ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 509, с. 39–44

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА–ХОПФА НА ОТРЕЗКЕ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Академик РАН В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1], О. М. Бабешко[1], М. В. Зарецкая[1], В. С. Евдокимов[2]

Поступило 25.07.2022 г.
После доработки 25.07.2022 г.
Принято к публикации 08.12.2022 г.

Излагается подход, позволяющий впервые построить точное решение интегральных уравнений Винера–Хопфа на конечном отрезке для случая мероморфных функций в преобразованиях Фурье ядра. Интегральное уравнение Винера–Хопфа традиционно рассматривается заданным на полубесконечном отрезке. Однако в приложениях часто встречаются случаи их применения заданными на конечном отрезке. Для этих целей разработаны приближенные методы применения этих интегральных уравнений. Однако при рассмотрении интегральных уравнений Винера–Хопфа, порожденных смешанными задачами механики сплошных сред и математической физики в многослойной среде конечной толщины, оказалось, что эти интегральные уравнения решаются точно как на полубесконечном, так и на конечном отрезках. Подход опирается на новый метод моделирования в дифференциальных уравнениях и в некоторых типах интегральных уравнений. Он позволяет осуществить сведение интегральных уравнений Винера–Хопфа к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, которые решаются точно. Полученный результат открывает возможность строить точные решения граничных задач для деформируемых штампов и трещин нового типа в ограниченных телах.

Ключевые слова: смешанные задачи, многослойные среды, интегральное уравнение Винера–Хопфа, бесконечные алгебраические системы

DOI: 10.31857/S2686740023020025, **EDN:** UOPIOG

ВВЕДЕНИЕ

При решении смешанных граничных задач для дифференциальных уравнений в многослойной среде с плоскими границами возникают интегральные уравнения Винера–Хопфа на конечном отрезке [1–3]. К числу таких граничных задач относятся контактные задачи теории упругости, задачи теории трещин Гриффитса и трещин нового типа, задачи трибологии, создания элементной базы электроники, оценки свойств ледовых покрытий, геофизики, сейсмологии и ряда других областей. Для их решения разработан большой арсенал различных аналитических, численных и приближенных методов, объединяющих аналитические и численные подходы [1–3]. В свою очередь аналитические методы делятся на подходы, включающие построение точных решений, применение ортогональных полиномов, граничных элементов, асимптотических методов, метод коллокации и др. Зачастую эти методы находят дальнейшее развитие путем последующего применения численных подходов, чем достигается их высокая эффективность. Свойства решений граничных задач, как правило, описываются функциями, содержащими те или иные особенности и сингулярности, или могут содержать условия, вызывающие резонансное поведение рассматриваемой деформируемой структуры. Применение различных методов решения граничных задач показало, что в тех случаях, когда свойства решений представляются достаточно гладкими функциями, можно применять приближенные методы. Но когда аналитические свойства решений граничных задач полностью не известны, важно суметь построить точное решение рассматриваемой задачи и выявить все возможные особенности решения. После этого можно уже применять приближенные подходы, позволяющие учитывать все свойства. Сказанное можно наблюдать на примерах решения контактной

[1] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
[2] *Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
**E-mail: babeshko41@mail.ru*

задачи для полупространства, выполненной Л.А. Галиным [2], о действии клиновидного в плане штампа на деформируемую среду, о трещинах Гриффитса и многих других примерах.

