

УДК 531.26,521.14,514.85

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ, ПОЛЕМ ПРИТЯЖЕНИЯ ТРЕХ ШАРОВ

© 2023 г. А. А. Буров¹, В. И. Никонов^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 13.09.2022 г.

Поступило 13.09.2022 г.

После доработки 13.09.2022 г.

Принято к публикации 12.10.2022 г.

Рассматривается поле притяжения твердого тела, близкого к динамически симметричному. Исследуется вопрос о том, как приблизить такое поле притяжения полем притяжения трех однородных шаров так, чтобы для этих полей разложение гравитационного потенциала совпадало вплоть до членов пятого порядка малости. В качестве примера рассмотрено приближение тремя шарами астероида (433) Эрос.

Ключевые слова: поле притяжения твердого тела, приближение поля притяжения, поле притяжения астероидов, астероид (433) Эрос

DOI: 10.31857/S2686740023020049, EDN: UPAKLT

1. ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть \mathcal{B} – динамически симметричное твердое тело массой m с центром масс в точке O , осевой и экваториальный центральные моменты инерции которого равны I_a и I_e соответственно. Пусть $Oxuz$ – связанная с этим телом система отсчета, ось Oz которой направлена вдоль оси динамической симметрии. Как известно (см., например, [1–3]), разложение в ряд потенциала притяжения такого тела может быть представлено в виде

$$U = -G \frac{m}{r} \left(1 + \sum_{k \geq 2} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right), \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса тела, R – характерный размер тела, например, радиус шара, объем которого совпадает с объемом тела, r – расстояние от центра масс тела до изучаемой точки, φ – “географическая широта” изучаемой точки (отстоящей от центра масс тела на расстоянии r), J_k – безразмерные постоянные, $P_k(\cdot)$ – многочлены Лежандра.

В частном случае, когда тело представляет собой совокупность однородных шаров \mathcal{B}_i , $i = 1, \dots, N$,

массами m_i и радиусами r_i , центры которых лежат на одной прямой и задаются как $C_i = (0, 0, c_i)$ относительно $Oxuz$, разложение (1) принимает вид

$$U = -\frac{Gm'}{r} \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\gamma_k}{r^k} P_k(\sin \varphi) \right), \quad (2)$$

$$\gamma_k = \frac{\sum_{i=1}^N m_i c_i^k}{m'}, \quad m' = \sum_{i=1}^N m_i.$$

В общем случае ставится задача определения $2N$ параметров m_1, \dots, m_N и c_1, \dots, c_N таких, чтобы совпали первые $2N$ коэффициентов в разложениях (1) и (2). Соответствующие равенства примут вид:

$$m_1 c_1^k + m_2 c_2^k + \dots + m_N c_N^k = m J_k R^k, \quad (3)$$

$$k = 0, \dots, 2N - 1.$$

Заметим, что для $k = 0$ в правой части равенства (3) стоит масса тела, а для $k = 1$ правая часть равна нулю, поскольку предполагается, что начало системы отсчета совпадает с центром масс. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда $N = 3$.

2. ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ТРЕХ ШАРОВ С ЦЕНТРАМИ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим случай, когда $N = 3$, т.е. приближение осуществляется с помощью трех однородных шаров $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ и \mathcal{B}_3 массами m_1, m_2 и m_3 и ра-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия
*E-mail: nikonov@list.ru

диусами r_1, r_2 и r_3 , центры которых во введенной системе отсчета задаются как $C_1 = (0, 0, c_1)$, $C_2 = (0, 0, c_2)$ и $C_3 = (0, 0, c_3)$.

Разрешив систему уравнений (3) с $k = 0, 1, 2$ относительно m_1, m_2 и m_3 , имеем

$$m_1 = \frac{m(c_2c_3 + J_2R^2)}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)}, \quad m_2 = \frac{m(c_3c_1 + J_2R^2)}{(c_2 - c_3)(c_2 - c_1)}, \quad (4)$$

$$m_3 = \frac{m(c_1c_2 + J_2R^2)}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)}.$$

Подстановка этих выражений в оставшиеся три уравнения системы (3) и введение обозначений

$$\sigma_1 = c_1 + c_2 + c_3, \quad \sigma_2 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1, \quad (5)$$

$$\sigma_3 = c_1c_2c_3,$$

позволяет представить эти уравнения в виде

$$\sigma_3 + \sigma_1R^2J_2 = R^3J_3, \quad (6)$$

$$\sigma_3\sigma_1 + (\sigma_1^2 - \sigma_2)R^2J_2 = R^4J_4, \quad (7)$$

$$\sigma_3(\sigma_1^2 - \sigma_2) + (\sigma_1^3 + \sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2)R^2J_2 = R^5J_5. \quad (8)$$

