

УДК 532.529.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

© 2023 г. А. Г. Петров^{1,*}

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 19.01.2023 г.

Поступило 19.01.2023 г.

После доработки 13.05.2023 г.

Принято к публикации 15.05.2023 г.

Исследуются вынужденные нелинейные колебания газового пузырька в жидкости, когда частота колебаний внешнего давления жидкости равна собственной частоте колебаний пузырька (резонанс). Методом осреднения выведена простая формула зависимости амплитуды колебаний газового пузырька от амплитуды внешнего давления и теплофизических характеристик газа и вязкости жидкости. Показано ее хорошее согласие с численными расчетами до значения амплитуды колебаний радиуса пузырька, сравнимого с его равновесным значением.

Ключевые слова: газовые пузырьки, вынужденные нелинейные колебания, гомобаричность, жидкость

DOI: 10.31857/S2686740023040119, **EDN:** VSXFSH

Задача о колебаниях газового пузырька в жидкости под действием периодически меняющегося давления имеет долгую историю. К настоящему времени этот раздел механики жидкости и газа является классическим и представлен в сотнях статей и ряде монографий [1–4]. М. Миннаерт [5] экспериментально и теоретически изучил зависимость частоты свободных колебаний газового пузырька в жидкости. Им получена формула, связывающая частоту свободных колебаний пузыря с плотностью жидкости, давлением, радиусом пузыря в равновесном состоянии и показателем адиабаты газа γ . В [6] исследованы вынужденные колебания пузыря под воздействием внешних пульсаций давления в линейном приближении. При этом предполагалось, что давление внутри пузыря однородно (допущение о гомобаричности). В [7, 8] учитываются следующее за линейным (квадратичное) приближение, а также теплофизические свойства жидкости и газа. В [9, 10] обсуждаются правомерность условия гомобаричности и влияние теплофизических свойств жидкости на колебание пузырьков в жидкости.

Наибольшую сложность для анализа амплитуды колебаний пузырька представляет собой резонансный случай, когда частота внешних пульсаций давления равна частоте Миннаерта. Линей-

ное приближение дает для амплитуды на порядок большее значение, чем численное ее значение, определенное из точного нелинейного уравнения [11]. Даже учет квадратичных членов в уравнении дает значение, существенно отличающееся от точного. Ниже методом осреднения выведена простая формула зависимости амплитуды колебаний газового пузырька от амплитуды внешнего давления и теплофизических характеристик газа и жидкости. Показано ее хорошее согласие с численными расчетами до значения амплитуды колебаний радиуса пузырька, сравнимого с его равновесным значением.

УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение изменения радиуса пузырька R можно получить из закона изменения энергии [11, 12]:

$$\frac{dE}{dt'} + \left[p_0 \left(1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right) + p_1 \cos \omega t' \right] 4\pi R^2 \frac{dR}{dt'} + 16\pi\mu R \left(\frac{dR}{dt'} \right)^2 = 0, \quad E = 2\pi\rho R^3 \left(\frac{dR}{dt'} \right)^2, \quad (1)$$

где E – кинетическая энергия жидкости, p_0 – невозмущенное давление жидкости, p_1 – амплитуда колебаний давления в жидкости. В диссипативном члене учитывается только вязкость жидкости μ . В линейном приближении амплитуда свободных колебаний за один период убывает в e^Λ раз, где

