана, неустойчивость

DOI: 10.31857/S2686740023010078, EDN: UNLRGO

1. Изучение устойчивости течений в пористых средах представляет интерес для большого числа приложений. Проблемы, связанные с устойчивостью, возникают при исследовании эффективности разработки нефтяных месторождений методом вытеснения [1], при распространении загрязняющих примесей в грунтовых водах [2, 3], при формировании и разработке геотермальных резервуаров [4, 5] и т.д.

Величина волнового числа, соответствующего наиболее неустойчивой моде, определяет характерный размер возмущения, которое развивается на нелинейной стадии. Аналитические исследования линейной устойчивости фильтрационных течений с использованием закона Дарси показали, что существует несколько различных типов переходов к неустойчивому состоянию, характеризующихся значением модуля волнового числа [4–9]. В работе [1] получен критерий неустойчивости в виде линейной зависимости скорости роста (затухания) возмущения от волнового числа, а переход к неустойчивости происходит при смене знака коэффициента, стоящего перед волновым числом, и реализуется одновременно для всех значений волнового числа. Наиболее неустойчи-

вое возмущение может соответствовать конечным или нулевым волновым числам [4, 5]. В [5–9] были найдены режимы перехода к неустойчивости при бесконечно больших значениях волнового числа, когда линейный размер наиболее неустойчивого возмущения стремится к нулю.

Если при волновом числе $\kappa \rightarrow \infty$ мнимая часть частоты $\text{Im}\omega \rightarrow \infty$ [10], то принцип причинности нарушается. Наличие подобной неустойчивости означает, что наиболее неустойчивое возмущение имеет бесконечно малый размер и его эволюция со временем не может быть описана в рамках механики сплошной среды. Естественно предположить, что возникающие трудности обусловлены выбором математической модели, которая не дает адекватного описания рассматриваемого физического процесса.

В настоящей работе для задачи устойчивости поверхности испарения предлагается использовать обобщенное уравнение фильтрации Бринкмана, когда в рамках приближения Дарси наиболее неустойчивое возмущение имеет бесконечно малый размер. Показано, что применение уравнения Бринкмана делает наиболее неустойчивой моду, которая соответствует конечному волновому числу.

2. Рассмотрим задачу о функционировании таких подземных сооружений, как горные выработки, тоннели и т.д., располагающиеся под водоносным горизонтом и слоем водонасыщенных пород (грунта) $0 < z < L$ (рис. 1). Вентиляция со-

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: ilichev@mi.ras.ru

**E-mail: tsypkin@ipmnet.ru

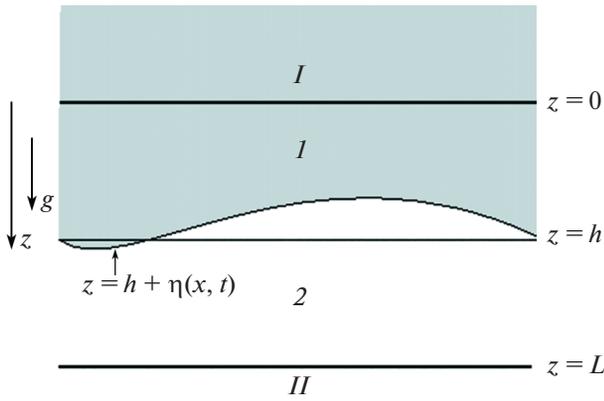


Рис. 1. Схема задачи. I и 2 – низкопроницаемые области. I – высокопроницаемая область, насыщенная водой. II – высокопроницаемая область, насыщенная воздухом.

оружения приводит к испарению воды с кровли и образованию области, насыщенной влажным воздухом $h < z < L$ (область 2), а область I ($0 < z < h$) насыщена водой. Линии $z = 0$ соответствует высокопроницаемому водоносному горизонту, а $z = L$ – кровле подземного сооружения [9]. На поверхности раздела $z = h$ происходит испарение воды с последующим диффузионным переносом пара в область открытого пространства $z > L$.