Оказалось, что система уравнений (6)–(8) относительно $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ сводится к линейной и поэтому имеет единственное решение

$$\sigma_1 = R \frac{J_3J_4 + (J_2J_3 - J_5)J_2}{J_2^3 + J_3^2 - J_2J_4}, \quad (9)$$

$$\sigma_2 = R^2 \frac{(J_2J_3 - J_5)J_3 + (J_4 - J_2^2)J_4}{J_2^3 + J_3^2 - J_2J_4}, \quad (10)$$

$$\sigma_3 = R^3 \frac{J_3^3 + J_2^2J_5 - 2J_2J_3J_4}{J_2^3 + J_3^2 - J_2J_4}. \quad (11)$$

Таким образом, остается найти c_1, c_2, c_3 как корни кубического уравнения

$$c^3 - \sigma_1c^2 + \sigma_2c - \sigma_3 = 0 \quad (12)$$

и по ним с помощью соотношений (4) восстановить значения масс m_1, m_2, m_3 .

Дискриминант левой части уравнения (12) имеет вид

$$\Delta = -4 \cdot \sigma_1^3 \cdot \sigma_3 + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - 4 \cdot \sigma_2^3 + 18 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - 27 \cdot \sigma_3^2. \quad (13)$$

Если $\Delta > 0$, то все значения c_k , а вместе с ними – и m_k вещественны. Если $\Delta < 0$, то вещественно лишь одно значение из c_k .

З а м е ч а н и е 1. То обстоятельство, что при приближении поля притяжения твердого тела полем притяжения двух притягивающих центров, эти центры могут оказаться в комплексной области, хорошо известно. Соответствующие выраже-

ния для дискриминанта, знак которого определяет, имеет место такое явление или нет, выписаны, например, в [2, 4].

3. ОСРЕДНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Как известно (см., например, [5]), гравитационный потенциал твердого тела \mathcal{B} в правой декартовой системе координат $Oxyz$ в общем виде может быть записан как

$$U = -G \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{a+b+c=d} I_{abc} \frac{(-1)^d}{a!b!c!} \frac{\partial^d}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (14)$$

где $I_{abc} = \int_{\mathcal{B}} x^a y^b z^c dm$ – так называемые интегралы инерции, a, b, c – целые числа, $d = 0, 1, 2, \dots$.

В случае, когда тело близко к динамически симметричному, вместо потенциала (14) имеет смысл рассматривать приближенный потенциал, получающийся из (14) в результате осреднения “по долготе” следующим образом.

Пусть оси системы отсчета $Oxyz$ совпадают с главными центральными осями инерции, и ось Oz можно приближенно считать осью динамической симметрии, т.е.

$$\frac{|I_y - I_x|}{I_z} \ll 1, \quad (15)$$

где I_x, I_y и I_z – главные центральные моменты инерции относительно осей системы отсчета. Введем координаты

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \cos \varphi \sin \theta, \quad (16)$$

$$z = r \sin \varphi$$

и выполним осреднение потенциала по долготе θ . Имеем

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U|_{(16)} d\theta = -G \frac{m}{r} \left(1 + \sum_{k=2,3,4} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) + \dots \right), \quad (17)$$

причем коэффициенты разложения (17) определяются соотношениями

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{2I_{002} - I_{020} - I_{200}}{I_{000}R^2}, \quad (18)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \frac{2I_{003} - 3I_{021} - 3I_{201}}{I_{000}R^3}, \quad (19)$$

$$J_4 = \frac{1}{8} \frac{8I_{004} + 3I_{400} + 3I_{040} + 6I_{220} - 24I_{022} - 24I_{202}}{I_{000}R^4}, \quad (20)$$

$$J_5 = \frac{1}{8} \frac{8I_{005} + 15I_{401} + 15I_{041} + 30I_{221} - 40I_{203} - 40I_{023}}{I_{000}R^5}. \quad (21)$$

З а м е ч а н и е 2. Для осредненного потенциала (17) ось Oz является осью симметрии.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСОВ ШАРОВ