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrovipmech@gmail.com

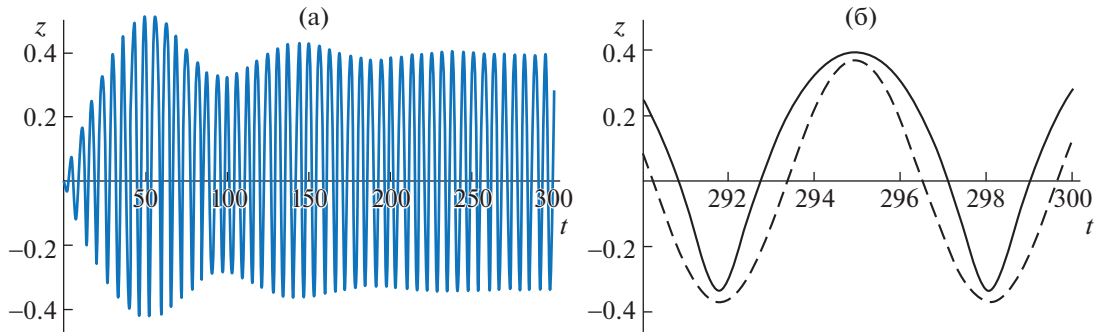


Рис. 1. Колебания относительного радиуса пузырька при $\gamma = 4/3$, $\Lambda = 0.1$, $A = \varepsilon = \Lambda/\pi$ и начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ на отрезках времени: $t \in (0, 300)$ (а), $t \in (290, 300)$ (б).

Λ – декремент затухания, который выражается через вязкость жидкости $\Lambda = \frac{4\pi\mu}{\rho R_0^2 \omega}$. Для учета тепловой диссипации удобно заменить μ на эффективную вязкость, выразив ее через декремент затухания $\mu = \frac{\rho R_0^2 \omega}{4\pi} \Lambda$, где ω – частота свободных колебаний пузырька (частота Миннаерта). Как известно, для воздушных пузырьков в воде, радиусы которых меняются в диапазоне $R_0 \in (10^{-4} \text{ см}, 10^{-1} \text{ см})$, декремент затухания меняется в интервале $\Lambda \in (0.1, 0.16)$. Для малых пузырьков $R_0 < 10^{-3} \text{ см}$ – обусловлен главным образом вязкостью воды, а для пузырьков большего размера – тепловыми эффектами.

Разделив уравнение (1) на $4\pi R^3 \dot{R}$, получим

$$\rho \left(\frac{3 \dot{R}^2}{2R} + \ddot{R} \right) + \frac{p_0}{R} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right) + \frac{p_1}{R} \cos \omega t + 4\mu \frac{\dot{R}}{R^2} = 0, \quad \dot{R} = \frac{dR}{dt}, \quad \ddot{R} = \frac{d^2 R}{dt^2}. \quad (2)$$

Сделаем замену

$$t' = t/\omega, \quad R = R_0(1 + z(t)), \quad p_0 = \frac{\rho R_0^2}{3\gamma} \omega^2, \\ p_1 = A\rho R_0^2 \omega^2, \quad \mu = \frac{1}{4} \varepsilon \rho R_0^2 \omega$$

и разделим уравнение на размерный множитель $\omega^2 R_0 \rho$. Получим следующее уравнение для $z(t)$:

$$\frac{A \cos(t)}{(1+z)} + \ddot{z} + \frac{1}{3\gamma(1+z)} \left[1 - \left(\frac{1}{z+1} \right)^{3\gamma} \right] + \frac{3\dot{z}^2}{2(1+z)} + \varepsilon \frac{\dot{z}}{(1+z)^2} = 0, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \\ \frac{1}{3\gamma(1+z)} \left[1 - \left(\frac{1}{z+1} \right)^{3\gamma} \right] = z - \frac{3}{2}(1+\gamma)z^2 + \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{6}(11 + 18\gamma + 9\gamma^2)z^3 + O[z]^4.$$

В линейном приближении уравнение имеет вид $A \cos t + \ddot{z} + z + \varepsilon \dot{z} = 0$. Уравнение имеет точное решение

$$z = -(A/\varepsilon) \sin t + C e^{-\varepsilon t/2} \sin(-\sqrt{1 - \varepsilon^2/4} t), \\ \varepsilon = \Lambda/\pi = \frac{4\mu}{\rho R_0^2 \omega}. \quad (4)$$

Первое слагаемое – это установившееся гармоническое колебание, второе – возмущение, зависящее от начальных условий. Возмущение за период колебаний убывает в e^Λ раз. Декремент затухания учитывает все механизмы потерь энергии. При декременте затухания $\Lambda = 0.1$, $\varepsilon = \Lambda/\pi$, $A = \varepsilon$ значение установившейся амплитуды равно 1. Тогда как согласно численному решению точных уравнений при этих же значениях параметров имеем зависимость $z(t)$, изображенную сплошной линией на рис. 1, и амплитуда равна 0.366, т.е. в 3 раза меньше. Амплитуда вычислялась из численного решения по формуле $a = 0.5 (\max z(t) - \min z(t))$, $t \in (290, 300)$. Численное решение построено при начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ и приведено на отрезках времени: а) $t \in (0, 300)$, б) $t \in (290, 300)$, и показывает неприемлемость линейного приближения для расчета установившейся амплитуды.

