

УДК 519.614.2

ОБ ИНДИКАТОРАХ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

© 2020 г. В. Н. Разжевайкин^{1,*}, академик РАН Е. Е. Тыртышников^{2,**}

Поступило 27.09.2019 г.
После доработки 27.09.2019 г.
Принято к публикации 29.10.2019 г.

Излагается методика построения индикатора устойчивости неотрицательной квадратной матрицы, имеющего вид полинома от матричных коэффициентов. Указан алгоритм построения и связь построенного индикатора с определителями некоторых матриц, построенных на основе исходной.

Ключевые слова: неотрицательная матрица, индикатор устойчивости, спектральный радиус

DOI: 10.31857/S2686954320010063

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Задача построения индикаторов устойчивости неотрицательных квадратных матриц в виде сравнительно простых формул от ее коэффициентов мотивирована проблемами прикладного характера, относящимися к области математической биологии. Ключевая среди них – конструирование функционалов отбора в дискретных задачах эволюционной оптимальности (см. [1]). В этих нелинейных задачах устойчивость стационарного решения эквивалентна экстремальности спектральных характеристик для ограничений вычисленного в нем якобиана системы на компоненты, соответствующие ненулевым значениям этого решения. Вместо этих характеристик можно использовать монотонно связанные с ними функции. В частности, на эту роль годятся биологические потенциалы популяций и другие индикаторы устойчивости матриц перехода. Следует отметить, что задачи эволюционной оптимальности изначально требуют аналитического задания функционалов отбора, не привязанных к каким-либо конкретным значениям коэффициентов

матрицы, поскольку эти функционалы фигурируют в задачах оптимизации.

Решение задачи о построении индикаторов устойчивости попутно позволяет отвечать и на более утилитарный вопрос – об устойчивости численно заданных неотрицательных матриц. Отметим, что полученные на основе предлагаемой здесь теории результаты в такой утилитарной трактовке частично укладываются в рамки известных конструкций (см. [2]). Однако непосредственное использование последних для построения индикаторов, не привязанных к конкретным численным значениям, невозможно, пример чего представлен в настоящем сообщении.

Целью настоящей работы является конструирование теории, обеспечивающей возможность построения индикаторов устойчивости произвольных неотрицательных квадратных матриц. При этом основными требованиями, предъявляемыми к таким индикаторам, являются их простота (желательно иметь выражения типа полиномов от коэффициентов матрицы) и точность (при точно заданных коэффициентах ответ о локализации спектрального радиуса относительно единицы должен быть точным).

Пусть M_n – множество вещественных $n \times n$ матриц $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $M_n^+ = \{A \in M_n : A \geq 0\}$, $I = (\delta_{ij})$ – единичная матрица, $\sigma(A)$ – спектр матрицы $A \in M_n$, $n = \dim A$ – ее размерность, $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ – спектральный радиус, $P(\lambda, A) = \det(\lambda I - A)$ – характеристический поли-

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: razzh@mail.ru

**E-mail: eugene.tyrtysnikov@gmail.com

ном, $\|\cdot\|$ – норма (вектора, оператора). Под перенумерацией в $A \in M_n$ мы понимаем одновременную перенумерацию ее строк и столбцов. Главная $(k \times k)$ -подматрица J ($n \times n$)-матрицы A , $k \leq n$, (пишем $J \subseteq A$) – это подматрица матрицы A , занимающая верхнюю левую позицию после подходящей перенумерации в последней. При $k < n$ пишем $J \subset A$.

Две функции $f_{1,2}: \Omega \rightarrow M_{n_2}$ с одной и той же областью определения Ω назовем r -эквивалентными, если для любого $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\text{sign}(r(f_1(\omega)) - 1) = \text{sign}(r(f_2(\omega)) - 1).$$

В случае $n_2 = 1$ функцию f_2 , r -эквивалентную функции f_1 с областью определения Ω , назовем ее индикатором устойчивости (или с учетом области значений последней – матрицы f_1 на множестве Ω).