Движение воды в области I описывается уравнением неразрывности и законом фильтрации Бринкмана с учетом массовой силы

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu_w} \operatorname{grad} (P_1 - \rho_w g z) + \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнения в области 2 представляют собой уравнение неразрывности и закон Бринкмана для воздуха

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = -\frac{k}{\mu_a} \operatorname{grad} P_2 + \frac{k}{\mu_a} \mu_{ea} \Delta \mathbf{w}, \quad (2)$$

уравнение диффузии пара, а для газов справедливо уравнение Клайперона

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \operatorname{div} D \operatorname{grad} \rho_v, \quad P_v = \rho_v R_v T, \quad P_a = \rho_a R_a T. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{v}, \mathbf{w} – векторы скоростей фильтрации воды и воздуха, m – пористость, k – проницаемость, μ – вязкость, P – давление, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность, D – коэффициент диффузии пара. Индексы v, w, a отвечают величинам для пара, воды и воздуха, соответственно, индексы ew, ea обозначают эффективную вязкость воды и воздуха соответственно. Эф-

фективная вязкость определяется соотношением $\mu_e = \mu/m$ [11, 12].

Вместо уравнения диффузии для плотности пара удобно использовать аналогичное уравнение для функции влажности $v = \rho_v / (\rho_a + \rho_v)$. Это уравнение следует из (3) и при условии малости парциального давления пара по сравнению с атмосферным давлением и имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \Delta v. \quad (4)$$

Поскольку скорость фронта мала, то процесс диффузии можно рассматривать как квазистационарный. Тогда из (1), (2) и (4) получаем

$$\Delta v = 0, \quad \Delta P_{1,2} = 0. \quad (5)$$

Рассматриваемая задача сформулирована в изотермическом приближении, поскольку поглощением тепла при испарении, когда температура ниже точки кипения, можно пренебречь [8]. На поверхности раздела в области 2 пар находится в состоянии насыщения, влажность v_* является функцией температуры и находится из соотношения [13]

$$v_* = \frac{R_a F(T)}{R_v P_a},$$

$$F(T) = 10^5 \exp \left[-7226.6 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{373.16} \right) + 8.2 \ln \frac{373.16}{T} - 0.0057(373.16 - T) \right].$$

Условие сохранения массы на поверхности раздела имеет вид

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \frac{\rho_v}{\rho_w} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} + D \frac{\rho_a}{\rho_w} \operatorname{grad} v \cdot \mathbf{n}, \quad (6)$$

где \mathbf{V} – вектор скорости поверхности испарения.

Динамические условия на поверхности испарения имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(-P_1 + 2\mu_{ew} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) n_1 + \mu_{ew} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) n_2 = \\ & = \left(-P_2 - P_c + 2\mu_{ea} \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) n_1 + \mu_{ea} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) n_2, \\ & \mu_{ew} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) n_1 + \left(-P_1 + 2\mu_{ew} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) n_2 = \\ & = \mu_{ea} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) n_1 + \left(-P_2 - P_c + 2\mu_{ea} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) n_2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^\top$,

$$n_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad n_2 = -1.$$

Граничные условия на верхней границе $z = 0$ и на нижней границе $z = L$, совпадающей с кровлей конструкции, записываются в виде

$$z = 0: P_1 = P_0; \quad z = L: P_2 = P_a, \quad v = v_a. \quad (7)$$

При постоянных граничных условиях задача имеет стационарное решение с линейными распределениями давления и влажности, которое будет исследоваться на устойчивость. Динамическое условие на неподвижной поверхности $z = h$ имеет вид $P_1 = P_2 + P_c \equiv P_a + P_c$. Положение границы раздела находится из квадратного уравнения для безразмерного параметра $H = h/L$

$$H_{1,2} = -\frac{1}{2}(\beta - \alpha - 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 - 4\alpha}, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{P_c + P_a - P_0}{\rho_w g L}, \quad \beta = \frac{D \rho_a (v_* - v_a)}{k \rho_w} \frac{m \mu_w}{\rho_w g L}.$$

3. Пусть $\delta P_{1,2}$, δv , η , $\delta v_{x,z}$, $\delta w_{x,z}$ обозначают возмущения давления, влажности, положения поверхности фазового перехода и компонент скоростей воды и воздуха на поверхности $z = h$ соответственно.

