ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 509, с. 56–62

МЕХАНИКА

УДК 539.3

МОМЕНТНО-МЕМБРАННАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ ГИБКИХ ПЛАСТИН КАК КОНТИНУАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЛИСТА ГРАФЕНА

 Член-корреспондент Национальной академии наук Армении С. О. Саркисян[1,*]

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 25.05.2022 г.
Поступило 04.09.2022 г.
После доработки 04.09.2022 г.
Принято к публикации 11.10.2022 г.

В предположении о малости деформаций, изгибно-крутильных характеристик и углов поворота (в том числе и углов свободного поворота) элементов пластинки на основе трехмерной геометрически-нелинейной моментной теории упругости с сохранением лишь тех нелинейных членов, которые происходят от нормального перемещения (прогиба) и его производных, построена геометрически нелинейная моментно-мембранная теория упругих пластин как континуальная теория деформаций гибкого графена. Для указанной нелинейной теории упругих пластин, введением функций напряжений, разрешающие уравнения представлены также в смешанной форме: это система уравнений равновесия поперечно-изгибной деформации, составленная в деформированном состоянии пластинки, с присоединением уравнений неразрывности деформаций, выраженных через функции напряжений и функции прогиба. Для геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин установлен вариационный принцип типа Лагранжа.

Ключевые слова: гибкая пластинка, моментно-мембранная теория, лист графена, континуальная модель

DOI: 10.31857/S2686740023020098, **EDN:** UPPFNJ

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–5] обосновывается учет моментных взаимодействий между атомами двумерных наноматериалов и, одновременно, как континуальная модель деформаций этих материалов, устанавливается трехмерная моментная теория упругости. Известно также [6], что деформация кристаллических материалов на нано- и мезоуровнях происходит по схеме “сдвиг плюс поворот”. Становится актуальной задача о построении на основе моментной теории упругости линейной, а также геометрически нелинейной модели пластин или оболочек, подчиняющейся деформационной концепции “сдвиг плюс поворот”, как континуальных моделей деформации двумерных наноматериалов.

Необходимо отметить, что в работе [7], принимая за основу, что у двумерных наноматериалов межатомное взаимодействие – силовое нецентральное и моментное, заменяя эти взаимодействия соответствующей стержневой линейной моделью, построена дискретно-континентальная (стержневая) модель этих материалов. Далее, из полученной стержневой модели, осуществляя предельный переход к континуальной, как континуальная модель двумерных наноматериалов, устанавливается моментно-мембранная линейная теория упругих оболочек [8, 9]. В частности, для графена (при соответствующих деформациях) устанавливаются линейные модели плоского напряженного состояния и поперечной изгибной деформации моментно-мембранной теории упругих пластин, при этом вычисляются все упругие постоянные моментной теории упругости для материала графена. В работе [10], на основе модели поперечной изгибной деформации моментно-мембранной теории упругих пластин, изучаются некоторые прикладные задачи статического поперечного изгиба прямоугольного листа графена.

В данной работе построена моментно-мембранная модель упругой пластинки при больших прогибах, которая представляется как геометрически нелинейная модель для графена как гибкого материала.

Отметим, что общая геометрически нелинейная теория тонких оболочек в рамках моментной теории упругости построена в работе [11] (см. также обзорную работу [12]).

[1] *Ширакский государственный университет, Гюмри, Армения*
**E-mail: s_sargsyan@yahoo.com*

1. ИСХОДНЫЕ ГИПОТЕЗЫ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН. ДЕФОРМАЦИИ И ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. УСИЛИЯ И МОМЕНТЫ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. СООТНОШЕНИЯ УПРУГОСТИ

Пусть положения точек тела в первоначальном состоянии определяются их проекциями x, y, z на оси некоторой прямоугольной системы декартовых координат X, Y, Z.

