ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2023, том 511, с. 41–44

МЕХАНИКА

УДК 62-50

О НАИХУДШЕМ ВОЗМУЩЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРА С КВАДРАТИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ПОСРЕДСТВОМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ С ЗАДАННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

 Член-корреспондент РАН Н. Н. Болотник[1,*], В. А. Корнеев[1,]**

Поступило 15.02.2023 г.
После доработки 10.05.2023 г.
Принято к публикации 11.05.2023 г.

Поставлена задача о наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием, в которой роль возмущения играет внешняя сила, приложенная к осциллятору. Предполагается, что эта сила действует в одном направлении, ее интеграл по времени задан, и в начальный момент времени осциллятор покоится в положении равновесия. Требуется найти закон изменения возмущающей силы, при котором максимум (по времени) модуля смещения тела осциллятора от положения равновесия максимален. Найдено и исследовано наихудшее возмущение “прямоугольного профиля”, при котором возмущающая сила постоянна на начальном интервале времени и равна нулю вне этого интервала.

Ключевые слова: осциллятор с квадратичным демпфированием, оптимальное управление, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S2686740023040028, **EDN:** VRGIYJ

ВВЕДЕНИЕ

Задача, рассматриваемая в сообщении, инициирована работами [1, 2], посвященными оптимальной гарантированной защите размещенных на подвижном основании объектов от ударов, которым может подвергаться основание. Достаточно полное представление о методах и подходах к решению проблемы противоударной изоляции можно получить из работ [1–6], написанных в разные годы. Наиболее простыми и распространенными пассивными противоударными изоляторами являются изоляторы с линейной пружиной и демпфером с линейной или квадратичной характеристикой. Движение изолируемого объекта относительно основания описывается в этом случае уравнением

$$m\ddot{x} + k\left|\dot{x}\right|^n \operatorname{sign}\dot{x} + cx = v(t),$$
$$v = -mw(t), \quad n = 1, 2. \tag{1}$$

Здесь координата x определяет положение объекта относительно основания, m — масса объекта, k и c — положительные коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, $w(t)$ — ускорение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, приобретенное в результате удара. Функция $v(t)$ задает внешнее возмущение. В теории противоударной изоляции величина

$$u(x, \dot{x}, t) = -k\left|\dot{x}\right|^n \operatorname{sign}\dot{x} - cx$$

трактуется как управляющая сила, приложенная изолятором к объекту. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение колебаний демпфированного осциллятора под действием внешней силы $v(t)$. Рассмотрим возмущения $v(t)$ в классе знакопостоянных функций с ограниченным интегралом по времени:

$$V = \left\{ v(t)\colon v(t) \ge 0, \int_0^\infty v(\tau)d\tau \le v_0 \right\}, \tag{2}$$

где v_0 — заданная положительная величина.

В [1] рассмотрена следующая

З а д а ч а 1. Пусть $v(t) \in V$ и пусть в начальный момент времени $t = 0$ осциллятор находится в положении равновесия и покоится ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$). Предположим, что сила, действующая на тело осциллятора со стороны пружины и демпфера, ограничена по абсолютной величине. Определить параметры k и c, гарантированно доставляющие минимум максимуму модуля отклонения тела ос-

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: bolotnik@ipmnet.ru*
***E-mail: korneev@ipmnet.ru*

циллятора от положения равновесия. В математической формулировке запишем задачу так:

$$\max_{v\in V} J_1(v) \to \min_{k\ge 0, c\ge 0}, \quad J_1(v) = \max_{t\in[0,\infty)} |x_v(t;m,k,c)|,$$

$$\max_{v\in V} J_2(v) \le A, \quad J_2(v) =$$

$$= \max_{t\in[0,\infty)} \left| k\dot{x}_v(t;m,k,c)|^n \operatorname{sign}\dot{x}_v(t;m,k,c) + cx_v(t;m,k,c)\right|.$$

Здесь $x_v(t;m,k,c)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, которое зависит от параметров m, k и c системы и от внешнего возмущения $v(t)$; A – заданная положительная постоянная. Решение задачи 1 подразумевает решение задач о наихудшем возмущении по отношению к величинам $J_1(v)$, $J_2(v)$, характеризующим качество защиты противоударного изолятора. Под наихудшим возмущением понимается функция $v(t) \in V$, которая обеспечивает максимум для соответствующего функционала, $J_1(v)$ или $J_2(v)$.