Как правило, построенное точное решение граничной задачи открывает возможность решения следующих по сложности задач, в том числе из других областей. Относящиеся к числу аналитических, асимптотические методы могут дать возможность построить точное решение рассматриваемой задачи. В настоящей работе на основе анализа свойств асимптотических решений контактной задачи о действии жесткого штампа конечной относительной длины на слоистую среду оказалось возможным построить точное решение соответствующего интегрального уравнения Винера–Хопфа. В работе [2] разработаны асимптотические методы решения интегрального уравнения Винера–Хопфа на конечном отрезке $2a$. Именно, построены асимптотические формулы отдельно для случаев $a \gg 1$ и $a \ll 1$. Эти асимптотические формулы использовались и продолжают использоваться для решения самых разных смешанных граничных задач. Так, в работах [4–14] рассмотрен большой набор важных и ответственных смешанных задач в разных областях, опирающихся на указанные асимптотические подходы и на близкие к ним. В частности, рассмотрены смешанные задачи для сред сложных реологий [4], для тел конечных размеров [5], в проблеме дефектоскопии [6, 7], в проблеме излучения и отражения волн [8], в проблеме прочности предварительно напряженных материалов [9], в динамических контактных задачах [10, 11], в смешанных задачах теории трещин [12, 13], в геофизике [14]. Разработанный в настоящей работе метод построения точного решения ряда смешанных задач для многослойных областей может оказаться полезным во всех вышеперечисленных задачах, в том числе в наноматериалах, контактных задачах с деформируемым штампом, трещинах нового типа. В его разработке использован новый универсальный метод моделирования [15].

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА–ХОПФА НА ОТРЕЗКЕ

Интегральное уравнение контактной задачи на многослойной среде при наличии смены граничных условий на отрезке длиной $2a$ имеет вид [2]

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x), \quad |x_1| \le a,$$
$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(u)e^{-iux}du. \tag{1}$$

В том случае если многослойная среда имеет конечную толщину, то преобразование Фурье ядра интегрального уравнения, функция $K(u)$, является мероморфной в комплексной плоскости переменного u и обладает свойствами

$$K(u) = A|u|^{-1}[1 + o(1)], \quad |u| \gg 1.$$

В изотропном случае она является четной и может быть представлена в виде $K(u) = P^{-1}(u)R(u)$. Здесь целые функции $R(u)$ и $P(u)$ имеют первый порядок и конечный тип, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, имеет вид [2]

$$\begin{gathered}\xi_S = ir(s + 0.5)(1 + o(1)), \quad s \to \infty,\\ z_m = irm(1 + o(1)),\\ s \to \infty, \quad r = \mathrm{const} > 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Например, в статической контактной задаче для упругого слоя, в случае жесткого сцепления с основанием, функция $K(u)$ имеет вид [2]

$$K(u) = -\frac{2(3-4\nu)\,\mathrm{sh}2u - 4u}{u[2(3-4\nu)\,\mathrm{ch}2u + 4u^2 + 1 + (1-\nu)^2]},$$

которая обладает перечисленными выше свойствами. Предполагается также, что для рассматриваемых интегральных уравнений на отрезке доказаны теоремы единственности и разрешимости в некоторых пространствах $L_p(-a, a)$. Ряд теорем единственности для интегральных уравнений статических задач имеется в [2].

Используя описанные нули, построим четные целые функции $R(u,z)$ $P(u,z)$ в форме бесконечных произведений [16]. Последние будут иметь вид

$$R(u^2, z) = R_{\mp}(u,z)\,R_{\pm}(u,z),$$
$$R_{\pm}(u,z) = T_{\mp}e^{\mp iu}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{u}{z_s}\right)e^{\frac{u}{\pm z_s}},$$
$$T_{\mp} = \mathrm{const}, \quad P(u,\xi) = P_{\mp}(u,\xi)\,P_{\pm}(u,\xi), \tag{3}$$
$$P_{\pm}(u,\xi) = S_{\mp}e^{\mp iu}\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{u}{\xi_s}\right)e^{\frac{u}{\pm \xi_s}},$$
$$S_{\mp} = \mathrm{const},$$

которые после деления на $P(u)$ дадут мероморфные функции, обозначенные $K(u) = P^{-1}(u,\xi)R(u,z)$. Их нулями являются $\pm z_m$, а полюсами $\pm\xi_s$.