Рассмотрим две бесконечно близкие материальные точки $M(x, y, z)$ и $N\left(x + dx,\ y + dy,\ z + dz\right)$ недеформированного упругого тела, которые после деформации переместятся в точки $M^*\left(\xi, \eta, \zeta\right)$ и $N^*\left(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta,\ \zeta + d\zeta\right)$. Вектор $\mathbf{M^*N^*}$ (с проекциями $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$) определяет величину и направление линейного элемента тела, величина и направление которого до деформации были заданы вектором $\mathbf{MN}$ (с проекциями dx, dy, dz). Каждое составляющее вектора $\mathbf{M^*N^*}$ связано как с вектором перемещения $\mathbf{V}\left(V_1, V_2, V_3\right)$, так и с вектором независимого поворота $\boldsymbol{\omega}\left(\omega_1, \omega_2, \omega_3\right)$. Связь $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ от вектора перемещения приведена в работе [13]. Что касается вклада в эти проекции от вектора независимого поворота, следует учесть, что в моментной теории упругости каждая точка тела рассматривается как тело-точка [14]. Имея в виду это обстоятельство, можем констатировать, что бесконечно малый вектор $\mathbf{MN}$ поворачивается как твердое тело. Следовательно, при свободном повороте вектор $\mathbf{MN}$ получает перемещение как элемент жесткого тела: $d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ (где $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$). Таким образом, для $d\xi, d\eta, d\zeta$ окончательно можем написать:

$$
\begin{aligned}
d\xi &= \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \omega_3\right)dy + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)dz, \\
d\eta &= \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \omega_3\right)dx + \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)dz, \qquad (1) \\
d\zeta &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial x} + \omega_2\right)dx + \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \omega_1\right)dy + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)dz.
\end{aligned}
$$

На основе дифференциальных соотношений (1) в трехмерной моментной геометрически нелинейной теории упругости можно определить в данной точке тела относительные удлинения элементов $\{dx, 0, 0\}$, $\{0, dy, 0\}$, $\{0, 0, dz\}$; сдвиговые деформации в плоскостях xy, yz, yz и изгибно-крутильные характеристики деформации.

В дальнейшем рассматриваемое тело будем считать пластинкой толщиной $2h$ (со срединной плоскостью $z = 0$).

Геометрически нелинейную теорию пластин по моментной теории упругости будем строить в предположении, что удлинения, сдвиги и углы поворота элементов пластинки малы по сравнению с единицей; будем сохранять лишь те нелинейные члены [13], которые происходят только от нормального перемещения V_3 и его производных.

Для приведения трехмерной задачи геометрически нелинейной моментной теории упругости к двумерной (моментно-мембранной теории пластин) будем применять следующие гипотезы [8, 9]:

1. Компоненты вектора перемещения и вектора независимого поворота не зависят от поперечной координаты z, т.е.

$$
\begin{gathered}
V_i = u_i\left(x, y\right), \quad i = 1, 2; \quad V_3 = w\left(x, y\right), \\
\omega_k = \Omega_k\left(x, y\right), \quad k = 1, 2, 3.
\end{gathered} \qquad (2)
$$

2. Пренебрегаются напряжения σ_{33}, σ_{31}, σ_{32} и моментные напряжения μ_{33}, μ_{31}, μ_{32}, соответственно, относительно напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{13}, σ_{23} и моментных напряжений μ_{11}, μ_{22}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{13}, μ_{23}.

На основе кинематической гипотезы (2), используя соответствующие соотношения трехмерной теории, для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений геометрически нелинейной моменто-мембранной теории упругих пластин, получим:

$$
\begin{gathered}
\gamma_{11} = \Gamma_{11}(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\
\gamma_{22} = \Gamma_{22}(x, y) = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\
\gamma_{12} = \Gamma_{12}(x, y) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \Omega_3\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (3) \\
\gamma_{21} = \Gamma_{21}(x, y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \Omega_3\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}, \\
\chi_{13} = k_{13}\left(x, y\right) = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \quad \chi_{23} = k_{23}\left(x, y\right) = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y};
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\gamma_{13} = \Gamma_{13}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2, \\
\gamma_{23} = \Gamma_{23}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1, \\
\chi_{11} = k_{11}\left(x, y\right) = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \chi_{22} = k_{22}\left(x, y\right) = \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, \qquad (4) \\
\chi_{12} = k_{12}\left(x, y\right) = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \quad \chi_{21} = k_{21}\left(x, y\right) = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}.
\end{gathered}
$$

Отметим, что полученные выше результаты (2)–(4) представляют собой выражения перемещений и свободных поворотов, деформаций и изгибов-кручений моментно-мембранной теории упругих гибких пластин в объемной области трехмерной пластинки, в частности, и в области ее срединной плоскости.

