

УДК 512.745.2

## О ДЕЙСТВИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ГРУППЫ ВЕЙЛЯ НА МНОЖЕСТВЕ ОРБИТ МИНИМАЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОДГРУППЫ

© 2020 г. В. С. Жгун<sup>1,2,\*</sup>, Ф. Кноп<sup>3,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 07.10.2019 г.

Поступило в редакцию 16.10.2019 г.

После доработки 16.10.2019 г.

Принято к публикации 23.10.2019 г.

В работе построено действие ограниченной группы Вейля на главных семействах орбит минимальной параболической подгруппы над алгебраически незамкнутым полем, а также найдена связь с действием группы Вейля на поляризованном кокасательном расслоении. Эти результаты обобщают соответствующие результаты Кнопа о действии группы Вейля на семействах орбит борелевской подгруппы максимальной сложности и ранга.

**Ключевые слова:** действия редуктивных групп над алгебраически незамкнутыми полями, группа Вейля орбиты минимальной параболической подгруппы, кокасательное расслоение

DOI: 10.31857/S2686954320010099

Пусть  $k$  — поле характеристики нуль с алгебраическим замыканием  $\bar{K}$ .  $G$  — связная редуктивная  $k$ -группа, действующая на алгебраическом  $k$ -многообразии  $X$ . Обозначим через  $P \subseteq G$  минимальную параболическую  $k$ -подгруппу, для которой зафиксируем разложение  $P = L_{\text{ан}} A P_u$ , где  $P_u$  — унипотентный радикал,  $L_{\text{ан}}$  — максимальная анизотропная подгруппа группы  $P$ , а  $A$  — максимальный расщепимый тор, который централизует  $L_{\text{ан}}$ . Положим  $L = L_{\text{ан}} A$ ,  $P' = L_{\text{ан}} P_u$ , а также зафиксируем  $T \subseteq L$  — максимальный  $k$ -тор в  $G$ , содержащий  $A$  (см. [1, 16.1.1]). Размерности многообразий мы всегда будем рассматривать над полем  $\bar{K}$ . Для алгебраического многообразия  $X$  или алгебраической группы  $H$ , определенных над  $k$ , множество их  $k$ -точек обозначим через  $X_k$ ,  $H_k$  соответственно, а через  $X \cdot H$  обозначим рациональный фактор по действию группы  $H$  (который может быть получен с помощью выбора  $k$ -модели для поля рациональных инвариантных функций  $K(X)^H$ ).

**Определение 1.** Напомним, что  $k$ -плотное  $G$ -многообразие  $X$ , т.е. такое, что  $\bar{X}_k = X$ , называется  $k$ -сферическим, если  $P$  имеет открытую орбиту в  $X$ .

Цель настоящей работы — построить действие ограниченной группы Вейля  $W_k = N_G(A)/Z_G(A)$ , т.е. соответствующей системе корней максимального расщепимого тора над  $k$ , на семействах главных орбит минимальной параболической подгруппы над алгебраически незамкнутым полем, что обобщает соответствующие результаты [2]. Заметим, что упомянутое действие будет транзитивным, что даст описание множества главных  $P$ -орбит. В случае  $k$ -сферических многообразий ранее авторами [4] была доказана теорема о конечности числа  $k$ -плотных  $P$ -орбит (см. также [5, 7], в случае  $k = K$ ). Мы также определим гипотетическое действие ограниченной группы Вейля на всех  $k$ -плотных орбитах максимальной сложности. Мы доказали корректность этого определения действия только в случае  $k = \mathbb{R}$  с помощью метода, основанного на алгебре Гекке, построенной с помощью сингулярных когомологий с компактным носителем. Конструкция действия на семействах главных  $P$ -орбит будет построена следующим образом: сначала мы определим действие образующих  $s_\alpha$  группы Вейля  $s_\alpha \in W_k$  (т.е. простых отражений, соответствующих простым корням  $\alpha \in \Delta_k = \Delta(A)$  расщепимого тора  $A$ ), а затем свяжем это действие с естественным действи-

<sup>1</sup>Федеральный научный центр “Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

<sup>3</sup>Университет Фридриха—Александра, Эрланген—Нюрнберг, Германия

\*E-mail: zhgoon@mail.ru

\*\*E-mail: friedrich.knop@fau.de

ем  $W_k$  на компонентах  $k$ -поляризованного кокасательного расслоения.

Все хорошо известные сведения, необходимые для понимания настоящей работы, содержатся в [1, 3, 4, 6].

