

УДК 517.518.1+514.7

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФИКОВ НА ПРОСТРАНСТВАХ КАРНО–КАРАТЕОДОРИ С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2020 г. М. Б. Карманова*

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 07.05.2019 г.

Поступило 14.05.2019 г.

После доработки 14.05.2019 г.

Принято к публикации 06.11.2019 г.

Введено понятие сублоренцевой структуры с многомерным временем на пространствах Карно–Каратеодори. Установлено свойство пространственноподобия классов поверхностей-графиков и доказан сублоренцев аналог формулы площади.

Ключевые слова: пространство Карно–Каратеодори, полиномиальный субриманов дифференциал, внутренняя сублоренцева мера, формула площади

DOI: 10.31857/S2686954320010154

Цель исследования – распространение результатов работы [1] для групп Карно на пространства Карно–Каратеодори. Напомним, что локально такие структуры похожи, однако они существенно различаются в тонких свойствах. В [2] показано, что вид полиномиального субриманова дифференциала $\hat{D}_p\varphi_\Gamma$ графика φ_Γ , построенного по отображению φ , является более сложным сравнительно с группами Карно: в каждой точке x матрица его дифференциала (при перегруппировке полей по степеням) является суммой блочно-нижнетреугольной матрицы и матрицы, все элементы которой сравнимы с $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$, где ρ – расстояние, эквивалентное риманову. Для вывода формулы вычисления внутренней меры поверхностей-графиков в [2] использовались два разных адаптированных, или внутренних, базиса в образе: первый позволял получить “классический” вид формулы, когда “диагональные” блоки матрицы $D(\hat{D}_p\varphi_\Gamma)$ совпадают с суммой единичной матрицы и “диагонального” блока $D(\hat{D}_p\varphi)$ (или $\hat{D}\varphi$), а второй – “общий”, когда в каждой точке x эти блоки отличаются от классического варианта на элементы, сравнимые с $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$. В силу специфики строения сублоренцевых шаров (в частности, их неограниченности) форма и мера их сечения плоскостями-образами $D(\hat{D}_p\varphi_\Gamma)$ зависит от вида тако-

го дифференциала; кроме того, этот вид влияет на свойство пространственноподобия поверхности. Так как ограничения, обеспечивающие это свойство, на внедиагональных элементах не формулируются явно и, следовательно, труднопроверяемы (в силу зависимости от структурных функций, матриц перехода и многих других параметров), то в данной работе мы будем использовать первый вид внутреннего базиса, приводящий матрицу $D(\hat{D}_p\varphi_\Gamma)$ к блочно-диагональному виду. В таком случае требования будут накладываться на блоки h -дифференциала отображения (если φ гладкое и контактное) или на диагональные блоки дифференциала полиномиального h -дифференциала (если φ гладкое и неконтактное).

Определение 1 (см., например, [4]; ср. [3]). Фиксируем связное риманово C^∞ -многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N . Пусть в его касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует фильтрация $H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$ подрасслоениями такая, что для каждого $p \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{M}$ с набором полей $X_1, \dots, X_N$ класса C^1 , обладающая следующими свойствами:

1) подпространство $H_i\mathbb{M}(v) = \text{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$ имеет размерность $\dim H_i$ независимо от v , $i = 1, 2, \dots, M$;

2) верны включения $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, 2, \dots, M$, $i + j \leq M$.

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

*E-mail: maryka@math.nsc.ru

В этом случае набор $(\mathbb{M}, H_1, \dots, H_M)$ называется пространством Карно–Каратеодори. Если, кроме того, выполнено 3), то набор $(\mathbb{M}, H_1, \dots, H_M)$ — многообразие Карно:

$$3) H_{j+1} = \text{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}, \text{ где } k = \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor, H_0 = \{0\}, j = 1, 2, \dots, M-1.$$

Для упрощения обозначений пространство Карно–Каратеодори (или многообразие Карно) будем обозначать символом $\mathbb{M}$. Подрасслоение $H_1\mathbb{M}$ называется горизонтальным. Число M называется глубиной многообразия $\mathbb{M}$.

Определение 2. Степень поля $\deg X_k$ равна $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$.