Напряженное состояние гибкой пластинки в пределах сделанных допущений может рассматриваться как результат наложения двух состояний: одно из них соответствует напряжениям и моментным напряжениям, равномерно распределенным по толщине пластинки, которое отвечает плоскому напряженному состоянию, а второе отвечает состоянию поперечного изгиба (т.е. напряжениям и моментным напряжениям, также равномерно распределенным по толщине пластинки). Плоскому напряженному состоянию отвечают напряжения σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{21} и моментные напряжения μ_{13}, μ_{23}; напряженному состоянию поперечного изгиба отвечают напряжения σ_{13}, σ_{23} и моментные напряжения μ_{11}, μ_{22}, μ_{12}, μ_{21}.

В теории пластин вместо напряжений и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами, отнесенными к единице длины соответствующей координатной линии x и y срединной плоскости:

$$
\begin{gathered}
T_{ii} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ii} dz = 2\sigma_{ii} h, \quad S_{ij} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij} dz = 2\sigma_{ij} h, \\
L_{i3} = \int_{-h}^{h} \mu_{i3} dz = 2\mu_{i3} h, \quad N_{i3} = \int_{-h}^{h} \sigma_{i3} dz = 2\sigma_{i3} h, \\
L_{ii} = \int_{-h}^{h} \mu_{ii} dz = 2\mu_{ii} h, \\
L_{ij} = \int_{-h}^{h} \mu_{ij} dz = 2\mu_{ij} h, \quad i \neq j = 1, 2.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Обозначим внешнюю силу, нормальную к срединной плоскости и приходящуюся на единицу ее площади, через $q_z = q_z(x, y)$.

Рассматривая условия равновесия элемента пластинки $(dx \times dy)$ в плоскости xy, находим для усилий и моментов три уравнения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + S_{12} - S_{21} = 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Условия равновесия моментов относительно осей y и x дают еще два уравнения:

$$
\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} - \mathrm{N}_{13} = 0, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + \mathrm{N}_{23} = 0. \tag{7}
$$

При составлении уравнения равновесия сил, нормальных к срединной плоскости, будем учитывать, что в связи с изгибом пластинки усилия $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ образуют проекции на ось z.

Так, усилия $T_{11}dy$ и $\left(T_{11} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x} dx\right) dy$, приложенные к сторонам элемента $x = \mathrm{const}$ и $x + dx = \mathrm{const}$, поворачиваются соответственно на угол $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$ и дают равнодействующую проекций на ось $z - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{11} \frac{\partial w}{\partial x}\right) dxdy$.

Подобные выражения находим для других усилий: T_{22}, S_{12}, S_{21}. Суммируя, получим

$$
\frac{\partial\left(T_{11} \frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(T_{22} \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(S_{12} \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(S_{21} \frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial y}.
$$

Это выражение на основании первых двух уравнений равновесия из (6) получает вид

$$
T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{8}
$$

Тогда в дополнение к уравнениям равновесия (6), (7) получаем шестое уравнение равновесия:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathrm{N}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}_{23}}{\partial y} + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
+ S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_z = 0.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Таким образом, в геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин уравнениями равновесия будут уравнения (6), (7), (9).