**Предложение 1.** Пусть  $Q$  —  $k$ -параболическая подгруппа  $G$ , содержащая  $P$ , а  $Y$  —  $P$ -инвариантное  $k$ -плотное подмногообразие  $X$ . Тогда  $QY$  также  $k$ -плотное замкнутое подмногообразие  $X$ .

**Определение 2.** Назовем сложностью  $c_P(X)$  минимальную коразмерность  $P$ -орбиты в  $X$  (совпадающую с коразмерностью орбиты общего положения).

**Определение 3.** Для  $P$ -инвариантного многообразия  $Y$  назовем (расщепимым) рангом  $\text{rk}_k(Y)$  — ранг решетки характеров  $P$ -полуинвариантных  $k$ -рациональных функций на  $Y$ .

**Определение 4.** Для  $P$ -инвариантного многообразия  $Y$  назовем однородностью  $s_k(Y)$  — размерность общей  $L_{\text{ан}}$ -орбиты в рациональном факторе  $Y$  по группе  $AP_u$ .

**Определение 5.** Назовем многообразие однородно-неприводимым над  $k$ , если оно не допускает  $G$ -эквивариантного  $k$ -морфизма на нетривиальное многообразие флагов (полное однородное пространство) группы  $G$ .

Через  $\mathfrak{B}(X)$  обозначим множество  $k$ -плотных подмногообразий максимальной сложности, а через  $\mathfrak{B}_k(X)$  подмножество в  $\mathfrak{B}(X)$ , состоящее из подмногообразий максимального ранга.

Пусть  $Q$  —  $k$ -параболическая подгруппа  $G$ , собственно содержащая  $P$  и не содержащая промежуточных подгрупп. Обозначим через  $Q_u$  ее унитарный радикал. Подгруппа Леви  $M$  в  $Q$ , содержащая  $A$ , имеет над  $k$  полупростой ранг 1. Рассмотрим  $W_Q = N_Q(A)_k / Z_Q(A)_k$ . Согласно [8, 5.18] группа  $W_Q$  порождена одним элементом  $s \in N_Q(A)_k$ , нормализующим  $L$ . Для множества  $k$ -точек разложение Брюа принимает вид

$$Q_k = P_k s P_k \cup P_k.$$

Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобятся следующее предложение из [4] и следствие из него.

**Предложение 2.** Пусть  $G$  — редуктивная алгебраическая группа над совершенным полем  $k$ , действующая на  $k$ -плотном многообразии  $X$ . Пусть  $Y$  —  $P$ -инвариантное  $k$ -плотное подмногообразие  $X$ . Тогда  $(c_P(Y), \text{rk}_k(Y), s_k(Y)) \leq (c_P(X), \text{rk}_k(X), s_k(X))$ , где сравнение берется в лексикографическом порядке.

**Следствие 1.** Пусть  $G$  — редуктивная  $k$ -группа, действующая на  $k$ -сферическом многообразии  $X$ .

Тогда  $X$  имеет конечное число  $P$ -орбит с непустым множеством  $k$ -точек.

**Определение 6.** Назовем  $k$ -плотное  $P$ -инвариантное множество  $Y$  г л а в н ы м, если у него максимальная (в лексикографическом порядке)  $k$ -сложность, расщепимый ранг и однородность.

Для того чтобы определить действие простого отражения  $s_\alpha \in W_k$  на представителе  $Y \in \mathfrak{B}(X)$ , рассмотрим минимальную параболическую подгруппу  $Q = \overline{P s_\alpha P}$ , содержащую  $P$  и  $s_\alpha$ , и рассмотрим многообразие  $QY$ . Наша цель для  $y \in Y$  — представить  $Qy$  в виде объединения  $P$ -орбит, среди которых  $Px$  является открытой

$$Qy = Px \cup \bigcup_{y_i \in (Qy)_k} Py_i \cup \bigcup_{\substack{z_j \in (Qy)_K \\ (Pz_j)_k = \emptyset}} Pz_j.$$

Легко видеть, что все  $P$ -орбиты, а также  $k$ -плотные  $P$ -орбиты находятся в биективном соответствии с  $P/\text{Rad}_u Q$ -орбитами (соответственно  $k$ -плотными орбитами) при переходе к фактору по группе  $\text{Rad}_u Q$  (сюрьективность на множестве  $k$ -точек следует из существования рационального сечения для унитарной группы), что позволяет свести ситуацию к случаю, когда  $Q = G$  является редуктивной группой полупростого расщепимого ранга 1.