Замечание 1. Из условия 2) определения 1 следует, что

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k: \deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \quad (1) \\ i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Опишем локальную однородную группу и ее главные свойства.

Теорема 1 ([5]). Фиксируем $u \in \mathbb{M}$. Набор

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}(u) & \text{из (1),} \\ \text{если } \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

определяет нильпотентную градуированную алгебру Ли.

Для фиксированного $u \in \mathbb{M}$ построим [5] алгебру Ли $\mathfrak{g}^u$ со структурными постоянными теоремы 1 как нильпотентную градуированную алгебру Ли векторных полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{R}^N$ такую, что экспоненциальное отображение $(x_1, \dots, x_N) \mapsto$

$$\mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)'\right)(0) \text{ тождественно [6]. В силу}$$

этого $x_i = \exp(x_i (\hat{X}_i^u)')(0)$. Следовательно, $e_i = (\hat{X}_i^u)'(0)$. Соответствующую группу Ли обозначим $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$.

Определение 3. Пусть $u \in \mathbb{M}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in B_E(0, r)$, где $B_E(0, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^N$. Определим $\theta_u: B_E(0, r) \rightarrow \mathbb{M}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u). \text{ Известно, что } \theta_u$$

является C^1 -гладким диффеоморфизмом, если $0 < r \leq r_u$ для некоторого $r_u > 0$. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется нормальными координатами (относительно $u \in \mathbb{M}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

Используя отображение θ_u , перенесем поля $(\hat{X}_i^u)'$ на $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{M}$: $\hat{X}_i^u = (\theta_u)_*(\hat{X}_i^u)'$.

Определение 4. Группа, ассоциированная с алгеброй Ли $\{\hat{X}_i^u\}_{i=1}^N$ в точке $u \in \mathbb{M}$, называется локальной однородной группой $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$. Определим ее так, чтобы отображение θ_u было локальным групповым изоморфизмом окрестностей единиц $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ и $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$.

Определение 5. Если $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$,

то положим $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{1/\deg X_i}\}$. Величина

$d_\infty^u(v, w)$ для $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i \hat{X}_i^u\right)(v)$ определяется аналогично; см. подробности в [5].

Определение 6 (ср. [7]). Пусть $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ — пространства Карно–Каратеодори, $E \subset \mathbb{M}$, $\psi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, и функция $\tilde{d}: \psi(E) \times \tilde{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна, равна нулю только на одинаковых элементах и симметрична. Отображение ψ полиномиально субриманово дифференцируемо, или полиномиально hc -дифференцируемо, в (предельной) точке $x \in E$ относительно $\tilde{d}$, если существует $\mathcal{L}_x: \mathcal{G}^x\mathbb{M} \rightarrow \mathcal{G}^{\psi(x)}\tilde{\mathbb{M}}$ такое, что

$$1) \tilde{d}(\psi(w), \mathcal{L}_x\langle w \rangle) = o(d_\infty(x, w)), E \ni w \rightarrow x;$$

$$2) \mathcal{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w), \text{ где } L_x \text{ — полином}$$

$$\text{от } w_1, \dots, w_N, \text{ а } \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(x) = w.$$

Отображение $\mathcal{L}_x$ называется полиномиальным субримановым дифференциалом, или полиномиальным hc -дифференциалом, отображения ψ в x , и обозначается $\hat{D}_p\psi(x)$.

Полиномиальная субриманова дифференцируемость является развитием следующей концепции субримановой дифференцируемости [8].

Определение 7 [8]. Пусть $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ — пространства Карно–Каратеодори, $E \subset \mathbb{M}$ — измеримое множество, и $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$. Отображение φ является hc -дифференцируемым, или дифференцируемым в субримановом смысле, в (предельной) точке $x \in E$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x: \mathcal{G}^x\mathbb{M} \rightarrow \mathcal{G}^{\varphi(x)}\tilde{\mathbb{M}}$ такой, что

$$d_\infty(\varphi(y), \mathcal{L}_x\langle y \rangle) = o(d_\infty(x, y)) \\ \text{при } E \ni y \rightarrow x.$$