С помощью полученных функций построим мероморфные функции следующего вида:

$$K_{\pm}(u) = P_{\pm}^{-1}(u,\xi)\,R_{\pm}(u,z).$$

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО ВИДА РЕШЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Применяя новый универсальный метод моделирования [15], преобразуем интегральное уравнение, поменяв порядок интегрирования, и будем искать решения граничных задач в форме обыкновенного дифференциального уравнения. Для этого представим его в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P^{-1}(u)R(u)\Phi(u)e^{-iux}du = f(x). \qquad (4)$$

С учетом свойств ядра, вычислив обращения Фурье, получаем представление

$$\prod_{n=1}^{\infty} R_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = f_0(x), \quad f_0(x) \equiv \prod_{m=1}^{\infty} P_m\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x).$$

Слева стоит дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами бесконечного порядка, а справа – подвергнутая дифференциальной операции правая часть, свидетельствующая о неоднородности дифференциального уравнения.

В соответствии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами общее решение однородного дифференциального уравнения, отыскиваемое в классических функциях, имеет вид

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0n}(x),$$

где каждая функция является решением дифференциальных уравнений вида

$$R_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_{0n}(x) \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + z_n^2\right)\varphi_{0n}(x) = 0.$$

Примем частные решения в виде

$$\varphi_{0n}(x) = C_n^+ e^{iz_n(a+x)} + C_n^- e^{iz_n(a-x)}.$$

Взяв их сумму, получим общее решение всего дифференциального уравнения, характеристическим уравнением для которого является функция

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^+ e^{iz_n(a+x)} + C_n^- e^{iz_n(a-x)}).$$

Учет правой части неоднородного уравнения будем осуществлять из условия удовлетворения решения интегральному уравнению.

С этой целью упростим правую часть интегрального уравнения, представив ее с помощью преобразования Фурье, положив

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)e^{-i\eta x}d\eta.$$

Это дает возможность рассматривать правую часть в виде

$$F(\eta)e^{-i\eta x}. \qquad (5)$$

Представив частное решение дифференциального уравнения в виде $\varphi_*(x) = Ae^{-i\eta x}$ и построив его преобразование Фурье $\Phi_*(u)$, искомое решение $\Phi(u)$ интегрального уравнения в преобразованиях Фурье примем в форме

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) + \Phi_*(u).$$

В результате подстановки решения в такой форме в интегральное уравнение (4) и учета [2], а также соотношений (5) получаем представление частного решения в виде

$$\Phi_*(u) = \frac{iF(\eta)}{K(\eta)(u-\eta)}.$$

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Будем искать решение интегрального уравнения (4), (5) в виде

$$\varphi(x) = F(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{n=1}^{\infty}[C_n^+ e^{iz_n(a+x)} + C_n^- e^{iz_n(a-x)}]. \qquad (6)$$

Внесем его в интегральное уравнение (1), с условием (5), предварительно вычислив представление ядра по вычетам и получив выражение [2]

$$k(x) = i\sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{i\xi_s|x|}, \quad b_s = [P'(\xi_s)]^{-1} R(\xi_s).$$

В результате вычислений и приравнивания левой части интегрального уравнения правой, с учетом свойства (3) приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{gathered}[\mathbf{A} \pm \mathbf{B}(a)]\mathbf{X}(\pm) = \mathbf{D}(\pm),\\ \mathbf{A} = \left\|\frac{1}{\xi_r - z_m}\right\|, \quad \mathbf{B}(a) = \left\|\frac{\exp i2az_m}{\xi_r + z_m}\right\|,\\ \mathbf{D}(\pm) = \left\{\frac{F(\eta)}{K(\eta)}\left[\frac{e^{ia\eta}}{\eta+\xi} \pm \frac{e^{-ia\eta}}{\eta-\xi}\right]\right\},\\ \mathbf{X}(\pm) = \{x_m(\pm)\}, \quad x_m(\pm) = C_m^+ \pm C_m^-.\end{gathered} \qquad (7)$$

Знаки в системе уравнений берутся в соответствии с этажностью.