Линеаризованная форма закона сохранения массы (6) имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \delta v_z - \frac{\rho_v}{\rho_w} \delta w_z + D \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\partial \delta v}{\partial z}, \quad z = h. \quad (9)$$

Линеаризованные динамические условия имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_{ew} \left(\frac{\partial \delta v_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial x} \right) &= \mu_{ea} \left(\frac{\partial \delta w_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta w_z}{\partial x} \right), \\ -\delta P_1 - \frac{\partial P_{1st}}{\partial z} \eta + 2\mu_{ew} \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} &= \\ = -\delta P_2 + 2\mu_{ea} \frac{\partial \delta w_z}{\partial z}, \quad z = h. \end{aligned} \quad (10)$$

Линеаризованное условие постоянства влажности на поверхности фазового перехода приводится к соотношению:

$$\delta v + \frac{dv_{st}}{dz} \eta = 0, \quad z = h. \quad (11)$$

Устойчивость решения в виде бегущей волны исследуем методом нормальных мод. Ищем решение уравнений (9)–(11) в виде $\{\delta P_{1,2}, \delta v, \eta, \delta v_{x,z}, \delta w_{x,z}\} = \{\tilde{P}_{1,2}(z), \tilde{v}(z), \tilde{\eta}, \tilde{v}_{1,2}(z), \tilde{w}_{1,2}(z)\} \exp(\sigma t + ikx)$,

$$\eta = \hat{\eta} \exp(ikz + \sigma t), \quad \hat{\eta} = \text{const}.$$

Кроме того, из закона Бринкмана (1), (2) имеем

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \right) \tilde{v}_1 - \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \frac{d^2 \tilde{v}_1}{dz^2} = -i\kappa \frac{k}{m \mu_w} \tilde{P}_1,$$

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \right) \tilde{v}_2 - \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \frac{d^2 \tilde{v}_2}{dz^2} = -\frac{k}{m \mu_w} \frac{d \tilde{P}_1}{dz},$$

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \right) \tilde{w}_1 - \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \frac{d^2 \tilde{w}_1}{dz^2} = -i\kappa \frac{k}{m \mu_v} \tilde{P}_2, \quad (12)$$

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \right) \tilde{w}_2 - \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \frac{d^2 \tilde{w}_2}{dz^2} = -\frac{k}{m \mu_v} \frac{d \tilde{P}_2}{dz}.$$

Из граничных условий (7) находим выражения для амплитуд давления и влажности

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(z) &= \hat{P}_- \frac{\text{sh } \kappa z}{\text{sh } \kappa h}, \quad \tilde{P}_2(z) = \hat{P}_+ \frac{\text{sh } \kappa(L-z)}{\text{sh } \kappa(L-h)}, \\ \tilde{v}(z) &= \hat{v}_+ \frac{\text{sh } \kappa(L-z)}{\text{sh } \kappa(L-z)}. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу того обстоятельства, что при отсутствии давления движения нет, однородное решение уравнений (12) полагается равным нулю, а единственное неоднородное решение имеет вид

$$\tilde{v}_1(z) = -i \hat{P}_- \frac{k}{m \mu_w} \kappa \frac{\text{sh } \kappa z}{\text{sh } \kappa h}, \quad (14)$$

$$\tilde{v}_2(z) = -\hat{P}_- \frac{k}{m \mu_w} \kappa \frac{\text{ch } \kappa z}{\text{sh } \kappa h},$$

$$\tilde{w}_1(z) = -i \hat{P}_+ \frac{k}{m \mu_v} \kappa \frac{\text{sh } \kappa(L-z)}{\text{sh } \kappa(L-h)},$$

$$\tilde{w}_2(z) = \hat{P}_+ \frac{k}{m \mu_v} \kappa \frac{\text{ch } \kappa(L-z)}{\text{sh } \kappa(L-h)},$$

иными словами, возмущение скорости однозначно восстанавливается по возмущению давления.