Теорема 2 [8]. *Гладкие контактные отображения, а именно, дифференциал которых переводит горизонтальные поля в горизонтальные, многообразий Карно в пространства Карно–Каратеодори, непрерывно h -дифференцируемы всюду.*

Предположение 1. Будем рассматривать $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{M}$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$ – открытое множество; $\mathbb{M}$ ($\tilde{\mathbb{M}}$) – пространство Карно–Каратеодори топологической размерности N ($\tilde{N}$) с гладкими базисными полями $X_1, \dots, X_N$ ($\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$) и фильтрацией $H_1, \dots, H_M$ ($\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{\tilde{M}}$); $\varphi \in C^{\hat{M}}(\Omega, \mathbb{M})$, где $\hat{M} = \max\{M, \tilde{M}\}$; $\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ – (эквивариантное) пространство Карно–Каратеодори топологической размерности $\hat{N} = N + \tilde{N}$ с базисными полями $X_1, \dots, X_N, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, имеющими те же степени, что и на $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$, соответственно, распределение $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$ интегрируемо, и $\mathbf{0} = \mathbb{M} \cap \tilde{\mathbb{M}}$; рассматриваемая окрестность пространства Карно–Каратеодори $\mathbb{U}$ и значения $\varphi(x)$ таковы, что все необходимые понятия: экспоненциальные отображения и обратные к ним, локальные однородные группы $\mathcal{G}^u \mathbb{U}$, а также значения φ_Γ , определены корректно.

Замечание 2. Здесь $\mathbf{0}$ – некоторая точка, являющаяся единственным пересечением $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$, принятая за начало координат при построении графиков.

Введем определение отображения-графика на пространствах Карно–Каратеодори.

Определение 8 (ср. [7]). Пусть $\Omega \ni x \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(\mathbf{0})$. Положим действие отображения-графика $\varphi_\Gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ равным

$$\Omega \ni x \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(x) \in \mathbb{U}.$$

В [2] установлен следующий результат для отображений-графиков.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предположения 2, и $\varphi \in C^{\hat{M}}(\Omega, \mathbb{M})$. Отображение-график $\varphi_\Gamma: \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и $\hat{D}_\varphi \varphi_\Gamma(x)$ сопоставляет элементу $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$ в нормальных координатах*

относительно $\varphi_\Gamma(x)$ набор $(\Delta_1(x, y), \dots, \Delta_{N+\tilde{N}}(x, y))$, где

$$\begin{aligned} \Delta_k(x, y) &= y_k + \mathcal{P}_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \Delta_k(x, y) &= (\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi^\Delta(x \rightarrow y)(x) \langle y \rangle)_k + \mathcal{P}_k(x, y), \\ &\quad k > N, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi^\Delta(x \rightarrow y)(x) \langle y \rangle = \hat{D}_\varphi \varphi(x) \langle y \rangle$ – аппроксимация с точностью до $o(d_\infty(x, y)^{\hat{M}})$ величины $\theta_{\varphi(x)}^{-1}(\varphi(y))$, а $\mathcal{P}_k(x, y)$ – полиномы от $y_1, \dots, y_N$ и величин, сравнимых с $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$. Такой набор аппроксимирует $\varphi_\Gamma(y)$ с точностью до $o(d_\infty(x, y)^{\hat{M}})$ при любой невырожденной замене базиса.

При ограничениях на $\rho(\mathbf{0}, \varphi(x)) = \rho(x, \varphi_\Gamma(x))$ отображение-график φ_Γ взаимно-однозначно и $D(D_\varphi \varphi_\Gamma(x))(x)$ невырожден. Следовательно (см. [2]), существует адаптированный базис $\{^x X_1, \dots, ^x X_N, ^x \tilde{X}_1, \dots, ^x \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$, при перегруппировке полей по степеням приводящий матрицу $D(D_\varphi \varphi_\Gamma(x))(x)$ к блочно-диагональному виду (ср. [9]; см. описание и принцип построения в [10, определение 4.1, теорема 4.3, шаги 3–4]).