При любом $a > 0$ операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ действуют непрерывно в пространстве бесконечных последовательностей C_v, с нормой $\|\mathbf{X}\| = \max\left|m^v x_m\right|$, $0 < v \le 0.5$ [2].

Построенная бесконечная система уравнений изучалась в [2] для больших значений параметра $a \gg 1$. Здесь принято во внимание, с учетом свойств нулей z_m, экспоненциальное убывание всех членов матрицы-функции $\mathbf{B}(a)$.

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ $\mathbf{A}^{-1}$

Вычислим интеграл от убывающей на бесконечности мероморфной функции по множеству окружностей, расположенных между нулями и полюсами подынтегральной мероморфной функции. В результате получим соотношение

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{K_+(\lambda)d\lambda}{K_+'(-z_g)(-\eta+\lambda)(\lambda+z_m)} =$$

$$= -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{K_+'(-z_g)(-\eta-\xi_r)(-\xi_r+z_m)[]K_+^{-1}(-\xi_r)'} -$$

$$- \frac{K_+(\eta)}{K_+'(-z_g)(\eta+z_m)} - \frac{K_+(-z_m)}{K_+'(-z_g)(-\eta-z_m)}, \quad C_n \to \infty.$$

Положив в нем $\eta = -z_m + \delta$, приходим к соотношению

$$\frac{K_+(-z_m) - K_+(-z_m+\delta)}{K_+'(-z_g)(-z_m+\delta+z_m)} = -\frac{K_+(-z_m+\delta) - K_+(-z_m)}{K_+'(-z_g)(\delta)}.$$

Устремив $\delta \to 0$, получаем

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{K_+'(-z_g)(\xi_r - z_g)(\xi_r - z_m)[K_+^{-1}(-\xi_r)]'} = \begin{cases} 1 \ldots g = m, \\ 0 \ldots g \neq m. \end{cases}$$

В результате преобразований построена бесконечная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, являющаяся двусторонней обратной к матрице $\mathbf{A}$, что легко проверяется. Она представима в виде

$$\mathbf{A}^{-1} = \|\tau_{gr}\|, \quad \tau_{gr} = \frac{1}{K_+'(-z_g)(\xi_r - z_g)[K_+^{-1}(-\xi_r)]'}.$$

Оператор $\mathbf{A}^{-1}$ действует в пространстве C_v.

Для дальнейшего исследования остановимся на выборе случая верхнего этажа в уравнении (7), случай нижнего изучается аналогично. Подействуем для случая верхнего этажа слева обратной матрицей на уравнение (7), получим уравнение второго рода вида

$$\mathbf{X} = -A^{-1}\mathbf{B}(a)\mathbf{X} + A^{-1}\mathbf{D}. \tag{8}$$

Достаточно легко оценивается норма оператора, имеющая вид

$$\left\|A^{-1}\mathbf{B}(a)\right\| = \max_g \left| g^v \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \tau_{gr} \frac{\exp i2az_m}{\xi_r + z_m} m^{-v} \right|, \tag{9}$$

которая стремится к нулю при $a \to \infty$ и возрастает до бесконечности при $a \to 0$.

В силу свойства рядов экспонент, представляемая в вертикальных скобках функция (9) является не только непрерывной функцией параметра a, но также и целой функцией [17]. Отсюда следует, что найдется нижняя граница параметра $a = a_0$, такая, что на интервале $(a_0, \infty]$ будет иметь место соотношение $\left\|A^{-1}\mathbf{B}(a)\right\| < 1$. Тогда в этом интервале изменения параметра a на конечном отрезке $[-a, a]$ методом последующих приближений можно построить точное решение интегрального уравнения Винера–Хопфа, которое имеет вид

$$\mathbf{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}\mathbf{B}(a))^n A^{-1}\mathbf{D}. \tag{10}$$

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим оператор $A^{-1}\mathbf{B}(a)X$, имеющий вид

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \tau_{gr} \frac{\exp i2az_m}{\xi_r + z_m} x_m \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_+(z_m)\exp iz_m a}{K_+'(-z_g)(z_m + z_g)} x_m \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{mg} x_m \exp iz_m a, \quad \frac{K_+(z_m)}{K_+'(-z_g)(z_m + z_g)} = \sigma_{mg}.$$

Как функция переменного a, он представляет числовой ряд экспонент с комплексными показателями и называется рядом Дирихле [17], а как равномерно сходящийся ряд целых функций представляет целую функцию параметра a.

