

УДК 517.927

ДИФФЕРЕНЦИАЛ СТИЛТЬЕСА В ИМПУЛЬСНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

© 2020 г. А. Д. Баев^{1,*}, Д. А. Чечин¹, М. Б. Зверева^{1,**}, С. А. Шабров^{1,***}

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 28.09.2019 г.

Поступило 11.10.2019 г.

После доработки 14.10.2019 г.

Принято к публикации 05.11.2019 г.

В настоящей работе изучается импульсная нелинейная задача, допускающая разрывные решения, являющиеся функциями ограниченной вариации. Такая задача моделирует деформации разрывной струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами) с упругими опорами в виде линейных и нелинейных пружин (например, пружин с разными витками, деформации которых не подчиняются закону Гука). Модель описывается дифференциальным уравнением второго порядка с производными по специальным мерам и краевыми условиями первого рода. Доказаны теоремы существования решений, получены условия существования неотрицательных решений.

Ключевые слова: функция ограниченной вариации, интеграл Стильтьеса, мера, производная по мере, стильтьесовская струна

DOI: 10.31857/S2686954320010117

В последнее время активно ведутся исследования дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля (Шрёдингера) для случаев разнообразных импульсных возмущений (сингулярных потенциалов). Особенно выделим публикации А.А. Шкаликова, А.М. Савчука, Б.С. Митягина, В.А. Михайлеца (см. [1–6]) и др., в которых методами теории обобщенных функций решаются задачи, касающиеся структуры спектра, его асимптотики, спектральной полноты, разнообразных свойств непрерывного спектра, структуры сингулярных компонент спектра (спектральных лакунов, зон неустойчивости) и проч.

В то же время поточечный анализ решения у математической модели очень важен для приложений. Наличие особенностей у изучаемой системы (как внутренних, так и внешних), как правило, приводит не только к потере гладкости решения дифференциальной модели, но и к появлению разрывов у решения. Последнее закрывает возможность использования классических производных как при моделировании, так и при анализе. Применение теории обобщенных функций (по Соболеву–Шварцу, Коломбо и др.) ситуацию

не спасает: удастся доказать лишь наличие слабого решения. При этом приходится преодолевать ряд трудно разрешимых проблем (например, умножения разрывной функции на обобщенную).

Подход к поточечному анализу решений уравнения

$$-(pu')' + qu = f$$

в случае особенностей типа функции Дирака в потенциале q , когда q может считаться обобщенной производной от функции ограниченной вариации Q , был разработан Ю.В. Покорным в [7, 8], где в развитие идей В. Феллера и М.Г. Крейна (см. комментарии в [9]), уравнение с обобщенными коэффициентами и правой частью

$$-(pu')' + Q'u = F'$$

заменялось поточечно задаваемым уравнением

$$-(pu')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma.$$

Дальнейшее развитие этот подход для случая непрерывных решений получил в работах [10, 11].

Для случая разрывных решений предыдущее уравнение имеет вид

$$-(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = F'_{[\sigma]}.$$

Здесь p , Q , F — функции ограниченной вариации на отрезке $[0, \ell]$; решения $u(x)$ принадлежат классу μ -абсолютно непрерывных функций на $[0, \ell]$, μ -производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, \ell]$; внутреннее дифференцирова-

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

*E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

**E-mail: margz@rambler.ru

***E-mail: shaspoteha@mail.ru

ние ведется по μ -мере, порождаемой строго возрастающей на $[0, \ell]$ функцией $\mu(x)$, соизмеримой с наблюдаемым процессом. Строго возрастающую функцию $\sigma(x)$ можно подобрать таким образом, что она будет нести в себе все особенности рассматриваемой задачи. Точнее, $\sigma(x)$ будет являться разрывной лишь в точках разрыва μ , p , Q , F , так что $[\sigma]$ -мера этих точек оказывается отличной от нуля. При этом $[\sigma]$ -мера точек разрыва $u(x)$ “расщепляется” в силу того, что функция $\sigma(x)$ в этих точках имеет два скачка (левый и правый), равных

$$\Delta^- \sigma(\xi) = \sigma(\xi) - \sigma(\xi - 0),$$

$$\Delta^+ \sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi)$$

соответственно. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о “расщепленной” мере, мы заключаем порождающую меру функцию в квадратные скобки. Отметим, что для восстановления функции по ее $[\sigma]$ -производной необходимо использовать π -интеграл, введенный Ю.В. Покорным в [8].