Так как все рассуждения будем вести в рамках физически линейных соотношений, следовательно, физические соотношения упругости геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин будут оставаться такими, какими они выражались в соответствующей линейной теории [8, 9]:

$$
\begin{gathered}
T_{ii} = \frac{2\mathrm{E}h}{1 - \nu^2}\left(\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}\right), \\
S_{ij} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{ji}, \\
L_{i3} = 2Bhk_{i3},
\end{gathered} \tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{N}_{i3} = 2G^* h \Gamma_{13}, \\
L_{ii} = 2h(\gamma + \varepsilon)\left[k_{ii} + \frac{1}{2}\upsilon_m\left(2k_{ii} + k_{jj}\right)\right], \\
L_{ij} = 2h(\gamma + \varepsilon)\left(k_{ij} + \frac{1}{2}\upsilon_m k_{ji}\right),
\end{gathered} \tag{11}
$$

где

$$i \neq j = 1,2, \quad B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}, \qquad G^* = \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}, \quad \upsilon_m = 2\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}, \tag{12}$$

$E, \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}, \alpha, \gamma, \varepsilon, \beta = \dfrac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}2\gamma$ [7] – упругие постоянные моментной теории упругости. Отметим, что для двумерных наноматериалов, в частности для графена, используются не указанные упругие постоянные, а следующие величины [5, 7]:

$$E_* = 2Eh, \quad \mu_* = 2\mu h, \quad \alpha_* = 2\alpha h, \qquad \gamma_* = 2\gamma h, \quad \varepsilon_* = 2\varepsilon h, \tag{13}$$

а также

$$D_* = 2G^*h, \quad D' = 2(\gamma+\varepsilon)h, \quad B_* = 2Bh. \tag{14}$$

Таким образом, построена определяющая система уравнений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин. Это уравнения равновесия (6), (7), (9), геометрические соотношения (3), (4) и физические соотношения упругости (10), (11). Всего 30 уравнений; неизвестных функций тоже 30 (u_1, u_2, w, Ω_1, Ω_2, Ω_3; Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{12}, Γ_{21}, k_{13}, k_{23}; Γ_{13}, Γ_{23}, k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}; T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}, L_{13}, L_{23}; N_{13}, N_{23}, L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}). Определяющая система уравнений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин 12-го порядка, с шестью граничными условиями на каждом краю срединной плоскости (s) пластинки. (Ниже эти граничные условия будем получать после установления вариационного принципа возможных перемещений для этой теории.)

Если соотношения упругости (10), (11) и геометрические соотношения (3), (4) подставить в уравнения равновесия (6), (7), (9), приходим к разрешающей системе уравнений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин относительно величин u_1, u_2, w, Ω_1, Ω_2, Ω_3.

2. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ

Судя по структуре выражений (3), тангенциальные деформации и изгибы-кручения должны быть связаны между собой определенными зависимостями: в эти выражения входят одни и те же перемещения u_1, u_2, w и независимый поворот Ω_3. Для установления этих зависимостей будем исключить из выражений Γ_{11} и Γ_{21} перемещение u_1 и, аналогично, из выражений Γ_{22} и Γ_{12} – перемещение u_2. Тогда, с учетом формул для k_{13}, k_{23} из (3), после некоторых преобразований получим соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial y} - k_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \Gamma_{22}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial y} - k_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{15}$$

(можно формально присоединить к этим соотношениям также $\dfrac{\partial k_{13}}{\partial y} = \dfrac{\partial k_{23}}{\partial x}$, которое выполняется тождественно).

Соотношения (15) будут представлять собой уравнения совместности или неразрывности деформаций в моментно-мембранной геометрически нелинейной теории упругих пластин.

Далее введем функции напряжений. Рассмотрим уравнения равновесия (6). Следуя работам [15–17], введем функции, аналогичные функции напряжений Эри в плоской задаче классической теории упругости:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \quad S_{21} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad S_{12} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \\ &\mathrm{T}_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \quad L_{13} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad L_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{16}$$

В этом случае первые два уравнения (6) тождественно удовлетворяются. Подставляя (16) в третье уравнение (6), получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0,$$

которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi_1\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_2 - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right). \tag{17}$$

Введем функцию φ по правилу

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \phi_2 - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{18}$$

Тогда третье уравнение (6) также будет удовлетворяться тождественно.