Цель дальнейшего изложения – найти установившуюся амплитуду колебаний в зависимости от безразмерных параметров $\gamma, \Lambda = \pi\varepsilon, A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Записываем уравнение колебаний в виде

$$\ddot{z} + z = F(t, z, \dot{z}), \quad F = -\varepsilon \left(A_1 \frac{\cos t}{(1+z)} + \frac{\dot{z}}{(1+z)^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{(\dot{z})^2}{(1+z)} - \frac{1}{3\gamma(1+z)} \left[1 - \left(\frac{1}{z+1} \right)^{3\gamma} \right] + z, \quad A = A_1 \varepsilon. \quad (5)$$

Следуя методу осреднения [13], с помощью подстановок $z = r \cos \varphi, \dot{z} = -r \sin \varphi$ находим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -r \sin \varphi, \\ -\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dr}{dt} \sin \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = r \cos \varphi - f, \quad (6) \\ f &= F(t, r \cos \varphi, -r \sin \varphi). \end{aligned}$$

Разрешаем систему относительно $\frac{dr}{dt}$ и $r \frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{dr}{dt} = -f \sin \varphi, \quad r \frac{d\varphi}{dt} = r - f \cos \varphi. \quad (7)$$

Будем считать φ независимой переменной и рассмотрим функции $r(\varphi), t(\varphi) = \varphi + \tau(\varphi)$.

Для введенных функций, предполагая $f/r \ll 1$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= f_1, \quad \frac{d\tau}{d\varphi} = f_2, \\ f_1 &= -f \sin \varphi \left(1 + f \frac{\cos \varphi}{r} + \left(f \frac{\cos \varphi}{r} \right)^2 + \dots \right), \quad (8) \\ f_2 &= f \frac{\cos \varphi}{r} + \left(f \frac{\cos \varphi}{r} \right)^2 \dots \end{aligned}$$

Предполагая ε малым параметром, введем замены

$$r(\varphi) = \varepsilon^{1/3} r_0(\varphi), \quad \tau(\varphi) = \varepsilon^{1/3} \tau_0(\varphi). \quad (9)$$

Поскольку $f \sim \varepsilon^{2/3}$, то для новых переменных $r_0(\varphi), \tau_0(\varphi)$ получим уравнения нормального вида с малыми параметрами $\varepsilon^{1/3}$ в правых частях. По теореме Боголюбова можно приблизить решение уравнений решением уравнения с осредненными правыми частями. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{d\varphi} &= -\frac{1}{2} \varepsilon (A_1 \tau_0 + r_0), \\ \frac{d\tau_0}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon^{1/3} \left((9\gamma^2 + 4) r_0^3 - 32A_1 \right)}{64r_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнявая к нулю правые части, найдем установившееся решение:

$$r_0 = \left(\frac{32A_1}{4 + 9\gamma^2} \right)^{1/3}, \quad \tau_0 = - \left(\frac{32A_1}{4 + 9\gamma^2} \right)^{1/3} / A_1. \quad (11)$$

Принимая во внимание замену (9), получаем следующую асимптотическую зависимость для амплитуды a и фазы t_0 :

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon^{1/3} r_0 = \left(\frac{32A_1 \varepsilon}{4 + 9\gamma^2} \right)^{1/3}, \\ t_0 &= \varepsilon^{1/3} \tau_0 = - \left(\frac{32A_1 \varepsilon}{4 + 9\gamma^2} \right)^{1/3} / A_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно полученным асимптотическим формулам, при $t \rightarrow \infty$ устанавливается гармоническое колебание $z = a \cos(t - t_0)$ с амплитудой и фазой (12). При $\gamma = 4/3, \Lambda = 0.1, A_1 = 1$ это гармоническое колебание изображено на рис. 1 штриховой линией. Оно имеет амплитуду $a = 0.370$, близкую к значению $a = 0.366$, которое найдено из численного решения точных уравнений. Как видно из рис. 1, амплитуда и фаза, определенные по асимптотическим формулам (12), удовлетворительно согласуются с точными значениями. Согласие улучшается по мере уменьшения параметра $\varepsilon = \Lambda/\pi$.