Подставляя полученные решения (13), (14) в условия на поверхности раздела, получаем систему однородных уравнений для амплитуд, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{y} &= 0, \quad \mathbf{y} = \{\hat{P}_-, \hat{P}_+, \hat{\eta}, \hat{v}\}^T, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$a_{11} = -2i \frac{k \mu_{ew}}{m \mu_w} \kappa^2 \text{cth } \kappa h,$$

$$a_{12} = -2i \frac{k \mu_{ev}}{m \mu_v} \kappa^2 \text{cth } \kappa(L-h),$$

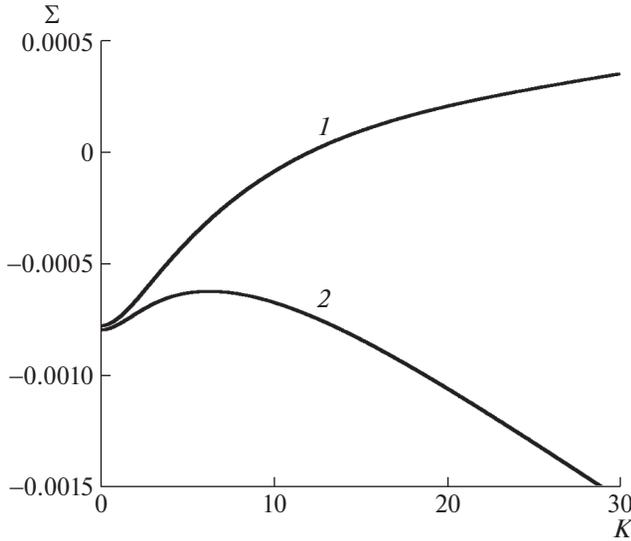


Рис. 2. Дисперсионные кривые: 1 – приближение Дарси, 2 – приближение Бринкмана. $L = 10$ м, $k = 10^{-17}$ м², $P_0 = 10^5$ Па, $P_c = 0.45 \times 10^5$ Па.

$$a_{21} = -1 - 2 \frac{k\mu_{ew}}{m\mu_w} \kappa^2, \quad a_{22} = 1 + 2 \frac{k\mu_{ev}}{m\mu_v} \kappa^2,$$

$$a_{23} = -\frac{P_a + P_c - P_0}{h},$$

$$a_{31} = \frac{k}{m\mu_w} \kappa \text{th} \kappa h,$$

$$a_{32} = \frac{k\rho_v}{\rho_w m\mu_v} \kappa \text{th} \kappa(L - h), \quad a_{33} = \sigma,$$

$$a_{34} = D \frac{\rho_a}{\rho_w} \kappa \text{th} \kappa(L - h),$$

$$a_{43} = -\frac{v^* - v_a}{L - h}, \quad a_{44} = 1.$$

Однородная система уравнений (15) имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равен нулю:

$$a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = 0.$$

Вычисления проводились при характерных значениях физической системы [9]. На рис. 2 представлены дисперсионные кривые, полученные в приближении Дарси (кривая 1) и приближении Бринкмана (кривая 2). Видно, что при малых значениях безразмерного волнового числа $K = \kappa L$, соответствующих большому линейному масштабу физической задачи, оба приближения дают очень близкие результаты. При увеличении волнового числа дисперсионные кривые расходятся, а при больших K наблюдается качественное различие результатов. В рамках приближения

