ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 490, с. 78–80

ИНФОРМАТИКА

УДК 519

НОВЫЕ ОЦЕНКИ КЛИКО-ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ГРАФОВ ДЖОНСОНА

© 2020 г. А. М. Райгородский[1,2,3,4,*], М. М. Кошелев [2,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 24.07.2019 г.
Поступило 27.07.2019 г.
После доработки 27.07.2019 г.
Принято к публикации 01.11.2019 г.

В данной работе нами были существенно улучшены нижние оценки на клико-хроматические числа некоторых семейств графов Джонсона. Получена новая верхняя оценка клико-хроматических чисел графов $G(n, r, r-1)$ и $G(n, 3, 1)$, а также посчитано точное значение этой величины для графов типа $G(n, 2, 1)$.

Ключевые слова: клико-хроматические числа, графы Джонсона, числа Рамсея

DOI: 10.31857/S268695432001018X

Пусть $n > r > s$. Рассмотрим следующее семейство графов:

$$G(n,r,s) = (V,E), \quad V = \binom{[n]}{r},$$
$$E = \{(A,B) : |A \cap B| = s\},$$

т.е. вершины графа — это всевозможные r-элементные подмножества $[n] := \{1, \ldots, n\}$, а ребрами мы соединяем пары множеств, пересекающихся ровно по s элементам. Эти графы называются графами Джонсона и играют важную роль в задачах теории кодирования (см. [1]), теории Рамсея (см. [2, 3]), комбинаторной геометрии (см. [4–8]), теории гиперграфов (см. [9–13]).

Определим клико-хроматическое число $\chi_c(G)$ графа G как наименьшее число k, для которого существует такая раскраска вершин G в k цветов, что в ней все максимальные по включению клики (кроме изолированных вершин) неодноцветны. Эта величина изучалась многими авторами для различных семейств графов, включая графы Джонсона (см. [14, 15]).

Напомним, что $R_a(b,q)$ — это минимальное такое число N (называемое числом Рамсея), что для любой раскраски ребер полного a-однородного гиперграфа на N вершинах в q цветов найдется одноцветный полный подгиперграф на b вершинах. В работе [15] были, в частности, доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если* $n > r > s > 0$ *и* $n \geq R_r(r + (r - s)^2, q)$, *то*

$$\chi_c(G(n,r,s)) > q.$$

Теорема 2. *Если* $n > r > 1$ *и* $n < R_r(r+1, q - r - 1)$, *то*

$$\chi_c(G(n,r,r-1)) \leq q.$$

Кажется, что для $s = r - 1$ теоремы 1 и 2 достаточно близки друг другу. Однако разница между параметрами q и $q - r - 1$ в числах Рамсея критична, ведь числа Рамсея растут как башни экспонент. Даже величина $R_a(b,2)$ зажата между функциями вида $t_{a-1}(cb^2)$ и $t_a(c'b)$, где c, c' — положительные константы, а $t_1(x) = x$ и $t_{i+1}(x) = 2^{t_i(x)}$. Для большего числа цветов зависимость от этого числа попадает на вершины башен в верхних и нижних оценках. Нам удалось значительно усилить теорему 2, а при $r = 2$ найти точное значение

[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3]*Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Республика Адыгея, Россия*
[4]*Институт математики и информатики Бурятского государственного университета, Улан-Удэ, Республика Бурятия, Россия*
**E-mail: mraigor@yandex.ru*
***E-mail: mkoshelev99@gmail.com*

Таблица 1

(r, s)	2		3		4		5		6		7		8		9		10	
1	1	4	8 (1)	8 (2)	6	?	1	?	6	?	1	?	6	?	1	?	6	?
2	–		1	3	5	?	1	?	1	?	1	?	1	?	1	?	1	?
3	–		–		1	3	5	?	7	?	1	?	1	?	1	?	1	?
4	–		–		–		1	3	1	?	1	?	5	?	1	?	1	?
5	–		–		–		–		1	3	1	?	1	?	5	?	7	?
6	–		–		–		–		–		1	?	1	?	1	?	5	?

клико-хроматического числа соответствующего графа.

Т е о р е м а 3. *Если* $n > r > 2$ *и* $2r - 1 \le n < R_r(r+1, q-2)$, *то*

$$\chi_c(G(n, r, r-1)) \le q.$$

Т е о р е м а 4. *Если* $n > 2$, *то*

$$\chi_c(G(n, 2, 1)) = \min\{q \in \mathbb{N} : n < R_2(3, q)\}.$$

При s, не обязательно равных $r - 1$, мы также нашли значительное количество ситуаций, в которых улучшаются ранее известные оценки.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $k, c \in \mathbb{N}_0$, $c < 2^k$, $r = 2^{k+1} + c$, $s = 2^k + c$. *Тогда при* $n > r$ *и* $n \ge R_r(r + 2(r-s) - 1, q)$ *верно* $\chi_c(G(n, r, s)) > q$.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $k > 0$, $n > 2k$, $r = 2k$. *Тогда если*

$$n \ge R_r\left(\frac{r(r+1)}{2}, q\right),$$

то

$$\chi_c(G(n, r, 1)) > q.$$

Т е о р е м а 7. *Пусть* $k > 0$, $n > 4k + 2$, $s = 2k + 1$, $r = 4k + 2$. *Тогда если* $\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor \ge R_2(3, q)$, *то* $\chi_c(G(n, r, s)) > q$.