Через  $F(W_k)$  обозначим группу с образующими  $\tilde{s}_i$ , соответствующими простым отражениям  $s_i$  группы  $W_k$ , удовлетворяющими соотношениям  $\tilde{s}_i^2 = e$ . Определим действие  $F(W_k)$  на множестве  $\mathfrak{B}(X)$  следующим образом. Пусть снова  $s_\alpha \in W_k$  и  $Y \in \mathfrak{B}(X)$ . Положим, что  $\dim QY > \dim Y$  (в противном случае  $Y$  можно поменять местами с подмногообразием  $Y' \subset QY$ , таким что  $QY' = QY$ ). В предложении 3 приведены типы разнесения  $Y$ : т.е. описано множество  $k$ -плотных  $P$ -орбит в  $Qy$ , и тем самым множество  $\mathfrak{B}(QY)$ . Также приведено действие  $\tilde{s}_\alpha$  исходя из этой классификации. Заметим, что действие  $\tilde{s}_\alpha$  на  $\mathfrak{B}(QY)$  совместимо с действием  $s_\alpha$  на решетках характеров  $P$ -полуинвариантных функций соответствующих многообразий.

**Предложение 3.** Пусть  $G$  — редуктивная  $k$ -группа полупростого расщепимого ранга 1 и пусть  $X$  —  $k$ -плотное однородное  $G$ -многообразие. Тогда выполнен один из следующих случаев:

1.  $X$  —  $k$ -сферическое однородно-неприводимое многообразие. Тогда  $\mathfrak{B}(X) = \{X, Y_1, \dots, Y_r\}$   $r \geq 0$ ;  $s \circ [X] = [X]$ ,  $s \circ [Y_i] = [Y_i]$ .

2.  $X$  —  $k$ -сферическое однородно-приводимое многообразие.

2.1.  $X$  —  $k$ -орисферическое, т.е. стабилизатор точки общего положения содержит  $P_u$ . Тогда

$$\mathfrak{B}(X) = \{X, Y\}; \quad s \circ [X] = [Y].$$

2.2.  $X$  не является орисферическим:

$$\mathfrak{B}(X) = \{X, Y_1, Y_2\}; \quad s \circ [Y_1] = [Y_2].$$

3.  $X$  не является  $k$ -сферическим:  $\mathfrak{B}(X) = \{X\}$ .

Теперь мы можем сформулировать гипотезу и основной результат работы.

**Гипотеза 1.** Действие группы  $F(W_k)$  на множестве  $\mathfrak{B}(X)$  пропускается через действие группы Вейля  $W_k$ .

**Теорема 1.** Гипотеза верна в случае  $k = \mathbb{R}$ , а также в случае действия на множестве, состоящем из главных семейств  $P$ -орбит  $\mathfrak{B}_k(X)$ , которое составляет одну  $W_k$ -орбиту.

Для  $k$ -точки  $x$  со стабилизатором  $H$  имеем соответствие

$$\begin{aligned} \{P_k - \text{орбиты в } G_k x\} &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow \{\text{двойные классы } P_k g H_k \text{ в } G_k\} &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow \{H_k - \text{орбиты в } G_k/P_k\} &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow \{H_k - \text{орбиты в } (G/P)_k\}. \end{aligned}$$

Выбор точки  $x \in (G/H)_k$  дает вложение множества  $k$ -плотных  $H$ -орбит в  $G/P$  множество  $k$ -плотных  $P$ -орбит в  $G/H$ . Несмотря на то, что любая  $k$ -плотная  $P$ -орбита определяется выбором точки  $x$ , на множествах  $k$ -плотных  $P$ - и  $H$ -орбит нет биекции, поскольку возможно строгое включение  $G_k/H_k \subset (G/H)_k$ .

**Предложение 4.** Пусть  $G$  — редуктивная  $k$ -группа полупростого расщепимого ранга 1 и пусть  $H$  — ее  $k$ -подгруппа,  $X := G/H$ . Тогда для множества  $k$ -плотных  $H$ -орбит на  $Y = G/P$  выполнен один из случаев:

1. Группа  $H$  — сферическая, нередуктивная

(U)  $X$  орисферическое;

$$\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y > Z\}; \quad \text{rk}_k Z = \text{rk}_k Y;$$

$$s_k(Z) = s_k(Y); \quad s \circ [Y] = [Z];$$

(TU)  $X$  не является орисферическим;

$$\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y > Z_1 > Z_2\};$$

$$\text{rk}_k Z_i = \text{rk}_k Y - 1; \quad s_k(Z_1) = s_k(Z_2);$$

$$s \circ [Y] = [Y]; \quad s \circ [Z_1] = [Z_2].$$

2. Группа  $H$  — сферическая редуктивная,

(A)  $G/H^\circ$  однородно-неприводимо,  $H$  — анизотропна;

$$\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y\}; \quad s \circ [Y] = [Y];$$