Установлено [1, 2], что для линейного осциллятора ($n = 1$) наихудшим возмущением из класса (2) по отношению к обоим функционалам $J_1(v)$ и $J_2(v)$ является мгновенный удар, моделируемый дельта-функцией Дирака, умноженной на приобретенный в результате удара импульс: $v(t) = v_0\delta(t)$.

Реализуемость предельных возможностей защиты объекта от мгновенного удара, задаваемого выражением $v(t) = v_0\delta(t)$, с помощью осциллятора с квадратичным демпфированием доказана в [1, 2]. Выбор коэффициентов k и c согласно формулам $k = m^2A/v_0^2$, $c = 2mA^2/v_0^2$ доставляет абсолютный минимум максимального модуля относительного смещения изолируемого объекта $J_1(v)$ при ограничении $J_2(v) \le A$. Значения функционалов $J_1(v)$ и $J_2(v)$ при этих значениях k и c определяются формулами $J_1 = v_0^2/2mA$, $J_2 = A$.

Решение задачи о наихудшем возмущении позволяет ответить на вопрос, является ли мгновенный удар максимально допустимого импульса наихудшим возмущением для осциллятора с нелинейными характеристиками и применимы ли полученные результаты в этом случае. Эта задача интересна и с математической точки зрения как задача оптимального управления нелинейной системой с неаддитивным функционалом.

Задачи построения наихудшего возмущении по отношению к функционалам $J_1(v)$, $J_2(v)$ для осциллятора с квадратичным демпфированием значительно труднее аналогичных задач для линейного осциллятора и до сих пор не решены. В данной работе для осциллятора с квадратичным демпфированием строится наихудшее возмущение по отношению к максимальному модулю отклонения осциллятора от положения равновесия в классе возмущений, постоянных на начальном интервале и равных нулю вне этого интервала.

Сравнение полученного наихудшего возмущения с дельта-возмущением приводит к выводу, что, в отличие от линейного осциллятора, мгновенный удар, сообщающий осциллятору импульс v_0, не является наихудшим возмущением в рассматриваемом классе функций, а следовательно, и в более широком классе функций.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Задача 1. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + cx = v(t), \qquad m > 0, \quad k > 0, \quad c > 0 \tag{3}$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \tag{4}$$

найти функцию $v(t) = v_b(t)$ из однопараметрического класса V_b возмущений “прямоугольного” профиля вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t\in[0, v_0/b], \\ 0, & t > v_0/b, \end{cases} \qquad b > 0, \tag{5}$$

которая максимизирует функционал

$$J_1(v) = \max_{t\in[0,\infty)} |x_v(t)|. \tag{6}$$

Здесь b – параметр, определяемый из условия максимизации функционала J_1, координата x описывает отклонение тела осциллятора от положения равновесия, m – масса тела осциллятора, k и c – коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, внешняя сила v приложена к осциллятору и рассматривается как возмущение, v_0 – заданный импульс внешнего воздействия, $x_v(t)$ – решение уравнения (3) при начальных условиях (4) и заданном возмущении $v = v_b(t)$.