В настоящей работе мы применяем подход Ю.В. Покорного к нелинейным граничным задачам.

Рассмотрим на $[0; \ell]$ нелинейную математическую модель

$$Lu \equiv -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = f(x, u), \quad (1)$$

$$u(0) = u(\ell) = 0,$$

возникающую, например, при моделировании деформаций разрывной струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами), натянутой вдоль отрезка $[0, \ell]$ и подпертой (не более чем в счетном количестве точек) как обычными пружинами, деформации которых подчиняются законам Гука, так и пружинами с разными витками, деформации которых закону Гука не подчиняются и задаются некоторой функцией. При этом к отдельным точкам струны могут быть приложены нелинейные импульсные внешние воздействия.

В уравнении системы (1) внутренняя производная понимается как производная по обычной мере, внешняя — как производная по “расщепленной” мере, понимаемая в смысле Ю.В. Покорного, т.е. обрабатываемая интегрированием с помощью π -интеграла. Последнее означает, что функция $g(x)$ называется $[\sigma]$ -производной от функции $G(x)$, если

$$G(x) - G(0) = \int_0^x g(s) d[\sigma].$$

Таким образом, во всякой точке ξ разрыва функции $\sigma(x)$ у функции $g(x)$ возникает два собственных значения, вообще говоря, отличных от предельных, определяемых равенствами

$$g(\xi^1) = G'_{[\sigma]}(\xi^1) = \frac{\Delta^- G(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)},$$

$$g(\xi^2) = G'_{[\sigma]}(\xi^2) = \frac{\Delta^+ G(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)}.$$

Уравнение (1) рассматривается на специальном расширении $\overline{[0; \ell]}_{[\sigma]}$ отрезка $[0; \ell]$, которое строится следующим образом. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $J_\mu = [0; \ell] \setminus S(\mu)$ введем метрику $\rho(x; y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство J_μ является неполным. Обозначим через $\overline{[0; \ell]}_\mu$ его стандартное пополнение. Множество $\overline{[0; \ell]}_\mu$ вместо каждой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит элементы $\{\xi^1; \xi^2\}$, появившиеся при пополнении. При этом $x < \xi^1 < \xi^2 < y$ в смысле естественной упорядоченности элементов, если $x < \xi < y$. Определим $u(\xi^1) = u(\xi - 0)$, $u(\xi^2) = u(\xi + 0)$. Пусть S — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не являющихся точками разрыва $\mu(x)$. Рассмотрим множество $\overline{[0; \ell]}_\mu \setminus S$, пополним его по метрике $\rho(x; y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ и добавим к полученному пополнению элементы из S . Обозначим данное множество через $\overline{[0; \ell]}_{[\sigma]}$. Обозначим $\overline{[0; \ell]}_S = \overline{[0; \ell]}_{[\sigma]} \cup S(\mu)$.

Таким образом, в точках ξ^1 и ξ^2 уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta^- (pu'_\mu)(\xi) + u(\xi - 0) \Delta^- Q(\xi) =$$

$$= f(\xi^1, u(\xi - 0)) \Delta^- \sigma(\xi),$$

$$-\Delta^+ (pu'_\mu)(\xi) + u(\xi + 0) \Delta^+ Q(\xi) =$$

$$= f(\xi^2, u(\xi + 0)) \Delta^+ \sigma(\xi).$$

В точках s разрыва функции $\sigma(x)$, в которых $\mu(x)$ является непрерывной, уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta(pu'_\mu)(s) + u(s) \Delta Q(s) = f(s, u(s)) \Delta \sigma(s),$$

где $\Delta v(s) = v(s + 0) - v(s - 0)$.