(RT)  $X$  — однородно-приводимое,  $H = L_0 A$ , где  $L_0 \subseteq L_{an}$ ;

$$\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y > Z_1, Z_2\};$$

$$\text{rk}_k Z_i = \text{rk}_k Y - 1; \quad s \circ [Y] = [Y], \quad s \circ [Z_1] = [Z_2].$$

(RI)  $H$  изотропная ( $X$  — однородно-неприводимо);

$$\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y > Z\}; \quad \text{rk}_k Z = \text{rk}_k Y - 1;$$

$$s \circ [Y] = [Y]; \quad s \circ [Z] = [Z];$$

(N)  $X$  однородно-неприводимо,  $G/H^\circ$  — однородно-приводимо.  $H = L_0 A \langle s \rangle$ , где  $s \in N_G(a) \setminus C_G(A)$ ;

$$\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y > Z\}; \quad \text{rk}_k Z = \text{rk}_k Y - 1;$$

$$s \circ [Y] = [Y]; \quad s \circ [Z] = [Z].$$

3.  $X$  не является сферическим:  $\mathfrak{B}(Y/H) = \{Y > Z\}$ .

Опишем теперь связь рассмотренного действия с геометрией кокасательного расслоения. Используя аргумент из [10, раздел 5], мы можем заменить  $X$  тотальным пространством некоторого линейного расслоения и после этого можем считать, что  $X$  невырождено в смысле [10] или даже квазиаффинно.

Пусть  $Y \in \mathfrak{B}_k(X)$  и  $\alpha \in P_k$ , определим действие  $\tilde{s}_\alpha$  на  $[Y]$  следующим образом. Для простого отражения  $s_\alpha \in W_k$  рассмотрим минимальную параболическую подгруппу  $Q$ , содержащую  $P$  и элемент  $s_\alpha$ . Рассмотрим тип разнесения  $Y$  до многообразия  $QY$ . Если он является типом (U), положим  $\tilde{s} \circ Y = QY$ , иначе положим  $\tilde{s}_\alpha \circ Y = Y$ . Мы покажем, что построенное действие  $F(W_k)$  пропускается через действие группы Вейля  $W_k$ .

Обозначим через  $\mu_X // G$  композицию отображений  $T_X^* \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^* // G \cong \mathfrak{t}^* / N_G(T)$ , где последнее отображение является изоморфизмом Шевалле и рассмотрим морфизм:

$$\tilde{T}_X := T_X^* \times_{\mathfrak{t}^* // W} \mathfrak{t}^* \otimes \mathfrak{g}^* \times_{\mathfrak{t}^* // W} \mathfrak{t}^*,$$

совпадающий с отображением моментов на первом сомножителе и с тождественным отображением на втором.

Для алгебраического замкнутого поля хорошо известна следующая

**Лемма 1** [2]. Неприводимые компоненты

$$\tilde{T}_X := T_X^* \times_{\mathfrak{t}^* // W} \mathfrak{t}^*$$

имеют одинаковую размерность и соответствуют семействам орбит максимальной сложности и ранга. Эти компоненты отображаются сюръективно на  $T_X^*$ , а  $W$  действует на них транзитивно посредством действия на втором сомножителе.

Для алгебраически незамкнутых полей требуется модифицировать указанную конструкцию. Рассмотрим следующую последовательность отображений:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^* &\xrightarrow{/W_L} \mathfrak{t}^* // L \xrightarrow{/W_k} \mathfrak{t}^* // N_G(L) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathfrak{g}^* // G \cong \mathfrak{t}^* // W, \end{aligned}$$

где был использован изоморфизм  $N_G(L) = N_G(S)$ ,  $[*] = (\mathfrak{g}^*)^A$ . Заметим, что отображение  $[*]//N_G(L) \rightarrow \mathfrak{g}^*//G$  конечно, что следует из результата Луны [11, теорема 6.16].

Заменой  $\tilde{T}_X$  для алгебраически незамкнутого поля будет следующий объект:

$$\tilde{T}_{X,P} := T_X^* \times_{t^*/W} [*/L].$$

Имеем следующую последовательность конечных морфизмов:

$$\begin{aligned} T_X^* \times_{t^*/W} [*/L] &\xrightarrow{/W_t} T_X^* \times_{t^*/W} [*/L] \xrightarrow{/W_k} \\ &\rightarrow T_X^* \times_{t^*/W} [*/N_G(L)] \rightarrow T_X^*. \end{aligned}$$

Наша цель — сопоставить каждому элементу  $\mathfrak{B}_k(X)$  неприводимые компоненты  $\tilde{T}_{X,P}$  и показать, что действие  $W_k$  на неприводимых компонентах  $\tilde{T}_{X,P}$ , соответствующее действию на правом сомножителе, соответствует действию  $F(W_k)$  на  $\mathfrak{B}_k(X)$ , определенному выше.

