ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 13–15

МАТЕМАТИКА

УДК 511.334+511.335

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

 Член-корреспондент РАН В. А. Быковский[1,*], М. Д. Монина[1,**]

Поступило 24.10.2019 г.
После доработки 24.10.2019 г.
Принято к публикации 01.11.2019 г.

В работе изучаются средние по целым точкам на трехмерной сфере с произвольной гладкой весовой функцией. Для них получено разложение по средним произведений двух L-рядов, ассоциированных с базисом Гекке в пространствах голоморфных параболических форм целого четного веса относительно конгруэнцподгруппы $\Gamma_0(4)$.

Ключевые слова: целые точки на сфере, модулярные функции, L-ряды параболических форм

DOI: 10.31857/S268695432001004X

Пусть d – нечетное натуральное число. Для произвольной функции φ, определенной на отрезке $[-1, 1]$, положим

$$S_\varphi(d) = \sum_{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=d} \varphi\left(1 - 2\frac{a_1^2+a_2^2}{d}\right).$$

Здесь суммирование проводится по всем наборам целых чисел (a_1, a_2, a_3, a_4), которые лежат на трехмерной сфере радиуса $\sqrt{d}$ с центром в начале координат.

Пусть **1** – тождественно равная 1 функция на отрезке $[-1, 1]$. В 1829 г. Якоби доказал, что (см. [1])

$$S_1(d) = 8\sigma(d) = 8\sum_{d_1 \setminus d} d_1.$$

Другими словами, количество представлений нечетного натурального d суммой четырех квадратов целых чисел равно восьмикратной сумме делителей d.

Пусть

$$\mathrm{r}(n) = \sum_{a_1^2+a_2^2=n} 1$$

есть количество представлений целого $n \geq 0$ суммой двух квадратов целых чисел. Хорошо известно (см. [2]), что для $n > 0$

$$\mathrm{r}(n) = 4\sum_{n_1 \setminus n} \chi(n_1) = 4\tau^{(\chi)}(n),$$

где

$$\chi(a) = \begin{cases} (-1)^{\frac{a-1}{2}}, & \text{если} \quad a - \text{нечетное}, \\ 0, & \text{если} \quad a - \text{четное}, \end{cases}$$

есть квадратичный характер по модулю 4, и по определению $\tau^{(\chi)}(0) = \frac{1}{4}$. Легко заметить, что

$$S_\varphi(d) = \sum_{0 \leq n \leq d} r(n) r(d-n) \varphi\left(1 - \frac{2n}{d}\right) = $$
$$= 16 \sum_{0 \leq n \leq d} \tau^{(\chi)}(n) \tau^{(\chi)}(d-n) \varphi\left(1 - \frac{2n}{d}\right). \quad (1)$$

В соответствии со стандартными обозначениями

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

суть полиномы Лежандра, которые составляют полную ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ и $P_0(x) \equiv 1$.

Следующий классический результат можно найти, например, в [3].

Теорема 1. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$, то она разлагается в равномерный сходящийся ряд Фурье–Лежандра*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\int_{-1}^{1} P_k(t)\varphi(t)dt\right) P_k(x).$$

[1]*Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия*
**E-mail: vab@iam.khv.ru*
***E-mail: monina_dvggu@mail.ru*

Принимая во внимание равенство (1), отсюда получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть d — нечетное натуральное число и функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке* $[-1, 1]$. *Тогда*

$$\frac{1}{8}S_{\varphi}(d) = \left(\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt\right)\left(\sum_{n=0}^{d}\tau^{(\chi)}(n)\,\tau^{(\chi)}(d-n)\right) + $$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)\left(\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,P_{k-1}(t)\,dt\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{n=0}^{d}\tau^{(\chi)}(n)\,\tau^{(\chi)}(d-n)\,P_{k-1}\left(1-\frac{2n}{d}\right)\right).$$

Как обычно, для натурального N

$$\Gamma_0(N) =$$
$$=\left\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{Z};\, ad-bc=1;\, c\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,N)\right\}$$

есть конгруэнцподгруппа уровня N мультипликативной модулярной группы $\Gamma = \Gamma_0(1)$. Элементы Γ действуют на верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{x+iy\,|\,x,y\in\mathbb{R};\, y>0\}$ посредством дробно-линейных преобразований

$$z \to M(z) = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как матрицы M и $-M$ действуют на $\mathbb{H}$ одинаково, то удобнее работать с

$$\overline{\Gamma}_0(N) = \Gamma_0(N)\Big/\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

(матрицы M и $-M$ отождествляются).

Обозначим через $S_{2k}\left(\overline{\Gamma}_0(N)\right)$ линейное пространство голоморфных на $\mathbb{H}$ параболических форм веса $2k$ (k — натуральное), для которых

$$(cz+d)^{-2k}\, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z) \quad \forall\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N).$$

Эти пространства конечномерны, и скалярное произведение Петерссона

$$\langle f,g\rangle = \iint\limits_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\,\overline{g(z)}\,y^{2k-2}\,dxdy$$

определяет на $S_{2k}\left(\overline{\Gamma}_0(N)\right)$ структуру эрмитова пространства.