Опишем сублоренцеву структуру на $\mathbb{U}$. Положим $\hat{H}_k = \text{span}\{H_k, \tilde{H}_k\} = \text{span}\{\hat{H}_k^+, \hat{H}_k^-\}$, $\hat{H}_k^- \subset \tilde{H}_k$, причем каждое базисное поле степени k принадлежит либо $\hat{H}_k^+$, либо $\hat{H}_k^-$, $k = 1, 2, \dots, \hat{M}$. Напомним, что по выбору внутреннего базиса дифференциалы полиномиальных субримановых дифференциалов (при перегруппировке полей по степеням) имеют блочно-диагональный вид, где каждый блок состоит из единичной матрицы размерности $\dim H_i - \dim H_{i-1}$ и либо $((\dim \tilde{H}_i - \dim \tilde{H}_{i-1}) \times (\dim H_i - \dim H_{i-1}))$ -блока $D(\hat{D}_\varphi \varphi)_i$ матрицы $D(\hat{D}_\varphi \varphi)$, либо $((\dim \tilde{H}_i - \dim \tilde{H}_{i-1}) \times (\dim H_i - \dim H_{i-1}))$ -блока $(\hat{D}\varphi)_i$ матрицы $\hat{D}\varphi$, поэтому, перегруппируя при необходимости поля в образе, представим эти блоки как объединение частей $D(\hat{D}_\varphi \varphi)_i^+$ и $D(\hat{D}_\varphi \varphi)_i^-$ (соответственно $(\hat{D}\varphi)_i^+$ и $(\hat{D}\varphi)_i^-$), где “минусовые” части состоят из строк, соответствующих полям из $\hat{H}_i^-$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{M}$, $\dim H_0 = \dim \tilde{H}_0 = 0$.

Обозначим адаптированный базис символом $\{^x Y_j\}_{j=1}^{\hat{N}}$ и опишем в его терминах расстояние, понятие пространственноподобия и меру на поверхностях-графиках. Отметим, что все вышеперечисленное можно определить и для исходного базиса $\{Y_1, \dots, Y_{\hat{N}}\} = \{X_1, \dots, X_N, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$ непосредственной заменой наборов базисных полей.

Определение 9 (ср. [1]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^{\hat{N}} w_i {}^x Y_i\right)(v)$. Определим величину ${}^x \mathfrak{d}_2^2(v, w)$ следующим образом:

$$\max_{k=1, \dots, M} \left\{ \operatorname{sgn} \left(\sum_{j: Y_j \in \hat{H}_k^+, \deg Y_j = k} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{H}_k^-, \deg Y_j = k} y_j^2 \right) \times \left| \sum_{j: Y_j \in \hat{H}_k^+, \deg Y_j = k} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{H}_k^-, \deg Y_j = k} y_j^2 \right|^{1/k} \right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{U} : {}^x \mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\}$ называется шаром относительно ${}^x \mathfrak{d}_2^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом ${}^x \operatorname{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v, r)$.

Определение 10 (ср. [1]). Поверхность-график $\varphi_{\Gamma}(\Omega)$ называется пространственноподобной, если локально для всех $v \in \varphi_{\Gamma}(\Omega)$ она лежит вне множества

$$\left\{ w = \exp\left(\sum_{i=1}^{\hat{N}} w_i {}^x Y_i\right)(v) : \sum_{j: Y_j \in \hat{H}_k^+, \deg Y_j = k} y_j^2 = \sum_{j: Y_j \in \hat{H}_k^-, \deg Y_j = k} y_j^2, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{M} \right\}$$

за исключением точки $v \in \varphi_{\Gamma}(\Omega)$.

Следующее утверждение описывает классы рассматриваемых отображений.

Лемма 1 (ср. [1]). Пусть длины строк $(\hat{D}\varphi)_j^-$ (для контактных отображений) и $D(\hat{D}_p\varphi)_j^-$ (для не-

контактных отображений) не превосходят величину $\frac{1}{\dim H_j - \dim H_{j-1}} - c$, $c > 0, j = 1, 2, \dots, \min\{M, \tilde{M}\}$. Тогда поверхность $\varphi_{\Gamma}(\Omega)$ пространственноподобна.