Для исследования компонент  $\tilde{T}_{X,P}$  рассмотрим композицию отображений:

$$T_X^* \times_{t^*/W} [*/L] \rightarrow \mathfrak{g}^* \times_{t^*/W} [*/L] \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Заметим, что последнее отображение допускает сечение над  $\mathfrak{p}_u^\perp$ , определяемое как

$$\tau: \mathfrak{p}_u^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^* \times_{t^*/W} [*/L]: \lambda \mapsto (\lambda, \lambda|_{\mathfrak{t}^*}).$$

Согласно следующей лемме это отображение определено корректно.

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{l}$  —  $L$ -эквивариантное отображение на подгруппу Леви. Тогда для  $\xi \in \mathfrak{l}$  слой  $\xi + \mathfrak{p}_u$  содержится в слое морфизма факторизации  $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*//G$ . Более того, если  $\xi_0 \in \xi + \mathfrak{p}_u$  полупрост, то полупрост также и  $\xi_0 \in P_u \xi$ .

Данное сечение  $\tau$  позволяет вложить  $\mu^{-1}(\mathfrak{p}_u^\perp)$  в  $\tilde{T}_{X,P}$  посредством отображения  $\tilde{\tau}: \eta \mapsto (\eta, \mu(\eta)|_{\mathfrak{t}^*})$ . Заметим, что  $X$  также выделяет компоненту  $T_X^* \times_{t^*/W} [*/N_G(L)]$ , обозначаемую  $\widehat{T}_X^*$ . Основным результатом работы является следующая

**Теорема 2.** Существует действие  $W_k$  на множестве  $\mathfrak{B}_k(X)$  главных семейств  $P$ -орбит. При этом  $\mathfrak{B}(X)$   $W_k$ -эквивариантно изоморфно множеству тех  $k$ -неприводимых компонент  $\tilde{T}_{X,P}$ , которые отображаются в выделенную компоненту множества  $T_X^* \times_{t^*/W} [*/N_G(L)]$  и составляют одну  $W_k$ -орбиту при действии  $W_k$  на втором сомножителе  $T_X^* \times_{t^*/W} [*/L]$ .

Многообразие  $\mu^{-1}(\mathfrak{p}_u^\perp)$  является объединением конормальных расслоений ко всем  $P_u$ -орбитам в  $X$ .

Для  $H$ -инвариантного подмногообразия  $Y$  через  $\mathcal{N}(H, Y)$  (или  $\mathcal{N}(Y)$  в случае  $H = P_u$ ) обозначим конормальное расслоение к семейству общих  $H$ -орбит в  $Y$ . Через  $\tilde{\mathcal{N}}(Y, P)$  обозначим образ  $\mathcal{N}(Y, P_u)$  в  $\tilde{T}_{X,P}$ . Поскольку любой элемент из  $\mathfrak{g}^*$  сопряжен с помощью  $G$  элементу в  $\mathfrak{p}$ , для каждой компоненты  $\tilde{T}_{X,P}$  найдется неприводимая компонента  $\tilde{\mathcal{N}}$  в  $\mu^{-1}(\mathfrak{p}_u^\perp)$  такая, что ее  $G$ -разнесение плотно. Обозначая через  $Y$  проекцию  $\tilde{\mathcal{N}}$  на  $X$ , получаем, что  $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(Y)$ .

Наша следующая цель — исследовать главные семейства  $P_u$ -орбит, для которых тройка чисел  $(c(Y/P), \text{rk}_k(Y), s_k(Y))$  максимальна в лексикографическом порядке.

**Определение 7.** Назовем элементарным радикалом  $\text{Rad}_{\text{el}} H$  (соответственно анизотропным радикалом  $\text{Rad}_{\text{an}} H$ ) наименьшую нормальную подгруппу, такую что группа  $H/\text{Rad}_{\text{el}} H$  ( $H/\text{Rad}_{\text{an}} H$ ) элементарна (соответственно анизотропна).