2. ИНДИКАТОРЫ КАК ДРОБИ

Теорема 1. Тождественная функция $f_k: A_k \rightarrow A_k \in M_k^+$, $A_k = (a_{ij}^k)$, с областью определения $M_k^+ \cap \{A_k: a_{kk}^k < 1\}$ r -эквивалентна функции $f_{k-1}: A_k \rightarrow A_{k-1} \in M_{k-1}^+$ с $A_{k-1} = (a_{ij}^{k-1}) \in M_{k-1}^+$ и

$$a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^k + \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{1 - a_{kk}^k}. \quad (1)$$

Последовательное $(n-1)$ -кратное повторение процедуры построения по матрице A_k матрицы A_{k-1} с коэффициентами из (1), если таковое возможно, позволяет получить индикатор устойчивости исходной матрицы $A_n = (a_{ij}^n)$. Препятствиями для выполнения очередного шага могут быть следующие:

1. Очередное $a_{kk}^k > 1$. В этом случае $r(A_k) > 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) > 1$.

2. Очередное $a_{kk}^k = 1$ и для некоторого номера $i < k$ $a_{ii}^k \neq 1$. В этом случае подходящей перенумерацией в матрице A_k , переводящей такой коэффициент матрицы в нижний правый угол, можно добиться в случае $a_{ii}^k < 1$ возможности продолжения процедуры или в случае $a_{ii}^k > 1$ выполнения условия 1.

3. Все $a_{ii}^k = 1$, $i \leq k$. В этом случае возможны два варианта.

3.1. Существует неразложимая главная подматрица J матрицы A_k размерности большей единицы. В этом случае $r(A_k) \geq r(J) > 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) > 1$.

3.2. Подходящей перенумерацией в матрице A_k можно привести ее к треугольному виду с единицами на главной диагонали. В этом случае $r(A_k) = 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) = 1$.

З а м е ч а н и е 1. Приведенных здесь результатов достаточно для проверки устойчивости неотрицательной матрицы в случае численного задания ее коэффициентов. При этом необходимость в перенумерации, как правило, отпадает из-за отсутствия в реальных задачах точных попаданий коэффициентов исходной матрицы на значения, обеспечивающие выполнение условий типа равенства, при которых такая потребность может возникнуть. Поскольку эти значения отличны от нуля, то от подобных условий можно избавиться сколь угодно малым шевелением положительных коэффициентов матрицы, не нарушая тем самым ее профиль изреженности.

Выражения для индикатора устойчивости матрицы в виде формулы от ее коэффициентов без привязки к их конкретным значениям можно получить путем многократного применения подстановки (1), сокращая последовательно размерность матрицы вплоть до единичной, т.е. выстраивая в соответствии с теоремой 1 цепочку

$$A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_1 = (a_{11}^1). \quad (2)$$

Получаемое в результате выражение a_{11}^1 вполне пригодно на роль индикатора устойчивости исходной матрицы с двумя оговорками.

Первая. Выражение a_{11}^1 представляет собой многоэтажную дробь от коэффициентов матрицы, которая уже при сравнительно небольших размерностях становится необозримой.

Вторая. На каждой итерации при построении цепочки (2) требуется оговаривать в качестве дополнительного условия выполнения неравенства $a_{kk}^k < 1$ для $k = 2, 3, \dots, n$.

Последние условия можно ослабить до условий $a_{kk}^k \neq 1$. Точнее, имеет место следующая

Теорема 2. Функция $F(A_n) = \max_{k=1, \dots, n} \{a_{kk}^k\}$, вычисленная последовательным применением подстановок (1) при $k = n, \dots, 1$, начиная с $A_n = (a_{ij}^n) \in M_n^+$, является индикатором устойчивости матрицы A_n на подмножестве M_n^+ , неявно задаваемом посредством

указанных подстановок неравенствами $a_{kk}^k \neq 1$, $k = n, \dots, 2$.

З а м е ч а н и е 2. Неравенства $a_{kk}^k \neq 1$ в теореме 2 можно проигнорировать, если допустить бесконечные значения для коэффициентов матриц A_k с использованием следующих договоренностей: 1) $\infty > 1$; 2) для матрицы $A \geq 0$ с бесконечными элементами $r(A) = \limsup_{0 \leq A' \leq A, \|A'\| < \infty} r(A')$; 3) $\frac{0}{0} = 0 \cdot \infty = 0$.