Определение 11 (ср. [7]). Значение внутренней меры $\mathcal{H}_{\Gamma}^v$ для подмножеств $A \subset \varphi_{\Gamma}(\Omega)$, где $v = \sum_{i=1}^M i(\dim H_i - \dim H_{i-1})$, $\dim H_0 = 0$, равно

$$\prod_{j=1}^M \omega_{\dim H_j - \dim H_{j-1}} \times \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^v : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{\Gamma}^{-1}(x_i) \operatorname{Box}_2^{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\}.$$

Здесь точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Сформулируем основной результат сообщения о внутренней мере поверхностей-графиков.

Теорема 4. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $\varphi \in C^{\hat{M}}(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$, где φ — контактное отображение, а Ω — открытое подмножество многообразия Карно $\mathbb{M}$;

2) $\varphi \in C^{\hat{M}}(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$, где φ — неконтактное отображение, а Ω — открытое подмножество пространства Карно—Каратеодори $\mathbb{M}$.

Кроме того, пусть φ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда $\mathcal{H}_{\Gamma}^v$ -мера поверхности-графика равна

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(\varphi_{\Gamma}, x) d\mathcal{H}^v(x) = \int_{\varphi_{\Gamma}(\Omega)} d\mathcal{H}_{\Gamma}^v(y),$$

где

$$\mathcal{F}(\varphi_{\Gamma}, x) = \prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{\dim H_j - \dim H_{j-1}}) + (\hat{D}\varphi)_j^+(x)^* (\hat{D}\varphi)_j^+(x) - (\hat{D}\varphi)_j^-(x)^* (\hat{D}\varphi)_j^-(x)}$$

для первого случая, и

$$\mathcal{F}(\varphi_{\Gamma}, x) = \prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{\dim H_j - \dim H_{j-1}}) + D(\hat{D}_p\varphi)_j^+(x)^* D(\hat{D}_p\varphi)_j^+(x) - D(\hat{D}_p\varphi)_j^-(x)^* D(\hat{D}_p\varphi)_j^-(x)}$$

для второго случая.

Одним из основных шагов доказательства является

Лемма 2 (ср. [7, лемма 1] и др.). Функция множества $\Phi : \varphi_{\Gamma}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, равная

$$\Phi : A \mapsto \mathcal{H}_{\Gamma}^v(A), \quad \text{где } A \subset \varphi_{\Gamma}(\Omega),$$

обладает следующими свойствами:

1) она абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}^v$ на $\Omega \subset \mathbb{M}$;

2) она (локально) аддитивна на удаленных шарах.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Регионального математического центра Новосибирского государственного университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карманова М.Б. Графики негладких контактных отображений на группах Карно с сублоренцевой структурой // ДАН. 2019. Т. 486. № 3. С. 275–279.
2. Карманова М.Б. // ДАН. 2018. Т. 478. № 5. С. 513–516.
3. Gromov M. / In: “Sub-Riemannian Geometry”. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. P. 79–318.
4. Basalaev S.G., Vodopyanov S.K. // Eurasian Math. J. 2013. V. 4. № 2. P. 10–48.
5. Karmanova M., Vodopyanov S. // In: “Analysis and Mathematical Physics”. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
6. Postnikov M.M. Lectures in Geometry. Semester V: Lie Groups and Lie Algebras. M.: Nauka, 1982.
7. Карманова М.Б. // ДАН. 2017. Т. 473. № 1. С. 17–20.
8. Vodopyanov S. // In: “The Interaction of Analysis and Geometry”. Contemporary Mathematics. Providence, RI : Amer. Math. Soc. 2007. V. 424. P. 247–301.
9. Карманова М.Б. // ДАН. 2017. Т. 474. № 1. С. 7–10.
10. Карманова М.Б. // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 305–332.

METRIC PROPERTIES OF GRAPHS ON CARNOT–CARATHÉODORY SPACES WITH SUB-LORENTZIAN STRUCTURE

M. B. Karmanova

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak May 7, 2019

Received May 14, 2019

The notion of sub-Lorentzian structure with multi-dimensional time on Carnot–Carathéodory spaces is introduced. It is proved that classes of graph-surfaces are spacelike, and sub-Lorentzian analog of the area formula is proved.

Keywords: Carnot–Carathéodory space, polynomial *hc*-differential, intrinsic sub-Lorentzian measure, area formula