Наконец, мы нашли новые верхние и нижние оценки для случая $r = 3$, $s = 1$. Назовем гиперграф, изоморфный идуцированному подграфу $G(7, 3, 1)$ с множеством вершин

$$(1,2,3), (1,4,5), (1,6,7), (3,5,7), (2,4,7), (3,4,6), (2,5,6),$$

гиперграфом типа треугольник. Пусть $R^{\Delta}(q)$ – минимальное число N, при котором в любой раскраске ребер полного 3-однородного гиперграфа на N вершинах в q цветов найдется одноцветный подграф типа треугольник. (Очевидно, что $R^{\Delta}(q) \le R_3(7, q)$, т.е. функция определена корректно.)

У т в е р ж д е н и е 1. *Верна оценка* $R^{\Delta}(q) \ge 3 \cdot 2^q + 1$.

Т е о р е м а 8. *Пусть* $n > 8$. *Тогда*

1) *если* $n \ge R^{\Delta}(q)$, *то* $\chi_c(G(n, 3, 1)) > q$;

2) *если* $n < R^{\Delta}(q-2)$, *то* $\chi_c(G(n, 3, 1)) \le q$.

Выше приведена таблица 1, иллюстрирующая соотношения между результатами всех теорем настоящей работы. По горизонтали указывается значение r, по вертикали – значение s. В соответствующей клетке сначала указывается номер теоремы, дающей наилучшую нижнюю оценку кликохроматического числа, а затем – номер теоремы, дающей наилучшую верхнюю оценку. В случае, если какой-либо оценки пока нет, в соответствующей графе стоит знак вопроса.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18–01–00355) и гранта Президента РФ НШ-6760.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *MacWilliams F.J., Sloane N.J.A.* The theory of error-correcting codes. North-Holland, Amsterdam, 1977.
2. *Frankl P., Wilson R.* Intersection Theorems with Geometric Consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.
3. *Sagdeev A.A., Raigorodskii A.M.* On a Frankl–Wilson theorem and its geometric corollaries. Acta Math. Univ. Comenianae, 2019.
4. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками l_1 и l_2 // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 2. С. 187–213.
5. *Пушняков Ф.А.* О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 4. С. 592–602.
6. *Шишунов Е.Д., Райгородский А.М.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // ДАН. 2019. Т. 485. № 3. С. 269–271.
7. *Просанов Р.И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 6. С. 890–898.

8. *Kostina O.A.* On Lower Bounds for the Chromatic Number of Spheres // Math. Notes. 2019. V. 105. № 1. P. 16–27.

9. *Frankl P., Kupavskii A.* Partition-free families of sets // Proceedings of the London Math. Society. 2019. https://doi.org/10.1112/plms.12236.

10. *Frankl P., Kupavskii A.* Families of sets with no matching of sizes 3 and 4 // Europ. J. Combinatorics. 2019. V. 75. P. 123–135.

11. *Shabanov D.A., Krokhmal N.E., Kravtsov D.A.* Panchromatic 3-colorings of random hypergraphs // Europ. J. Combinatorics. 2019. V. 78. P. 28–43.

12. *Cherkashin D., Petrov F.* On Small n-Uniform Hypergraphs with Positive Discrepancy // J. Combinatorial Theory. Series B. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2019.04.001

13. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring General Kneser Graphs and Hypergraphs via High-Discrepancy Hypergraphs // Europ. J. Combinatorics. 2019. V. 79C. P. 228–236.

14. *Fox J., Pach J., Suk A. A Note on the Clique Chromatic Number of Geometric Graphs* // Geombinatorics. 2019. V. 28. № 2. P. 83–86.

15. *Захаров Д.А., Райгородский А.М.* Клико-хроматические числа графов пересечений // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 1. С. 142–144.

NEW BOUNDS FOR THE CLIQUE-CHROMATIC NUMBERS OF JOHNSON'S GRAPHS

A. M. Raigorodskii[1,2,3,4] and M. M. Koshelev[2]

[1]*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*
[2]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[3]*Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University, Maykop, Russian Federation*
[4]*Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov July 24, 2019
Received July 27, 2019

We significantly improve lower bounds on clique-chromatic numbers for some families of Johnson graphs. We also obtain a new upper bound on clique-chromatic number for $G(n, r, r-1)$ and $G(n, 3, 1)$. Finally, we provide the exact value of clique-chromatic number $G(n, 2, 1)$.

Keywords: clique-chromatic numbers, Johnson graphs, Ramsey numbers