После того, как из предыдущих рассуждений найдены массы “приближающих тело” трех шаров, можно перейти к определению радиусов этих шаров. Шары предполагаются однородными и имеющими одинаковую плотность ρ , равную плотности тела: $\rho = m/V$, где V – объем тела. Тогда радиусы шаров находятся из соотношений

$$m_i = \frac{4}{3} \pi \rho r_i^3 \Leftrightarrow r_i = \left(\frac{3m_i}{4\pi\rho} \right)^{1/3}. \quad (22)$$

5. ТРЕХМАССОВАЯ МОДЕЛЬ АСТЕРОИДА (433) ЭРОС

Рассмотрим в качестве примера астероид (433) Эрос. Будем полагать, что поверхность астероида

представлена триангуляционной сеткой, полученной в результате обработки фотометрических измерений, а плотность заключенного в нем вещества постоянна. Из ряда имеющихся моделей, отличающихся друг от друга калибром разбиения триангуляционных элементов, выберем ту, у которой 1708 треугольных граней и 856 вершин [6, 7]. Как показано ранее [8], использование сеток с более мелкими ячейками не приводит к существенному уточнению вычисляемых величин. Известно, что для этого астероида $R = 8.41$ (км), $I_{000} = 6.665 \times 10^{15}$ (кг) и средняя плотность составляет $\rho = 2675$ (кг/м³). Кроме того, главные центральные моменты инерции астероида составляют $I_x = 9.991 \times 10^{16}$, $I_y = 4.8445 \times 10^{17}$, $I_z = 4.9246 \times 10^{17}$ (кг · км²), а также, согласно вычислениям из [9],

$$I_{200} = 4.385 \times 10^{17}, \quad I_{020} = 5.396 \times 10^{16}, \\ I_{002} = 4.595 \times 10^{16} \text{ (кг · км}^2\text{)},$$

$$\left. \begin{aligned} I_{300} &= -2.974 \times 10^{17}, & I_{102} &= 2.232 \times 10^{16}, & I_{120} &= -1.310 \times 10^{15}, \\ I_{003} &= -1.692 \times 10^{15}, & I_{012} &= 6.155 \times 10^{15}, & I_{021} &= -1.738 \times 10^{15}, \\ I_{030} &= 1.978 \times 10^{16}, & I_{102} &= 2.232 \times 10^{16}, & I_{111} &= -1.761 \times 10^{15}, \\ I_{120} &= -1.310 \times 10^{15}, & I_{201} &= 6.803 \times 10^{16}, & I_{210} &= -4.653 \times 10^{17}, \\ & & I_{300} &= -2.974 \times 10^{17}, & & \end{aligned} \right\} \text{ (кг · км}^3\text{)},$$

$$\left. \begin{aligned} I_{004} &= 6.846 \times 10^{17}, & I_{013} &= -1.539 \times 10^{15}, & I_{022} &= 2.556 \times 10^{17}, \\ I_{031} &= -1.023 \times 10^{16}, & I_{040} &= 9.802 \times 10^{17}, & I_{103} &= -1.491 \times 10^{16}, \\ I_{112} &= -3.081 \times 10^{16}, & I_{121} &= 4.277 \times 10^{16}, & I_{130} &= -1.159 \times 10^{17}, \\ I_{202} &= 2.363 \times 10^{18}, & I_{211} &= -5.325 \times 10^{16}, & I_{220} &= 3.724 \times 10^{18}, \\ I_{301} &= 2.512 \times 10^{16}, & I_{310} &= 1.375 \times 10^{18}, & I_{400} &= 5.579 \times 10^{19}, \end{aligned} \right\} \text{ (кг · км}^4\text{)},$$

$$\left. \begin{aligned} I_{005} &= -8.480 \times 10^{16}, & I_{014} &= 1.616 \times 10^{17}, & I_{023} &= -2.813 \times 10^{16}, \\ I_{032} &= 1.472 \times 10^{17}, & I_{041} &= -5.151 \times 10^{16}, & I_{050} &= 9.686 \times 10^{17}, \\ I_{104} &= 5.840 \times 10^{17}, & I_{113} &= -7.008 \times 10^{16}, & I_{122} &= 1.820 \times 10^{17}, \\ I_{131} &= 1.537 \times 10^{16}, & I_{140} &= -3.387 \times 10^{17}, & I_{203} &= 1.148 \times 10^{18}, \\ I_{212} &= -2.200 \times 10^{18}, & I_{221} &= 3.492 \times 10^{17}, & I_{230} &= -7.574 \times 10^{18}, \\ I_{302} &= 7.016 \times 10^{17}, & I_{311} &= -6.271 \times 10^{18}, & I_{320} &= -2.386 \times 10^{18}, \\ I_{401} &= 1.029 \times 10^{19}, & I_{410} &= -9.041 \times 10^{19}, & I_{500} &= -1.054 \times 10^{20}. \end{aligned} \right\} \text{ (кг · км}^5\text{)}.$$