Легко показать, что  $\text{Rad}_{\text{el}} H$  порожден  $k$ -унипотентными подгруппами группы  $H$ , а  $\text{Rad}_{\text{an}} H$  порождается  $\text{Rad}_{\text{el}} H$  и подгруппами  $H$ , изоморфными над  $k$  группе  $\mathbb{G}_m$ .

**Определение 8.** Пусть  $H$  — связная  $k$ -группа, действующая на  $k$ -плотном многообразии  $X$ . Действие назовем элементарным (соответственно изотропным), если группа  $\text{Rad}_{\text{el}} H$  (соответственно  $\text{Rad}_{\text{an}} H$ ) действует тривиально на  $X$ .

Напомним определение нормализатора  $P$ -орбиты общего положения в  $X$ , который является параболической подгруппой в  $G$ :

$$P_{X,k} := \{g \in G \mid gPx = Px \text{ для } x \text{ из открытого плотного подмножества в } X\}.$$

Нам понадобится следующая версия теоремы о локальной структуре [6, 4.6].

**Предложение 5.** Пусть  $X$  —  $k$ -плотное  $G$ -многообразие и пусть  $P_X = L_X P_{X,u}$  — разложение Леви, где  $L_X$  нормализуется  $A$ . Тогда существует гладкое аффинное  $L_X$ -подмногообразие  $X_{\text{el}} \subseteq X$ , такое что:

1) действие  $L_X$  на  $X_{\text{el}}$  элементарно, все орбиты замкнуты, а категорный фактор  $X_{\text{el}} \rightarrow X_{\text{el}}//L_X$  является локально-тривиальным расслоением в этальной топологии. В частности, для этого действия существует стабилизатор общего положения, обозначаемый  $M_X$ ;

2) естественный морфизм  $P_{X,u} \times X_{el} = P_X *_L X_{el} \rightarrow X$  является открытым вложением.

Сечение  $X_{el}$  единственно с точностью до  $L_X$ -эквивариантного бирационального изоморфизма. Более точно, его поле рациональных функций изоморфно

$$k(X_{el}) = k(X)^{P_{X,u}} = k(X)^{P_u}. \quad (1)$$

Доказательство основной теоремы 2 основано на следующем предложении.

**Предложение 6.** *Определенное ранее действие  $\tilde{W}$  на множестве  $\mathfrak{B}(X)$  пропускается через действие  $W_k$ , оно изоморфно действию на  $k$ -неприводимых компонентах  $\tilde{T}_{X,P}$ , отображающихся в выделенную компоненту  $T_X^* \times_{T^*W} \mathbb{A}^1 // N_G(L)$ , где биекция на множествах определяется посредством отображения  $Y \mapsto G\tilde{N}(Y, P_u)$ .*

В свою очередь предложение основано на исследовании ситуации, когда подъем от  $Y$  до  $QY$  имеет тип  $(U)$ . И в этом случае ключевым является факт о том, что из плотности  $G\tilde{N}(QY, P_u)$  в  $T_X^*$  следует также плотность  $G\tilde{N}(Y, P_u)$  в  $T_X^*$ . Доказательство этого факта основано на следующих леммах.

**Лемма 3.** *Пусть  $Y$  — главное  $P$ -инвариантное подмногообразие  $X$ . Тогда существует последовательность  $P_1, \dots, P_l$  минимальных параболических подгрупп, содержащих  $P$ , таких что в последовательности  $Y_i := P_i \dots P_1 Y$  подъем от  $Y_{i-1}$  к  $Y_i$  имеет тип  $(U)$  и  $P_l \dots P_1 Y = X$ . Более того, существует стабилизатор общего положения для действия  $P$  на  $Y_i$ , а также существует стабилизатор общего положения  $L(Y)$  для действия  $L$  на  $Y_i \cdot P_u$ , который сопряжен  $L(X)$  с помощью элемента  $w := s_1 \dots s_{l-1} \in N_G(S)_k$ .*

Доказательство леммы 3 основано на соображении, что при подъеме от  $Y$  до  $P_1 Y$  типа  $(U)$  имеет место включение  $sP_u \supset P_u$ , а также на следующей лемме.

**Лемма 4.** *Пусть  $X$  — многообразие с действием минимальной параболической подгруппы  $P$ . Рассмотрим  $k$ -группу  $H$  с анизотропным фактором  $H/H_u$ , с таким действием на  $X$  над полем  $k$ , что для некоторой точки  $x \in X_k$  выполняется  $Hx \subset Px$ . Тогда  $H_u x \subset P_u x$  и  $Hx \subset Px$ .*

Заметим, что если  $Z$  —  $L$ -инвариантное рациональное сечение для  $P_u$ -орбит  $Y$  (которое всегда существует), то оно также является сечением для семейства  $sP_u s$  орбит в  $QY$ , а значит,  $sZ$  является сечением для семейства  $P_u$ -орбит в  $QY$ . Принимая во внимание, что  $s \in N_G(S)_k$  нормализует  $L$ , это показывает, что стабилизатор общего поло-

жения  $L$  на  $Y_i \cdot P_i$  изоморфен  $L(Y) = s_1 L(P_1 Y) s_1 = w L(X) w^{-1}$ .