Формулу (12) для амплитуды удобно представить в виде

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{32A}{4 + 9\gamma^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{32p_1}{3\gamma(4 + 9\gamma^2)p_0} \right)^{1/3}, \\ A &= \frac{p_1}{3\gamma p_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Эта простая формула показывает удивительно хорошее согласие с точными численными расчетами практически для всех физически реализуемых значений параметров γ, Λ и A и весьма больших амплитуд колебаний радиуса пузырька. Ам-

Таблица 1. Радиусы воздушных пузырьков R_0 (мм) в воде, для которых частота Миннаерта в два раза больше частоты n -й деформационной моды

| Номер моды n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Радиус R_0 | 0.007 | 0.026 | 0.059 | 0.111 | 0.186 | 0.287 | 0.419 | 0.586 | 0.791 |
| Частота ω | 3.2×10^6 | 8.2×10^5 | 3.5×10^5 | 1.9×10^5 | 1.1×10^5 | 7.2×10^4 | 4.9×10^4 | 3.5×10^4 | 2.6×10^4 |

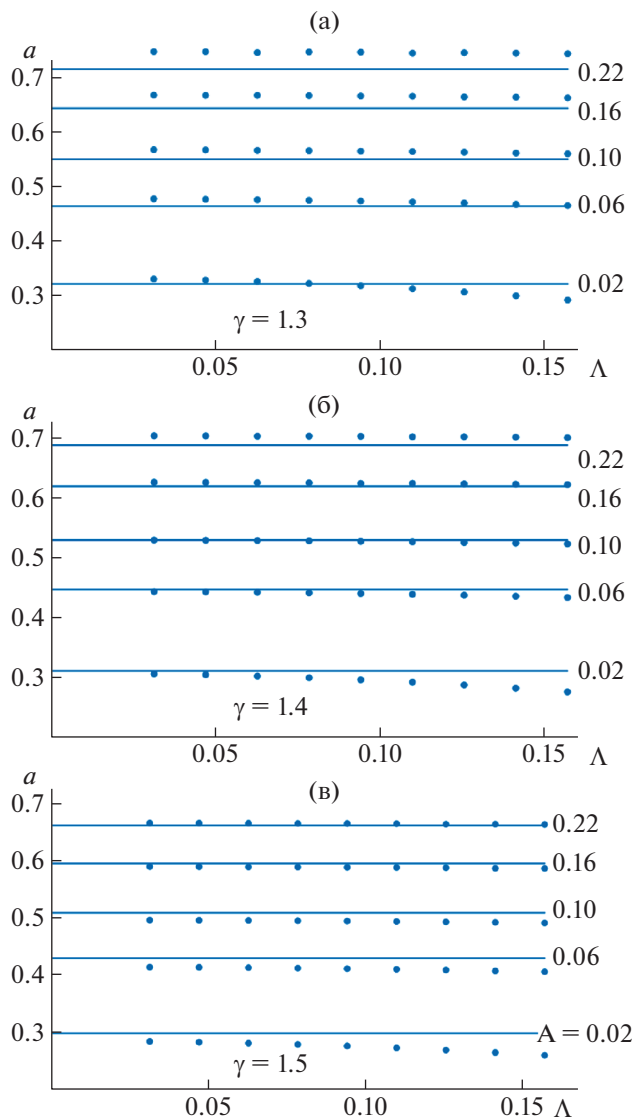


Рис. 2. Сравнение относительных амплитуд численного и асимптотического решений для установившихся колебаний, $\Lambda \in (0.02, 0.22)$: $\gamma = 1.3$ (а), $\gamma = 1.4$ (б); $\gamma = 1.5$ (в).

плитуда может достигать значения $0.7R_0$ и с хорошей точностью определяться формулой (13). Кроме того, численные расчеты подтверждают, что амплитуда колебаний пузырька практически не зависит от декремента затухания. Эти результаты иллюстрируются на рис. 2, на котором изображены зависимости установившейся относительной амплитуды a от относительной амплитуды колебаний внешнего давления $A = p_1/(3\gamma p_0)$.