Проверка условия (15) дает

$$\frac{|I_z - I_y|}{I_x} \approx 0.08 \ll 1.$$

Поэтому формулы (18)–(21) применимы, и, опираясь на перечисленные значения интегралов

I_{jkl} , находим

$$J_2 = 0.82423145, \quad J_3 = -0.08296512, \\ J_4 = 1.15007088, \quad J_5 = -0.34177994.$$

Из (9)–(11) определяем

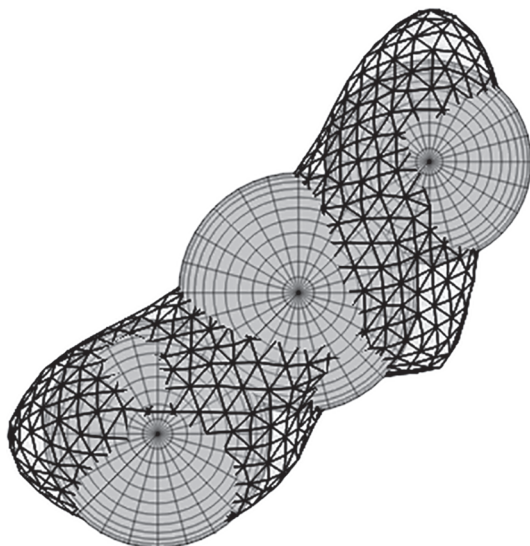


Рис. 1. Астероид (433) Эрос и приближающие его шары.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -2.86753661 \text{ (км)}, \\ \sigma_2 &= -96.26739729 \text{ (км}^2\text{)}, \\ \sigma_3 &= 117.80084113 \text{ (км}^3\text{)},\end{aligned}$$

и, решая уравнение (12), имеем

$$c_1 = -10.782, \quad c_2 = 9.114, \quad c_3 = -1.199 \text{ (км)}.$$

Тогда в силу (4)

$$\begin{aligned}m_1 &= 1.656 \times 10^{15}, \quad m_2 = 2.313 \times 10^{15}, \\ m_3 &= 2.696 \times 10^{15} \text{ (кг)},\end{aligned}$$

а в силу (22)

$$r_1 = 5.287, \quad r_2 = 5.910, \quad r_3 = 6.220 \text{ (км)}.$$

З а м е ч а н и е 3. Полученные значения масс и радиусов шаров близки к значениям

$$\begin{aligned}m_1 &= 2.001 \times 10^{15}, \quad m_2 = 2.608 \times 10^{15}, \\ m_3 &= 2.057 \times 10^{15} \text{ (кг)},\end{aligned}$$

$$r_1 = 5.631, \quad r_2 = 6.151, \quad r_3 = 5.683 \text{ (км)},$$

полученным ранее в [10] так называемым методом K -средних. Расстояния между центрами шаров

$$\begin{aligned}d_{12} &= |c_1 - c_2| = 19.896, \quad d_{23} = |c_2 - c_3| = 10.312, \\ d_{31} &= |c_3 - c_1| = 9.584 \text{ (км)}\end{aligned}$$

также близки к длинам сторон треугольника, образованного центрами шаров, определенных в [10] методом K -средних и равных

$$d_{12}^* = 17.983, \quad d_{23}^* = 9.897, \quad d_{31}^* = 8.783 \text{ (км)}.$$

Отклонения можно оценить отношениями

$$\begin{aligned}\frac{|d_{12}^* - d_{12}|}{\min(d_{12}^*, d_{12})} &\approx 0.106, \quad \frac{|d_{23}^* - d_{23}|}{\min(d_{23}^*, d_{23})} \approx 0.042, \\ \frac{|d_{31}^* - d_{31}|}{\min(d_{31}^*, d_{31})} &\approx 0.091.\end{aligned}$$

Заметим также, что в этом треугольнике тупой угол при вершине составляет 2.592524415 радиан и достаточно близок к развернутому. Примечательно, что благодаря вытянутости астероида (433) Эрос шары оказались расположенными в действительной области.