Для уменьшения числа определяющих параметров введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$x' = \frac{\sqrt{mc}}{v_0}x, \quad t' = \sqrt{\frac{c}{m}}t, \quad v'(t') = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}}v\left(\sqrt{\frac{m}{c}}t'\right), \qquad k' = \frac{v_0}{m\sqrt{mc}}k, \quad b' = b\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{7}$$

После замены переменных (7) в формулах (3)–(6) и опускания штрихов получаем формулы того же вида, в которых $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$. Далее используются только безразмерные переменные. Доказано следующее

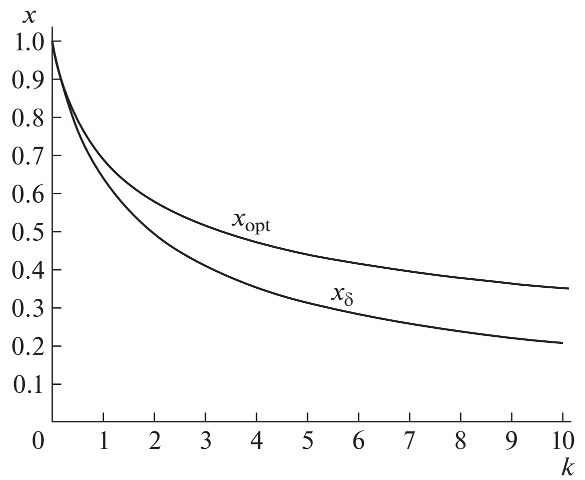

Рис. 1. Зависимость наибольшего смещения x_{opt} и смещения x_δ при дельта-возмущении от параметра k.

Утверждение. Для возмущений класса V_b и возмущения в виде дельта-функции $v(t) = \delta(t)$ максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обнуления его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t\in[0,\infty)}|x_v(t)| = x_v(t_*), \quad \dot{x}_v(t_*) = 0,$$
$$\dot{x}_v(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, t_*).$$

Поэтому далее ограничимся решением уравнения (3) с начальными условиями (4) при $v(t)$, заданным или выражением (5), или равенством $v(t) = \delta(t)$, на интервале времени $[0, t_*]$, где $t_* > 0$ – момент первого после начала движения обращения в нуль скорости осциллятора. На интервале $[0, t_*]$ скорость $\dot{x}$ неотрицательна, уравнение (3) упрощается и принимает в безразмерных переменных вид

$$\ddot{x} + k\dot{x}^2 + x = v(t).$$

Для дельта-возмущения $v(t) = \delta(t)$ скорость $\dot{x}$ обращается в нуль при значении $x = x_\delta(k)$, задаваемом формулой

$$x_\delta(k) = \frac{1 + \text{LambertW}((2k^2 - 1)e^{-1})}{2k}. \tag{8}$$

Здесь $\text{LambertW}(z)$ – функция Ламберта, обратная функции $\xi(z) = ze^z$, $z \in (-\infty, +\infty)$ [7]. Мы ограничиваемся значениями $z, z \geq -1/e$ и условием $\text{LambertW}(z) \geq -1$, тогда $\text{LambertW}(z)$ будет однозначной функцией (верхняя ветвь функции Ламберта). Функция $x_\delta(k)$ монотонно убывает. При этом $x_\delta(0) = 1$, $\lim_{k\to+\infty} x_\delta(k) = 0$.

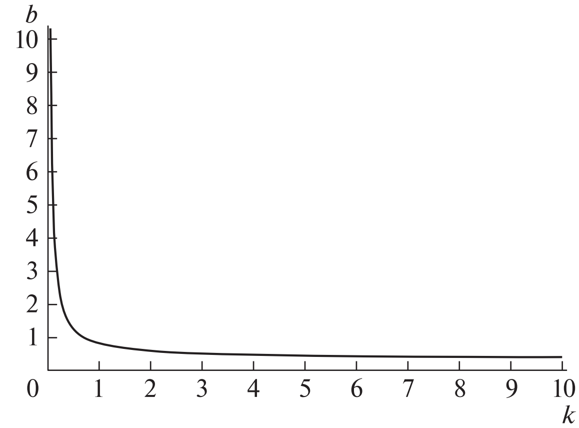

Рис. 2. Зависимость оптимального параметра b при наибольшем смещении от параметра k.