Для любой формы f из $S_{2k}\left(\overline{\Gamma}_0(N)\right)$ справедливо разложение в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_f(n)\,n^{k-1/2}e^{2\pi inz}.$$

По определению,

$$\mathcal{L}_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_f(n)\frac{1}{n^s},\quad \mathcal{L}_f^{*}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_f^{*}(n)\frac{1}{n^s}$$

суть ряды Гекке формы f (* — знак комплексного сопряжения). Далее,

$$\mathcal{L}_f(s;\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_f(n)\frac{\chi(n)}{n^s},$$
$$\mathcal{L}_f^{*}(s;\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_f^{*}(n)\frac{\chi(n)}{n^s}$$

суть ряды Гекке, скрученные с характером χ. Во всех четырех случаях ряды Гекке определяют голоморфные по s функции на всей комплексной плоскости.

На пространстве $S_{2k}\left(\overline{\Gamma}_0(N)\right)$ действуют операторы Гекке по правилу (для любого натурального n)

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{n_1n_2=n\\ \text{НОД}(n_2,N)=1}}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{k}\sum_{a=1}^{n_2} f\left(\frac{n_1z+a}{n_2}\right).$$

Операторы Гекке коммутируют между собой и они эрмитовы для НОД $(n,N) = 1$. Поэтому в $S_{2k}(\overline{\Gamma}_0(N))$ можно выбрать ортонормированный базис $B_{2k}(N)$ (множество, составленное из элементов базиса), состоящий из собственных функций операторов $T(n)$ с НОД $(n,N)=1$, для которых

$$T(n)f = \lambda_f(n)f,\quad \lambda_f(n)\in\mathbb{R}.$$

В работе [4] была доказана формула следа, частным случаем которой является следующая

Т е о р е м а 3. *Для $k\geq 2$ и нечетного d*

$$\sum_{n=0}^{d}\tau^{(\chi)}(n)\,\tau^{(\chi)}(d-n)\,P_{k-1}\left(1-\frac{2n}{d}\right) =$$
$$= 2\sqrt{d}\,(-1)^{k-1}\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k}}\sum_{f\in B_{2k}(4)}\lambda_f(d)\,\mathcal{L}_f\left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}_f^{*}\left(\frac{1}{2};\chi\right).$$

Поэтому тождество из теоремы 2 преобразуется к следующему виду.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке* $[-1, 1]$. *Тогда для любого нечетного d*

$$S_{\varphi}(d) = 4\left(\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt\right)\sigma(d) +$$
$$+16\sqrt{d}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\Gamma(2k)}{(4\pi)^{2k}}\left(\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,P_{k-1}(t)\,dt\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{f\in B_{2k}(4)}\lambda_f(d)\,\mathcal{L}_f\left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}_f^{*}\left(\frac{1}{2};\chi\right)\right).$$

Пусть $0 \leq u < v \leq 1$ и $S(d;u,v)$ — количество целых точек (a_1, a_2, a_3, a_4) на сфере $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = d$, для которых

$$ud \leq a_1^2 + a_2^2 \leq vd.$$

Действуя стандартным способом, из теоремы 4 получаем еще один результат.

Теорема 5. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* u *и* v

$$S(d;u,v) = 8(v-u)\sigma(d) + O_\varepsilon\left(d^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right).$$

Доказательство опирается на оценку Делиня (см. [5])

$$\lambda_f(d) \ll d^\varepsilon$$

и оценку (см. [6])

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k}} \sum_{f \in B_{2k}(\mathrm{N})} \left|\mathcal{L}_f\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2 \ll \log(kN+1).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19–11–00065).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jacobi C.G.J.* Gesammelte werke. B., 1881.
2. *Дирихле П.Л.* Лекции по теории чисел. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005.
4. *Bykovsky V.A.* Hecke Series Values of Holomorphic Cusp Forms in the Centre of the Critical Strip // Number Theory in Progress. V. 2. Elementary and Analytic Number Theory / Eds. K. Gyory, H. Iwaniec, J. Urbanowicz. B.: Walter de Gruyter, 1999. P. 675–689.
5. *Делинь П.* // Успехи матем. наук. 1975. Т. 30. Вып. 5. С. 159–190.
6. *Быковский В.А., Фроленков Д.А.* О втором моменте L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой // Известия РАН. Серия математическая. 2017. № 2. С. 5–34.

THE TRACE FORMULA FOR INTEGRAL POINTS ON THE THREE-DIMENSIONAL SPHERE

Corresponding Member of the RAS V. A. Bykovskii[1] and M. D. Monina[1]

[1] *Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

Received October 24, 2019

In this work we study average values over integer points on a three-dimensional sphere with an arbitrary smooth weight function. For them is obtained the expansion of mean product of two L-series associated with the Hecke basis in spaces of holomorphic parabolic forms of integer even weight with respect to the congruence subgroup $\Gamma_0(4)$.

Keywords: integral points on a sphere, modular functions, L-series of parabolic forms