Астероид (433) Эрос в сочетании с тройкой моделирующих его шаров изображен на рис. 1.

6. ЗАМЕЧАНИЯ

Благодаря тому, что задача о движении точки в поле притяжения двух неподвижных притягивающих центров вполне интегрируема [11], идея приближения поля притяжения динамически симметричных тел полем притяжения пары точечных масс (шаров), восходящая к работам [4, 12–14], оказалась плодотворной при исследовании орбитальной динамики. В случае, когда появляющееся в таком приближении гантелеобразное тело равномерно вращается или прецессирует, также удастся получить ряд результатов, в частности, к свойствам точек либрации [15–17] (см. также [18, 19]).

В случае, когда тело приближается тремя и более точками (или шарами, как в [20–22]), динамика в окрестности небесного тела в рамках такого приближения остается малоизученной [23–25].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 22-21-00297.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
2. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
3. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.
4. Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрономический журнал*. 1963. Т. 40. Вып. 2. С. 363–372.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
6. Thomas P.C., Joseph J., Carcich B., et al. // *Icarus*. 2002. V. 155. № 1. P. 18–37.

7. *Gaskell R.W.*, Gaskell Eros Shape Model V1.1. urn:nasa:pds:gaskell.ast-eros.shape-model::1.1. NASA Planetary Data System, 2021.
8. *Буров А.А., Никонов В.И.* Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера—Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764—1776.
9. *Буров А.А., Никонов В.И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 58—62.
10. *Буров А.А., Герман А.Д., Никонов В.И.* Использование метода k -средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 4. С. 283—289.
11. *Euler L.* Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique // Mémoires de l'Acad. des sciences de Berlin (1760). P. 228—249.
12. *Кислик М.Д.* Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1960. Вып. 4. С. 3—17.
13. *Vinti J.P.* Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy // Journ. Res. Nat. Bur. Standards. 1961. V. B65. № 3. P. 169—201.
14. *Кислик М.Д.* Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1963. Вып. 13. С. 23—52.
15. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Космич. исследования. 2007. Т. 45. № 6. С. 435—442.
16. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 1. С. 42—50.
17. *Родников А.В.* Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. Вып. 2. С. 213—222.
18. *Gabern F., Koon W.S., Marsden J.E.* Spacecraft dynamics near a binary asteroid // Discrete and continuous dynamical systems. 2005. V. 2005 (Special). P. 297—306.
19. *Gabern F., Koon W.S., Marsden J.E.* Parking a Spacecraft near an Asteroid Pair // Journal of guidance, control, and dynamics. 2006. V. 29. № 3. P. 544—553.
20. *Herrera-Sucarrat E.* The full problem of two and three bodies: application to asteroids and binaries. Ph. D. Dissertation. University of Surrey, 2012.
21. *Scheeres D.J.* Stability of the Euler resting N-body relative equilibria // Celest Mech Dyn Astr. 2018. V. 130. Art № 26.
22. *Scheeres D.J.* Relative Equilibria in the Spherical, Finite Density Three-Body Problem. // Journal of Nonlinear Science. 2016. V. 26. P. 1445—1482.
23. *Никонов В.И.* Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2014. Т. 69. № 2. С. 45—51.
24. *Буров А.А., Никонов В.И.* Об устойчивости и ветвлении стационарных вращений в плоской задаче о движении взаимно гравитирующих треугольника и материальной точки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 179—196.
25. *Баландин Д.В., Никонов В.И.* О точках либрации вращающегося “комплексифицированного” треугольника // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2016. Т. 71. № 3. С. 25—31.

APPROXIMATION OF THE FIELD OF ATTRACTION OF A BODY CLOSE TO DYNAMICALLY SYMMETRIC ONE, BY THE FIELD OF ATTRACTION OF THREE BALLS

A. A. Burov^a and V. I. Nikonov^a

^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The field of attraction of a rigid body is studied. It is assumed, that the body is close to dynamically symmetric one. The problem of approximation of body's field of attraction by the field of attraction of three homogeneous balls is considered. The goal of such approximation is to provide coincidence of the terms up to the fifth order of smallness in the series expansions for gravitational potentials of the body and three balls. As an example, the approximation of asteroid (433) Eros by three balls is considered.

Keywords: gravitational field of rigid body, the approximation of gravitational field, gravitational fields of small celestial objects, asteroid (433) Eros