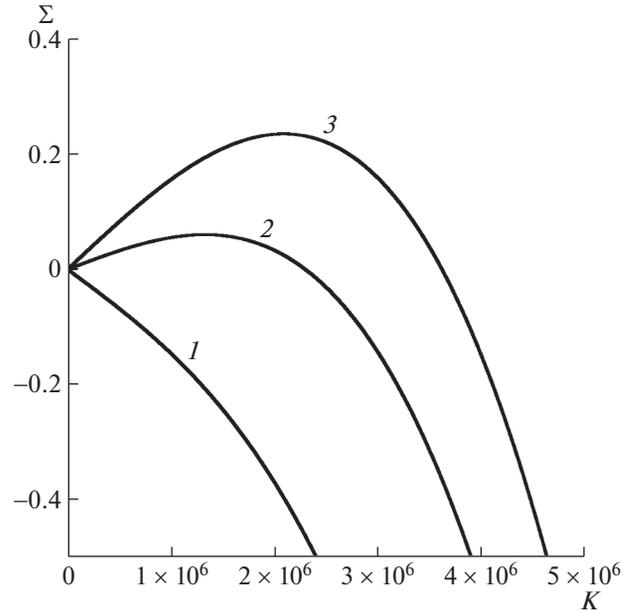


Рис. 3. Эволюция дисперсионных кривых при переходе к неустойчивости в рамках приближения Бринкмана. $L = 10$ м, $k = 10^{-17}$ м², $P_0 = 10^5$ Па. Кривые 1–3: $P_c = 0.5955, 0.5957, 0.5958 \times 10^5$ Па.

Дарси скорость роста малых возмущений неограниченно возрастает, а использование уравнения Бринкмана дает затухание малых возмущений.

Затухание малых возмущений в рамках приближения Бринкмана при $K \rightarrow \infty$ можно показать аналитически. Рассмотрим асимптотику полученного дисперсионного уравнения. Оставляя главные члены, получаем

$$\Sigma \sim -\frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{v^* - v_a}{1 - H} K + O(K^{-1}),$$

$$K \rightarrow \infty, \quad \Sigma = \sigma \frac{L^2}{D}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что для очень коротких волн $\Sigma < 0$ и возмущения убывают при $K \rightarrow \infty$ при любых допустимых значениях параметров как в устойчивом, так и в неустойчивом случаях. Отсюда можно сделать вывод, что переход к неустойчивости реализуется при конечных значениях волнового числа, как показано на рис. 3.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность академику РАН А.Г. Куликовскому за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00126).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid // Proc. R. Soc. London, 1958. A 245. P. 312–329.
2. *Rose D.A., Konukcul F., Gowing J.W.* Aust. J. Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid // Soil Res. 2005. V. 43. P. 565–573.
3. *Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G., Pritchard D.T., Richardson C.N.* Instability of the salinity profile during the evaporation of saline groundwater // J. Fluid Mech. 2008. V. 614. P. 87–104.
4. *Schubert G., Straus J.M.* Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 6505–6512.
5. *Tsyarkin G.G., Il'ichev A.T.* Gravitational stability of the water-vapor phase transition interface in geothermal systems // Transport in porous media. 2004. V. 55. P. 183–199.
6. *Khan Z.H., Pritchard D.* Liquid-vapour fronts in a porous media: multiplicity and stability of front positions // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 61. P. 1–17.
7. *Khan Z.H., Pritchard D.* Anomaly of spontaneous transition to instability of liquid–vapour front in a porous medium // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 84. P. 448–455.
8. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552–561.
9. *Цыпкин Г.Г., Ильичев А.Т.* Жесткий переход к неустойчивости Релея–Тейлора поверхности раздела в пористой среде // ДАН. 2006. Т. 57. № 9. С. 523–527.
10. *Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G.* Catastrophic transition to instability of evaporation front in a porous medium // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2008. V. 25. P. 665–677.
11. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2635–2646.
12. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II. Comparison with experiment // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2647–2655.
13. *Вукалович М.П.* Термодинамические свойства воды и водяного пара. М.: Машгиз, 1955. 92 с.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DARCY AND BRINKMAN APPROXIMATIONS FOR THE TRANSITION TO INSTABILITY IN A POROUS MEDIUM

A. T. Il'ichev^a and G. G. Tsyarkin^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.G. Kulikovskiy

We studied the stability of the evaporation front in a porous media. To describe the flow, the generalized Brinkman equation is used. Comparison of the obtained results with the results found within the framework of the Darcy approximation is presented. It is shown, that the use of the Brinkman approximation eliminates the unboundedness of the perturbation growth rate at small scales arising in the case of Darcy's law. Interface becomes more stable, and in the case of instability the most unstable mode corresponds to the finite value of the wave number.

Keywords: porous medium, evaporation, interface, Brinkman equation, instability