Но решение интегрального уравнения на отрезке $2a$, в отличие от случая полубесконечного отрезка, ищется в форме комбинации двух рядов – с положительными и отрицательными показателями (6), коэффициенты которых должны определяться. Встает вопрос о единственности коэффициентов. Свойства коэффициентов этих двух рядов, зависящих от параметра a, зависят от свойств показателей экспонент, входящих в этот ряд. Эти свойства выявляются вычислением индикатрисы роста целой функции, для которой показатели являются нулями. Справедлив следующий результат [2, 17].

Пусть γ_k – нули целой функции $P(z)$, индикатриса роста которой

$$h(\theta) = \overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{\ln|P(\rho e^{i\theta})|}{\rho} = \sigma|\sin\theta|.$$

Тогда если ряд

$$J(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_{kn}e^{\gamma_k z} + b_{kn}e^{-\gamma_k z})$$

равномерно сходится в области ω, полностью содержащей отрезок мнимой оси, $|\mathrm{Im}\, z| < \sigma$, то из условия $J(z) \equiv 0$ в ω следует, что a_{kn}, $b_{kn} \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$

В нашем случае a_{kn}, b_{kn} не зависят от $n = \infty$ и свойства нулей целой функции удовлетворяют требованиям индикатрисы роста. Таким образом, доказана единственность коэффициентов разложения решения (7). Для доказательства существования решения на любом конечном отрезке используем свойство оператора $A^{-1}\mathbf{B}(a)$ как целой функции переменного a, удовлетворяющей условию $\left\|A^{-1}\mathbf{B}(a)\right\| < 1$ на интервале $(a_0, \infty]$. На этом интервале вычислим сумму геометрической прогрессии (10). В результате получим для коэффициентов разложения представление вида

$$\mathbf{X} = \frac{A^{-1}\mathbf{D}}{1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)}. \qquad (11)$$

Из теоремы единственности для интегрального уравнения для всех a на положительной оси следует, что знаменатель в (11) не имеет нулей, в противном случае нарушалась бы единственность решения. Таким образом, мероморфную функцию параметра a можно аналитически продолжить на весь полуинтеравал $(0, \infty]$, в том числе в область, где

$$\left\|A^{-1}\mathbf{B}(a)\right\| > 1.$$

Следуя методам функционального анализа [18], операторное представление формулы (11) можно записать в виде

$$\mathbf{X} = [1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)]^{-1} A^{-1}\mathbf{D}. \qquad (12)$$

Нетрудно проверить, что построенное решение представляет точное решение уравнения (8) для всех значений параметра a.

Действительно, подействовав оператором $[1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)]$ слева на равенство (12), получим соотношение

$$[1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)]\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{D}.$$

Это свидетельствует об удовлетворении решения интегральному уравнению, эквивалентному бесконечной системе алгебраических уравнений на любом конечном отрезке. Из полученного решения можно получить предельный случай для малых $a \ll 1$. Так, взяв $f(x) = \Delta$, $\Delta = \text{const}$ и произведя преобразования в формуле (11), выделив главный член при $a \to 0$, получаем асимптотическое представление решения в виде

$$\varphi(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{a^2 - x^2}\ln a}. \qquad (13)$$

Оно совпадает с результатом, получаемым с исследованием исходного интегрального уравнения (1) методом малых отрезков, разработанным в [2]. Для этого случая интегральное уравнение (1) преобразуется в представленное ниже:

$$\int_{-a}^{a} \ln(x - \xi)\varphi(\xi)d\xi = \Delta.$$

Его решение совпадает с (13).