Выразим через φ и ψ усилия T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} и моменты L_{13}, L_{23}, получим

$$T_{11}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},\quad T_{22}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},$$
$$S_{12}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},\quad S_{21}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\tag{19}$$
$$L_{13}=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad L_{23}=\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Таким образом, для усилий T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} и моментов L_{13}, L_{23}, принимая представления (19), будут тождественно удовлетворены все три уравнения равновесия (6).

Из трех оставшихся уравнений равновесия (7), (9) с учетом соотношений упругости (11) и геометрических соотношений (4) получим систему вида:

$$\Delta w+\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}\right)+\frac{1}{D_*}\left(T_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+T_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+S_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+S_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\frac{q_z}{D_*}=0,$$
$$\Delta\Omega_1+\upsilon_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}\right)+\frac{D_*}{D'}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\Omega_1\right)=0,\tag{20}$$
$$\Delta\Omega_2+\upsilon_m\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}\right)-\frac{D_*}{D'}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\Omega_2\right)=0.$$

Если иметь в виду соотношения (19), получим, что система (20) содержит пять неизвестных функций: w, Ω_1, Ω_2, φ, ψ. Для решения задачи рассмотрим уравнение неразрывности (совместности) деформаций (15) (при этом необходимо из соотношений упругости (10) Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{12}, Γ_{21}, k_{13}, k_{23} выразить через усилия T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} и моменты L_{13}, L_{23}, а для последних применить соотношения (19)), в результате получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}[l_*^2\Delta-1]\psi-\frac{B_*}{\mathrm{E}_*}\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial y}=$$
$$=\frac{1}{2}B_*\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[l_*^2\Delta-1]\varphi+\frac{B_*}{\mathrm{E}_*}\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x}=\tag{21}$$
$$=\frac{1}{2}B_*\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

где

$$l_*^2=\frac{B_*(\mu_*+\alpha_*)}{4\mu_*\alpha_*}.\tag{22}$$

Уравнения (20), (21) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений (в смешанной форме) геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин, т.е. систему уравнений геометрически нелинейной континуальной теории деформаций листа графена.

Легко убедиться, что если в уравнениях (20), (21) пренебречь нелинейными членами, то получим $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$ (следовательно, $T_{11}=T_{22}=$ $=S_{12}=S_{21}=0$), и система (20) переходит к системе уравнений поперечного изгиба моментно-мембранной линейной теории упругих пластин [8, 9].

3. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЛАГРАНЖА. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Согласно принципу возможных перемещений равновесное положение системы характеризуется равенством

$$\delta U=\delta A,\tag{23}$$

где δA – работа внешних сил и моментов на соответствующих возможных обобщенных перемещениях, δU – вариация потенциальной энергии деформации пластинки.

Имея в виду, что на основе принятых кинематических гипотез перемещение и свободные повороты, следовательно, деформации, изгиб-кручения, напряжения и моментные напряжения не зависят от координаты z, для вариации потенциальной энергии деформации прямоугольной пластинки $a\times b$ (учитывая принятые статические гипотезы и соотношения (3)–(5)) получим

$$\delta U=\iint_{(s)}\left(\mathrm{T}_{11}\delta\Gamma_{11}+\mathrm{T}_{22}\delta\Gamma_{22}+S_{12}\delta\Gamma_{12}+S_{21}\delta\Gamma_{21}+\right.$$
$$+L_{13}\delta k_{13}+L_{23}\delta k_{23}+N_{13}\delta\Gamma_{13}+N_{23}\delta\Gamma_{23}+\tag{24}$$
$$\left.+L_{11}\delta k_{11}+L_{22}\delta k_{22}+L_{12}\delta k_{12}+L_{21}\delta k_{21}\right)dxdy.$$