Решение (1) мы будем искать в классе E μ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций, первая производная которых $[\sigma]$ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$. Относительно коэффициентов $p(x)$, $Q(x)$ и функции $f(x, u)$ мы делаем следующие предположения:

1) $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;

2) функция $p(x)$ положительна и отделена от нуля;

3) функция $Q(x)$ не убывает на $[0; \ell]$;

4) $f(x, u)$ удовлетворяет условию Каратеодери, т.е.

а) при каждом фиксированном u функция $f(x, u)$ является $[\sigma]$ -измеримой;

б) при всех $x \in [0; \ell]_\mu$ $f(x, u)$ непрерывна по u ;

в) существует $[\sigma]$ -суммируемая с некоторой степенью $p \in [1, \infty)$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x, u)| \leq m(x)$ для почти всех x (в смысле $[\sigma]$ -меры) и u . Последнее позволяет нам гарантировать, что оператор суперпозиции $[Fu](x) = f(x, u(x))$ непрерывно действует из C_μ (пространства μ -непрерывных на $x \in [0; \ell]_\mu$ функций) в $L_{r, [\sigma]}$ ($[\sigma]$ -суммируемых с некоторой степенью r функций).

При выполнении условий 1)–3) нетрудно доказать разрешимость в классе E линейной задачи (когда в правой части системы (1) стоит $f(x)$ – $[\sigma]$ -суммируемая функция); показать существование и единственность функции влияния $H(x, s)$ линейной граничной задачи $Lu = f, u(0) = u(\ell) = 0$. Ключевым моментом для наших результатов является следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–3). Тогда существуют такое положительное число κ и такие $[\sigma]$ -суммируемые почти всюду положительные функции $v_1(s), v_2(s)$, что для всех x, s, τ , принадлежащих $[0; \ell]_\mu$, справедливы неравенства

$$H(x, s) \geq \kappa u_0(x) H(\tau, s), \quad (2)$$

$$u_0(x) v_1(s) \leq H(x, s) \leq u_0(x) v_2(s), \quad (3)$$

где

$$u_0(x) = (\mu(x) - \mu(0))(\mu(\ell) - \mu(x)).$$

Данная теорема позволяет получить достаточные условия существования решений нелинейных краевых задач.

Теорема 2. Пусть помимо условий 1)–4) выполнены следующие условия:

(i) функция $f(x, u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0; \ell]_\mu$ и $f(x, 0) \geq 0$;

(ii) существует N пар чисел α_i, β_i , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n,$$

причем

$$f(x, \beta_k u_0(x)) \int_0^\ell v_2(s) d[\sigma(s)] \leq \beta_k, \quad x \in [0; \ell]_\mu; \quad (4)$$

(iii) для каждого k существует множество w_k положительной $[\sigma]$ -меры такое, что

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) \int_{w_k} v_1(s) d[\sigma(s)] \geq \alpha_k, \quad (5)$$

$$x \in [0; \ell]_\mu, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда если неравенства (4) и (5) превращаются в строгие на множествах положительной $[\sigma]$ -меры, то задача (1) имеет $2N - 1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2N - 1) \text{ и } u_{2i-1}(x) \leq u_{2i+1}(x) \\ (i = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–4) и

(i) $f(x, u) \geq 0$ при всех $x \in [0; \ell]_\mu$ и $u \geq 0$;

(ii) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0; 1)$ краевая задача $Lu = \lambda f(x, u)$, $u(0) = u(\ell) = 0$, не имеет решений $u(x)$ таких, что $u(x) \geq Ru_0(x)$.