Для величины $J_1(v)$ из (6) введем обозначение $J(k,b) = J_1(v)$, указывающее на зависимость этой величины от параметров k, b. На языке Matlab была создана программа расчета наибольшего отклонения (смещения) $J(k,b)$ для заданных величин b, k, затем проведена максимизация смещения по величине b при заданном k и получена зависимость $b(k)$, которая позволила вычислить соответствующие значения наибольшего отклонения $x(k)$ и времени его достижения $t(k)$. Тем самым были численно получены зависимости $x(k)$, $b(k)$ и $t(k)$, характеризующие поведение изучаемого осциллятора при наихудшем возмущении. На рис. 1 приведены два графика. Нижний график x_δ описывает смещение при дельта-возмущении, даваемое формулой (8). Верхний график x_{opt} описывает смещение $x(k)$, полученное для наихудшего возмущения $v_b(t)$ из (5) при $b = b(k)$. На

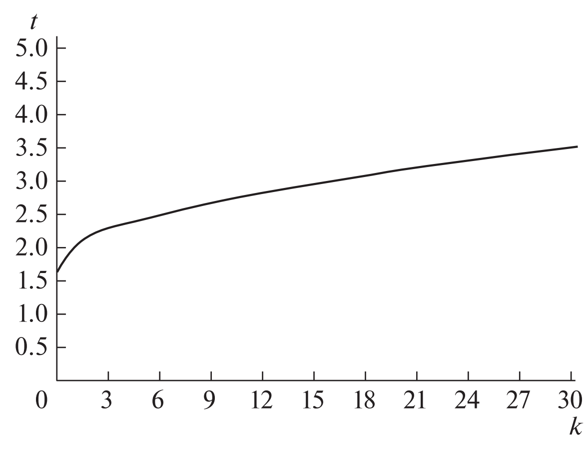

Рис. 3. Время t достижения наибольшего смещения в зависимости от параметра k.

рис. 2 приведено значение параметра $b = b(k)$, определяющее наихудшее возмущение $v_b(t)$ из (5). На рис. 3 приведено значение времени достижения первого максимума смещения, отвечающего наихудшему возмущению $v_b(t)$ из (5) при $b = b(k)$. Заметим, что при $k \to +\infty$

$$b(k) \to 0, \quad t(k) \to +\infty, \quad x_{opt}(k) \to 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для осциллятора с квадратичным демпфированием поставлена задача о выборе параметра возмущения прямоугольного профиля (постоянной силы, действующей на начальном интервале), обеспечивающего наибольшее смещение осциллятора от положения равновесия. Установлено, что первый локальный максимум смещения является искомым максимальным смещением. Численно построена зависимость параметра внешней силы, обеспечивающего наибольшее смещение, от параметров осциллятора. Получены величины наибольшего смещения и времени его достижения в зависимости от параметров осциллятора.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6) при частичном финансировании РФФИ (грант № 21-51-12004 ННИОа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
2. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
3. *Sevin E., Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
4. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Hoboken (NJ): Wiley and Sons, Inc., 2010. 286 p.
5. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
6. *Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N., Brennan M., Tang B.* Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Applied Mechanics Reviews. 2019. V. 71. № 6. https://doi.org/10.1115/1.4044190
7. *Mezo I.* The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2022. 252 p.

ON THE WORST DISTURBANCE OF AN OSCILLATOR WITH QUADRATIC-LAW DAMPING BY MEANS OF A FORCE WITH GIVEN INTEGRAL

Corresponding Member of the RAS N. N. Bolotnik[a] and V. A. Korneev[a]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

A worst disturbance problem for an oscillator with quadratic-law damping is stated. The role of the disturbance is played by an external force applied to the oscillator. It is assumed that this force acts in one direction, that the integral of this force with respect to time is given, and that at the initial time instant the oscillator is resting in the equilibrium position. It is required to find a time history of the disturbing force that maximizes the maximum (with respect to time) of the absolute value of the displacement of the oscillator's body from the equilibrium position. The worst disturbance is found and investigated from among rectangular pulses under which the disturbing force is constant on an initial time interval and is equal to zero outside of this interval.

Keywords: oscillator with quadratic-law damping, optimal control, worst disturbances