3. ИНДИКАТОРЫ КАК ПОЛИНОМЫ

Поскольку все знаменатели в (1) имеют вид $1 - a_{kk}^k$, $k = n, \dots, 2$, то проверка соотношений $a_{11}^1(<, =, >)|$ и $a_{kk}^k(<, =, >)|$ для $k = n, \dots, 2$ эквивалентна проверке соответственно неравенств $P_1(A_n)(<, =, >)|$ и $P_k(A_n)(<, =, >)|$, где полиномы $P_k(A_n)$, $k = n, \dots, 1$, получаются из a_{kk}^k применением $(n - k)$ -шаговой процедуры “понижения этажности” дроби, j -й шаг которой заключается в замене полученного на предыдущем шаге выражения $\frac{\alpha}{\beta}$ с $\beta = 1 - a_{ll}^l$ и $l = k + j - 1$ выражением $\alpha - \beta + 1$. Поскольку в случае $\beta > 0$ оба выражения отклоняются от единицы в одну и ту же сторону, то в случае $P_k(A_n) \neq 1$, $k = n, \dots, 2$, выражение $Q(A_n) = \max_{k=2, \dots, n} \{P_k(A_n)\}$ отклоняется от единицы в ту же сторону, что и $F(A_n)$. Это означает, что при выполнении указанных неравенств функция $Q(A_n)$ может служить индикатором устойчивости матрицы $A_n \in M_n^+$.

Т е о р е м а 3. Пусть $a_{kk}^k \neq 1$, $k = n, \dots, 2$. Тогда

$$\det(I - A_k) = \det(I - A_{k-1})(1 - a_{kk}^k).$$

Повторное применение теоремы 3 к нижней главной подматрице $J_m = J_m(A_n)$, $m = 1, 2, \dots, n$, размерности $n - m + 1$ матрицы A_n влечет

С л е д с т в и е 1. В случае $a_{jj}^j \neq 1$, $j = m, \dots, n$

$$\det(I - J_m) = \prod_{j=m}^n (1 - a_{jj}^j). \quad (3)$$

Обозначим $M_j(A_n) = (1 - \det(I - J_j))$, $j = m, \dots, n$ и $M^m(A_n) = \max_{j=m, \dots, n} M_j(A_n)$. Из (3) вытекает

С л е д с т в и е 2. В случае $a_{jj}^j < 1$, $j = m, \dots, n$, будет $M^m(A_n) < 1$.

Верно и обратное утверждение.

С л е д с т в и е 3. В случае $M^m(A_n) < 1$ для всех $j = m, \dots, n$ выполнены неравенства $a_{jj}^j < 1$.

З а м е ч а н и е 3.1. Полиномы $P_k(A_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, совпадают с $M_k(A_n)$, так что функция $M^1(A_n)$ может служить индикатором устойчивости матрицы $A_n \geq 0$ при $M_k(A_n) \neq 1$, $k = 2, \dots, n$.

З а м е ч а н и е 3.2. Изменив нумерацию строк и столбцов матрицы $A_n \geq 0$ на противоположную, мы получим в качестве ведущих подматриц матрицы $I - A_n$ с точностью до этой нумерации матрицы J_j , $j = n, \dots, 2$. При этом проверяемые на положительность выражения $(1 - a_{jj}^j)$ будут совпадать с диагональными элементами ее LU-разложения (см., например, [3]).

З а м е ч а н и е 3.3. Следствия 2 и 3 – это один из критериев регулярности M-матриц (см., например, [2]). Предыдущее замечание также представляет один из таких критериев.

Т е о р е м а 4. Функция

$$M(A) = \max_{J \subseteq A} (1 - \det(I - J))$$

для матрицы $A \in M_n^+$ является индикатором ее устойчивости.

З а м е ч а н и е 4. Нетривиальной здесь является проверка импликации $r(A) > 1 \Rightarrow M(A) > 1$. Во всех остальных случаях максимум можно вычислять не по всем главным минорам, а лишь по цепочке ведущих при произвольной перенумерации в исходной матрице. Контрпримером возможности такой подмены в указанной здесь импликации может служить матрица $A = \text{diag}\{2, 1\}$ с $M^1(A) = 1$ и $r(A) = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разжевайкин В.Н. Функционалы отбора в автономных моделях биологических систем с непрерывной возрастной и пространственной структурой // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50. № 2. С. 338–346.
2. Berman A., Plemmons R.J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. N.Y.: Acad. Press, 1979. 340 p.
3. Уоткинс Д. Основы матричных вычислений. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2006. 664 с.

**ON STABILITY INDICATORS
OF NONNEGATIVE MATRIXES****V. N. Razzhevaikin¹ and Academician of the RAS E. E. Tyrtyshnikov²**¹*Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*²*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Received September 27, 2019

For a nonnegative square matrix a method of constructing of a stability indicator in the form of polynomial on matrix coefficients is presented. Also, an algorithm for indicator calculation and its relationship with determinants of some matrixes, built on the base of the original one, are demonstrated.

Keywords: nonnegative matrix, stability indicator, spectral radius