Тогда (1) имеет хотя бы одно нетривиальное отрицательное решение.

Теорема 4. Пусть наряду с условиями 1)–4) выполнены следующие:

(i) $f(x, 0) \geq 0$ при всех $x \in [0; \ell]_\mu$ и $u \geq 0$;

(ii) $f(x, 0) \equiv 0$;

(iii) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0; 1)$ граничная задача $Lu = \lambda f(x, u)$, $u(0) = u(\ell) = 0$ не имеет решений $u(x)$ таких, что $u(x) \geq Ru_0(x)$;

(iv) для некоторого $r > 0$ и некоторой функции $h(x) \geq 0$, отличной от тождественного нуля, такой, что $h(x) \in L_\infty[0; \ell]$ (где L_∞ – пространство измеримых ограниченных в существенном функций) при достаточно малом $\lambda > 0$ задача

$$Lu = f(x, u) + \lambda h(x),$$

$$u(0) = u(\ell) = 0,$$

не имеет решений, для которых

$$\tilde{u}_0(x) \cdot \|u\|_{C_\mu} \leq u(x) \leq r,$$

где $\tilde{u}_0(x) = Mu_0(x)$. (M – некоторая положительная константа.) Тогда задача (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение.

Теорема 5 (Случай сильной нелинейности). Пусть вместе с условиями 1)–4) выполнены следующие:

(i) $f(x, 0) \equiv 0$;

(ii) при некоторых $0 < r < R < \infty$ справедливо

а) краевая задача $Lu = \lambda f(x, u)$, $u(0) = u(\ell) = 0$ при любых $\lambda \in (0; 1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам

$$u_0(x) \cdot \|u\|_{C_\mu} \leq u(x) \leq r;$$

б) для некоторой $h(x)$ (отличной от тождественного нуля), принадлежащей $L_{1, [\sigma]}[0; \ell]$, и для любого

$\lambda > 0$ задача $Lu = f(x, u) + \lambda h(x)$, $u(0) = u(\ell) = 0$ не имеет решений, для которых

$$u_0(x) \|u\|_{C_u} \leq u(x) \leq R.$$

Тогда нелинейная граничная задача (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037) и Российского научного фонда (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском государственном университете (теоремы 1–4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук А.М. О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 2. С. 113–139.
2. Иванов А.С., Савчук А.М. След порядка минус один для струны с сингулярными весом // Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 2. С. 197–215.
3. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 2. С. 231–242.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. № 4. С. 34–53.
5. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61. В. 4 (370). С. 77–182.
6. Михайлец В.А. Структура непрерывного спектра одномерного оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 2. С. 90–93.
7. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. 1999. Т. 364. № 2. С. 167–169.
8. Покорный, Ю.В. О дифференциалах Стильтеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля // ДАН. 2002. Т. 383. № 5. С. 1–4.
9. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Пер. с англ. М.: Мир, 1968. 749 с.
10. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // УМН. 2008. Т. 63. В. 1 (379). С. 111–154.
11. Покорный Ю.В. и др. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М.: Физматлит, 2009. 192 с.

STIELTJES DIFFERENTIAL IN IMPULSE NONLINEAR PROBLEMS

A. D. Baev¹, D. A. Chechin¹, M. B. Zvereva¹, and S. A. Shabrov¹

¹Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev September 28, 2019

Received October 11, 2019

In this paper we study an impulse nonlinear problem that admits discontinuous solutions that are functions of bounded variation. Such problem simulates the deformation of a discontinuous string (chains of strings fastened together by springs) with elastic supports in the form of linear and non-linear springs (for example, springs with different turns, the deformations of which do not obey Hooke's law). The model is described by a second-order differential equation with derivatives in special measures and first type boundary conditions. The theorems of existence solutions are proved, and conditions of existence of non-negativeness solutions are obtained.

Keywords: bounded variation function, Stieltjes integral, measure, derivative in measure, Stieltjes string