Вычислим работу внешних сил и моментов на обобщенных возможных перемещениях. Учитывая гипотезы построения геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин, для работы внешних контурных усилий и моментов приложенных на гранях срединной плоскости пластинки $x=0,a$ и $y=0,b$, на обобщенных возможных перемещениях δu_1, δu_2, δw, $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$, получим

$$\delta A=\int_0^b\left[\bar{T}_{11}\delta u_1+\bar{S}_{12}\delta u_2+\right.$$
$$+\left(\bar{N}_{13}+\bar{T}_{11}\frac{\partial w}{\partial x}+\bar{S}_{12}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta w+$$

$$+ \bar{L}_{13}\delta\Omega_3 + \bar{L}_{11}\delta\Omega_1 + \bar{L}_{12}\delta\Omega_2 \Big] dy \Big|_{x=0}^{x=a} +$$

$$+ \int_0^a \Big[\bar{S}_{21}\delta u_1 + \bar{T}_{22}\delta u_2 + \tag{25}$$

$$+ \left(\bar{N}_{23} + \bar{S}_{21}\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{T}_{22}\frac{\partial w}{\partial y} \right)\delta w +$$

$$+ \bar{L}_{23}\delta\Omega_3 + \bar{L}_{21}\delta\Omega_1 + \bar{L}_{22}\delta\Omega_2 \Big] dx \Big|_{y=0}^{y=b} +$$

$$+ \iint_{(s)} q_z \delta w dx dy.$$

После подстановки выражений (24), (25) в (23) вариационное уравнение принципа возможных перемещений примет свой окончательный вид:

$$\int_0^a \big[(S_{21} - \bar{S}_{21})\delta u_1 + (T_{22} - \bar{T}_{22})\delta u_2 +$$

$$+ (N_{23}^* - \bar{N}_{23}^*)\delta w + (L_{23} - \bar{L}_{23})\delta\Omega_3 +$$

$$+ (L_{21} - \bar{L}_{21})\delta\Omega_1 + (L_{22} - \bar{L}_{22})\delta\Omega_2 \big] dx \Big|_{y=0}^{y=b} +$$

$$+ \int_0^b \big[(T_{11} - \bar{T}_{11})\delta u_1 + (S_{12} - \bar{S}_{12})\delta u_2 +$$

$$+ (N_{13}^* - \bar{N}_{13}^*)\delta w + (L_{13} - \bar{L}_{13})\delta\Omega_3 +$$

$$+ (L_{11} - \bar{L}_{11})\delta\Omega_1 + (L_{12} - \bar{L}_{12})\delta\Omega_2 \big] dy \Big|_{x=0}^{x=a} =$$

$$= \iint_{(s)} \left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} \right)\left(\delta u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\delta w \right) + \right. \tag{26}$$

$$+ \left(\frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial y} \right)\left(\delta u_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\delta w \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + S_{12} - S_{21} \right)\delta\Omega_3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} + T_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + S_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_z \right)\delta w + \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + N_{23} \right)\delta\Omega_1 +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} - N_{13} \right)\delta\Omega_2 \right] dx dy = 0,$$

где

$$N_{13}^* = N_{13} + T_{11}\frac{\partial w}{\partial x} + S_{12}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$N_{23}^* = N_{23} + S_{21}\frac{\partial w}{\partial x} + T_{22}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{27}$$

Из вариационного уравнения (26) принципа возможных перемещений следуют уравнения равновесия (6), (7), (9) и следующие граничные условия на контурных линиях срединной плоскости пластинки:

$$\begin{gathered} T_{11} = \bar{T}_{11}, \quad S_{12} = \bar{S}_{12}, \quad N_{13}^* = \bar{N}_{13}^*, \quad L_{13} = \bar{L}_{13}, \\ L_{11} = \bar{L}_{11}, \quad L_{12} = \bar{L}_{12}, \quad \text{на} \quad x = 0, \quad a, \\ S_{21} = \bar{S}_{21}, \quad T_{22} = \bar{T}_{22}, \quad N_{23}^* = \bar{N}_{23}^*, \quad L_{23} = \bar{L}_{23}, \\ L_{21} = \bar{L}_{21}, \quad L_{22} = \bar{L}_{22}, \quad \text{на} \quad x = 0, \quad b. \end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, для геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин установлено вариационное уравнение типа Лагранжа (это уравнение (23) с учетом выражений (24) и (25)). На основе этого вариационного уравнения, для решения краевых задач геометрически нелинейной моментно-мембранной теории пластин, можно применять известные вариационные методы, а также разрабатывать вариант, применяя метод конечных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена геометрически нелинейная моментно-мембранная теория упругих пластин как континуальная теория деформаций листа гибкого графена. Установлены определяющая система уравнений (уравнения равновесия, физические соотношения упругости и геометрические соотношения), а также уравнения совместности деформаций указанной нелинейной теории упругих пластин. Введено понятие функций напряжений, разрешающие уравнения геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин представлены в смешанной форме: это система уравнений равновесия поперечно-изгибной деформации, составленная в деформированном состоянии пластинки, с присоединением к этой системе уравнения неразрывности деформаций, выраженное через функции напряжений. На основе применения принципа возможных перемещений составлены уравнения равновесия в вариационной форме, а также установлены граничные условия геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-2C093.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д.* Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // ДАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 764–768.

2. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток с учетом моментных взаимодействий на микроуровне // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595–615.

3. *Беринский И.Е., Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Применение моментного взаимодействия к построению устойчивой модели кристаллической решетки графена // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 5. С. 6–16.

4. *Кузькин В.А., Кривцов А.М.* Описание механических свойств графена с использованием частиц с вращательными степенями свободы // ДАН. 2011. Т. 440. № 4. С. 476–479.

5. Современные проблемы механики. Механические свойства ковалентных кристаллов. / Беринский И.Е. [и др.]; под общ. ред. А.М. Кривцова, О.С. Лобода. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. 160 с.

6. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Егорушкин В.Е.* Основы физической мезомеханики структурно-неоднородных сред // Известия РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 8–29.

7. *Саркисян С.О.* Стержневая и континуально-моментная модели деформаций двумерных наноматериалов // Физ. мезомех. 2022. Т. 25. № 2. С. 109–121.

8. *Саркисян С.О.* Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией “сдвиг плюс поворот” // Физ. мезомех. 2020. Т. 23. №4. С. 13–19.

9. *Саркисян С.О.* Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 1. С. 38–47.

10. *Саркисян С.О.* Поперечный изгиб листа графена по моментно-мембранной континуальной теории упругих пластин / Монография “Актуальные проблемы прочности”. Минск: НАН Беларуси, 2020. Глава 8. С. 99–105.

11. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.

12. *Eremeyev V., Altenbach H.* Basics of Mechanics of Micropolar Shells / In: Shell-like Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev. Springer, 2017. V. 572. P. 63–112.

13. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: ГУТТЛ, 1948. 210 с.

14. *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340 с.

15. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

16. *Миндлин Р.Д.* Влияния моментных напряжений на концентрации напряжений // Сб. пер. иностр. статей: “Механика”. 1964. Вып. 4 (88). С. 115–128.

17. *Nowacki W., Olszak W.* Micropolar Elasticity. Wien: Springer-Verlag, 1974. 168 p.

MOMENT-MEMBRANE THEORY OF ELASTIC FLEXIBLE PLATES AS A CONTINUAL GEOMETRICALLY NONLINEAR THEORY OF A GRAPHENE SHEET

Corresponding Member of NAS of Armenia S. H. Sargsyan[a]

[a] *State University of Shirak, Gyumri, Armenia*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

In the present work, under the assumption of smallness of deformations, bending-torsional characteristics and angles of rotation (including the angles of free rotation) of the elements of the plate, based on the three-dimensional geometrically-nonlinear moment theory of elasticity, preserving only those nonlinear terms, that come from normal displacement (deflection) and its derivatives, a geometrically nonlinear moment-membrane theory of elastic plates is constructed as a continual theory of deformations of a flexible graphene. For the indicated nonlinear theory of elastic plates, by introducing stress functions, the resolving equations are presented also in a mixed form: these are the system of equilibrium equations for transverse-bending deformation, compiled in the deformed state of the plate, and deformations continuity equations, expressed in stress functions and deflection functions. For the geometrically nonlinear moment-membrane theory of elastic plates Lagrange-type variational principle is established.

Keywords: flexible plate, moment-membrane theory, graphene sheet, continual model