ВЫВОДЫ

Как показывает рис. 2, формула (13) для установившейся относительной амплитуды $a = R_1/R_0$ при резонансной частоте зависит только от показателя политропы γ и отношения амплитуды ко-

лебаний внешнего давления p_1 к его равновесному значению p_0 . Эта зависимость хорошо подтверждается численными расчетами точных уравнений, как для малых амплитуд внешнего давления p_1/p_0 , так и для достаточно больших, при которых амплитуда радиуса достигает значения $0.7R_0$. Зависимость справедлива для большинства газов с показателями политропы γ от значения 1.3 до значения 1.5 и практически всех реально существующих декрементов затухания.

Однако полученная формула (13) не всегда применима. Следует исключить частоты ω , в два раза большие собственных частот деформационных мод $\omega^2 = 4\omega_n^2 = \frac{4(n-1)(n+1)(n+2)}{\rho R_0^3} \sigma$. Радиусы пузырьков R_0 , которые удовлетворяют такому условию, имеют вид [14, 15]

$$R_0 = \frac{2\sigma}{p_0} \left(\frac{2(n-1)(n+1)(n+2)+1}{3\gamma} - 1 \right), \quad (14)$$

$$n = 2, \dots, 10,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Значения радиусов воздушных пузырьков в воде ($\sigma = 0.07$ Н/м, $p_0 = 100$ Па, $\gamma = 1.4$) и их собственных частот, удовлетворяющих такому резонансному условию при $n = 2, \dots, 10$, приведены в табл. 1. Окрестности резонансных частот, приведенные в этой таблице, следует исключить при использовании формулы (13), так как при таких частотах она не работает.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит академика РАН В.Ф. Журавлева за обсуждение результатов работы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00833.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Plesset M., Prosperetty A.* Bubble Dynamics and Cavitation // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1977. V. 9. P 145.
2. *Leighton T.* The Acoustic Bubble. London: Academic Press, 1994. 633 p.
3. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 464 с.
4. *Brennen C.* Cavitation and Bubble Dynamics. N.Y.: Oxford University Press, 1995. 254 p.
5. *Minnaert M.* Musical Air Bubbles and the Sounds of Running Water // *Philosophical Magazine.* 1933. V. 16. P. 235.
6. *Pfriem H.* Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen // *Akust. Z.* 1940. Bd. 5. S. 202.

7. *Devin C.* Survey of Thermal, Radiation, and Viscous Damping of Pulsating Air Bubbles in Water // *J. Acoust. Soc. Am.* 1959. V. 31. P. 1654.
8. *Prosperetti A.* The thermal behaviour of oscillating gas bubbles // *J. Fluid Mechanics.* 1991. V. 222. P. 587–616.
9. *Aydeev A.A.* Gas bubble pulsations in an acoustic field (resonance and boundaries of the polytropic approximation) // *High temperature.* 2014. V. 52. P. 851–860.
10. *Khabeev N.S., Shagapov V.S.* Towards the problem of homobaricity in bubble dynamics // *Int. J. of Math. Trends and Techn.* 2020. V. 66. Iss. 9. P. 156–159.
11. *Голубятников А.Н., Украинский Д.В.* О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 52–62.
12. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
13. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
14. *Вановский В.В., Петров А.Г.* Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2: 1 // *ДАН.* 2011. Т. 437. № 3. С. 331–335.
15. *Вановский В.В., Петров А.Г.* Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // *ДАН.* 2012. Т. 444. № 4. С. 385–389.

NONLINEAR FORCED OSCILLATIONS OF A BUBBLE IN A LIQUID

A. G. Petrov^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev

Forced nonlinear oscillations of a gas bubble in a liquid are investigated when the frequency of fluctuations in the external pressure of the liquid is equal to the natural frequency of the bubble (resonance). By the method of averaging, a simple formula is derived for the dependence of the oscillation amplitude of a gas bubble on the amplitude of the external pressure and the thermophysical characteristics of the gas and the viscosity of the liquid. Its good agreement with numerical calculations is shown up to the value of the oscillation amplitude of the bubble radius comparable to its equilibrium value.

Keywords: gas bubbles, forced nonlinear oscillations, homobaricity, liquid