**Следствие 2.** *Пусть  $Q$  — минимальная  $k$ -параболическая подгруппа, собственно содержащая  $P$ ,  $s$  — представитель в нормализаторе соответствующего простого отражения. Пусть  $Y \in \mathfrak{B}(X)$  такое подмногообразие, что  $QY$  является разнесением типа  $(U)$ . Тогда для всех  $u \in Y$  имеем*

$$sN(QY, P_u) = N(sP_u s, sP_u s) \subset (sPs \cap Q)N(Py, P_u).$$

Ранее было замечено, что  $P_u u \subset sP_u s u$ . Таким образом, ограничение  $N(sP_u s, sP_u s)$  на  $Py$  содержится в  $N(Py, P_u)$ , и мы имеем  $sN(P_1 Y, P_u) = N(sP_u s, sP_u s) \subset (sPs \cap P_1)N(Py, P_u)$ .

Согласно [6], для квазиаффинного  $X$  существует  $\chi \in \Lambda_k(X)$ , удовлетворяющее  $\langle \chi, \alpha \rangle \neq 0$  для всех  $\alpha \in \Delta_{p_{X,u}}$ . Такие  $\chi$  могут быть также охарактеризованы эквивалентным образом:  $s_\alpha \chi \neq \chi$  для  $s_\alpha \in N_G(A) \setminus L_X$ . Вложим  $\Lambda_k(X)$  в качестве подрешетки  $\alpha_X^*$ . Множество  $\alpha_X^{pr}$  таких  $\chi \in \alpha_X^*$ , которое удовлетворяет данному условию, плотно по Зарисскому  $\alpha_X^*$ . Через  $A_0$  обозначим общее ядро в  $A$  характеров  $P$ -полуинвариантных функций ( $\alpha = \alpha_0 + \alpha_X$ ). Рассмотрим  $P_X$ -полуинвариантную функцию  $f_\chi \in k(X)_\chi^{(Q)}$ , следуя [10], определим  $P_X$ -эквивариантное отображение

$$\begin{aligned} \Psi_\chi: X \setminus \text{div}(f_\chi) &\rightarrow \mathfrak{g}^*, \\ x &\mapsto l_x, \quad \text{где} \quad l_x(\xi) = \frac{\xi f_\chi}{f_\chi}(x). \end{aligned}$$

Отображение  $\Psi_\chi: X^\circ \rightarrow T_X^*$ , где  $X^\circ = X \setminus \text{div}(f_\chi)$ , отображает точку  $u \in X^\circ$  в значение соответствующего сечения  $f_\chi^{-1}(df_\chi)$  в  $u$ , дает следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & T_X^* & \\ \Psi_\chi \nearrow & & \searrow \mu \\ X^\circ & \xrightarrow{\Psi_\chi} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Заметим, что  $\Psi_\chi(X)$  является подмножеством  $N(X)$ , поскольку дифференциальная 1-форма  $f_\chi^{-1}(df_\chi)$  аннулируется векторным полем  $p_u$ . Также согласно [6, (4.5)] образ  $\Psi_\chi(X^\circ)$  равен  $\xi + p_{X,u}$ . Многообразие  $\mathcal{H}_\chi = \Psi_\chi^{-1}(\chi) \subset X^\circ$  (или более кратко  $\mathcal{H}$ ) дает рациональное сечение для  $P_u$ -орбит (которые также являются  $P_{X,u}$ -орбитами) в  $X^\circ$ .  $P_X$ -эквивариантное отображение  $\Psi_\chi$  вкладывает  $\mathcal{H}$  в  $N(X)$ , этот образ обозначим  $\tilde{\mathcal{H}} := \Psi_\chi(\mathcal{H})$ .

Далее, воспользовавшись редуктивностью  $L$ , зафиксируем  $L$ -эквивариантный изоморфизм  $\mathbb{I} \cong \mathbb{I}^*$  и расщепление  $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{I}^* \oplus \mathbb{I}^\perp$ .