ВЫВОД

Построенное решение дает возможность исследовать поведение материалов, имеющих трещины нового типа, которым свойственен механизм разрушения, отличный от случая трещин Гриффитса. Ранее их удавалось исследовать для случаев формирования полубесконечными фрагментами материала. Теперь, с получением точных решений уравнения Винера–Хопфа для конечных областей задания, это возможно выполнять для случаев, часто используемых на практике.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 22-29-00213.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
2. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974. 456 с.
3. *Попов Г.Я.* Избранные труды. Т. 2. Одесса: Одесско-полиграфический дом ВМВ, 2007. 516 с.
4. *Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Aizikovich S.M.* Thermal contact of magneto-electro-elastic materials subjected to a condacting flat punch // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2015. V. 50. № 7. P. 513–527.
5. *Александров В.М.* Аналитические методы в задачах для тел конечных размеров с несобственно смешанными граничными условиями // Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. № 2. С. 51–57.
6. *Ватульян А.О., Плотников Д.К.* К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 285–295.
7. *Ватульян А.О., Беляк О.А.* Асимптотический подход к расчету волновых полей в слое с дефектом малого характерного размера // Акустический журнал. 2020. Т. 66. № 3. С. 235–241.
8. *Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Eremin A.* Resonance blocking and passing effects in two dimensional elastic waveguides with obstacles // Journal of the Acoustical Society of America. 2011. V. 130. № 1. P. 113–121.
9. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
10. *Ворович Е.И., Пряхина О.Д.* Динамическая контактная задача для упругой системы балка-слой // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 144.
11. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Интегральные уравнения динамических задач для многослойных

сред, содержащих систему трещин // ПММ. 2005. Т. 69. № 2. С. 345–351.

12. *Артамонова Е.А., Пожарский Д.А.* Плоские трещины в трансверсально изотропном слое // ПММ. 2020. Т. 84. № 4. С. 500–510.
13. *Пожарский Д.А., Золотов Н.Б.* Контактные задачи для полых цилиндров из неоднородного материала // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 6 (358). С. 130–138.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С.* Об определении механического состояния тектонических разломов // Геология и геофизика Юга России. 2022. № 12 (2). С. 53–66. https://doi.org/10.46698/VNC.2022.75.85.004
15. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // ДАН. 2021. Т. 499. С. 21–26. https://doi.org/10.31857/S2686740021040039
16. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М., 1968. 624 с.
17. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 537 с.
18. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

THE EXACT SOLUTION OF THE WIENER–HOPF EQUATION ON THE SEGMENT FOR CONTACT PROBLEMS AND PROBLEMS OF THE THEORY OF CRACKS IN A LAYERED MEDIUM

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. V. Evdokimova[a], O. M. Babeshko[a], M. V. Zaretskaya[a], and V. S. Evdokimov[b]

[a] *Kuban State University, Krasnodar, Russia*

[b] *Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

This paper presents an approach that allows for the first time to construct an exact solution of the Wiener–Hopf integral equations on a finite segment for the case of meromorphic functions in Fourier transforms of the kernel. The Wiener–Hopf integral equation is traditionally considered set on a semi-infinite segment. However, in applications, there are often cases of their application specified on a finite segment. For these purposes, approximate methods of applying these integral equations have been developed. However, when considering the Wiener–Hopf integral equations generated by mixed problems of continuum mechanics and mathematical physics in a multilayer medium of finite thickness, it turned out that these integral equations are solved exactly both on semi-infinite and finite segments. The approach is based on a new modeling method in differential equations and in some types of integral equations. It allows the reduction of Wiener–Hopf integral equations to infinite systems of linear algebraic equations that are solved exactly. The obtained result opens up the possibility of constructing exact solutions to boundary value problems for deformable stamps and cracks of a new type in bounded bodies.

Keywords: mixed problems, multilayer media, Wiener–Hopf integral equation, infinite algebraic systems