**Предложение 7.** Пусть  $G$  —  $k$ -группа, действующая на  $k$ -плотном квазиаффинном  $X$ . Для  $X_{\text{el}}$ , которое бирационально  $X$ , рассмотрим  $\mu: T^*X_{\text{el}} \rightarrow \mathbb{I}^*$ , соответствующее отображение моментов. Пусть  $Y \in \mathcal{B}(X)$ , для разложения элемента  $w := s_1 \dots s_l \in W$  положим  $Y_i := P_i \dots P_l Y$ , а также предположим, что подъем от  $Y_i$  до  $Y_{i+1}$  имеет тип  $(U)$ . Тогда

(i)  $G \cdot \mathcal{N}(Y)$  плотно  $T^*X$ ;

(ii)  $\overline{\mu(\mathcal{N}(Y, P_u))} = P_w \mu_i(T^*X_{\text{el}})$ ,  
 $\overline{\mu(\mathcal{N}(Y, P'))} = P_w \alpha_X$ ;

(iii)  $w\mathcal{H}$  —  $L$ -инвариантное рациональное сечение для множества общих  $P_u$ -орбит в  $Y$ .

Доказательство предложения 7 мы опустим, поскольку оно достаточно технично. Предложение 6 существенно опирается на предложение 7, на следствие 2, а также на соображение, что для подъема от  $Y$  до  $QY$ , отличного от типа  $(U)$ , расщепимый ранг любого необщего семейства  $P$ -орбит  $Y' \subset QY$  строго меньше расщепимого ранга  $QY$ . Дело в том, что согласно предложению 7 (ii) образ отображения моментов выражается через  $\alpha_X$ , а образ отображения моментов конормально-го расслоения  $\mathcal{N}(Y', P)$  выражается через алгебру Ли расщепимого подтора в  $A$ , действующего эффективно на  $P$ -полуинвариантных функциях  $Y'$ , если расщепимый ранг  $Y'$  строго меньше  $\text{rk}_k(X)$ , это дает строгое включение для образа отображения моментов. Тем самым,  $G \cdot \mathcal{N}(Y', P)$  не может быть плотно в  $T_X^*$ .

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа В.С. Жгуна финансировалась в рамках проекта “Исследование групповых алгебраических многообразий и их связей с алгеброй, геометрией и теорией чисел” (№ 0065-2018-0019). Также исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Knop F. On the set of orbits for a Borel subgroup // Commentarii Mathematici Helvetici. 1995. V. 70. № 1. P. 285–309.
2. Springer T.A. Linear algebraic groups // Springer Science & Business Media. 2010.
3. Platonov V., Rapinchuk A. Algebraic Groups and Number Theory. 1st Ed. Academic Press, 1993. V. 139.
4. Жгун В.С., Кноп Ф. Сложность действия редуктивных групп над алгебраически незамкнутым полем и сильная стабильность действий на флаговых многообразиях // ДАН. 2019. Т. 485. № 1. С. 22–26.
5. Винберг Э.Б. Сложность действий редуктивных групп // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 1. С. 1–13.
6. Knop F., Krotz B. Reductive group actions. arXiv preprint arXiv:1604.01005 (2016).
7. Brion M. Quelques proprietes des espaces homogenes spheriques // Manuscripta Math. 1986. V. 55. № 2. P. 191–198.
8. Borel A., Tits J. Groupes reductifs // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1965. V. 27. P. 55–150.
9. Kempf G. Instability in invariant theory // Ann. Math. 1978. V. 108. № 2. P. 299–316.
10. Knop F. The asymptotic behavior of invariant collective motion // Inventiones mathematicae. 1994. V. 116. № 1. P. 309–328.
11. Popov V.L., Vinberg E.B. Invariant theory // Algebraic geometry. IV. Encyclopedia Math. Sci. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1994. V. 55. P. 123–278.

## ON THE ACTION OF RESTRICTED WEYL GROUP ON THE SET OF ORBITS OF A MINIMAL PARABOLIC SUBGROUP

V. S. Zhgoon<sup>1,2</sup> and F. Knop<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Federal Scientific Center Science Research Institute of System Studies, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup>Friedrich Alexander University, Erlangen–Nurnberg, Germany

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov October 7, 2019

Received October 16, 2019

We construct the action of the restricted Weyl group on the set of principle families of orbits of a minimal parabolic subgroup over algebraically non-closed field. Also we relate this action with the action on polarized cotangent bundle. These results generalize corresponding results of Knop on the action of the Weyl group on the families of Borel orbits of the maximal complexity and rank.

**Keywords:** reductive group actions over algebraically non-closed fields, Weyl group, orbits of minimal parabolic subgroup, cotangent bundle