

УДК 517.91

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

© 2020 г. В. С. Самовол*

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 19.11.2019 г.

Поступило 26.11.2019 г.

После доработки 27.11.2019 г.

Принято к публикации 17.12.2019 г.

Рассматриваются скалярные вещественные уравнения Риккати с коэффициентами, раскладывающимися в сходящиеся степенные ряды в окрестности бесконечности. Исследуются продолжаемые решения таких уравнений. Методами степенной геометрии получены условия асимптотических разложений этих решений.

Ключевые слова: уравнение Риккати, продолжаемое решение, степенная геометрия, многоугольник Ньютона, асимптотический ряд

DOI: 10.31857/S2686954320010191

Исследуется скалярное уравнение Риккати

$$y' + \sum_{i=0}^2 f_i(x)y^i = 0, \quad y = y(x), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

При этом считаем, что функции $f_i(x)$, $i \in \{0, 1, 2\}$, могут быть представлены в виде равномерно и абсолютно сходящихся в окрестности точки $x = +\infty$ вещественных степенных рядов

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}x^{p_{ij}}, \quad c_{ij}, p_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$
$$p_{ij+1} < p_{ij}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} p_{ij} = -\infty, \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

Здесь и далее при упоминании степенных рядов, в отличие от традиционных степенных рядов, показатели степеней вещественные, но не обязательно целые числа. В данной работе изучаются произвольные решения уравнения (1), определенные в некоторой окрестности точки $x = +\infty$ (такие решения будем называть продолжаемыми).

Уравнение (1) считаем неоднородным, так как однородное уравнение является уравнением Бернулли и непосредственно интегрируется. Таким образом, везде ниже считаем, что в (2) $c_{01}c_{21} \neq 0$.

Риккати в [1] рассматривал уравнение вида (1)

$$y' + ay^2 + bx^p = 0, \quad a, b, p = \text{const}. \quad (3)$$

Сначала исследовался вопрос об интегрировании уравнения (3) в квадратурах (см. [2]). После долгих подобных попыток Яков Бернулли открыл возможность разложения решений уравнения (3) в ряд (см. в [2] его переписку с Лейбницем). Позже выяснилось, что решения уравнения (3) могут быть разложены в сходящиеся ряды с использованием функций Бесселя (см., например, [3]). В последние годы разработаны методы степенной геометрии, позволяющие получать разложения решений дифференциальных уравнений в ряды [4].

Далее мы будем пользоваться терминами, принятыми в степенной геометрии [4]. Многоугольник Ньютона N уравнения (1) при условии (2) представляет собой замкнутую выпуклую оболочку точек $Q = (-1, 1)$, $Q_{ij} = (p_{ij}, i)$, $i \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \dots\}$. При изучении асимптотических разложений решений уравнения (1) в окрестности точки $x = +\infty$ важную роль играет расположение точки Q относительно правой границы многоугольника N .

Случай, когда точка Q принадлежит правой границе многоугольника N , т.е. выполнено условие

$$\max(p_{01} + p_{21}, 2p_{11}) \leq -2, \quad (4)$$

исследован в [5, 6], где показано, что продолжаемые решения уравнения (1) могут быть представлены в виде рядов, абсолютно и равномерно сходящихся в некоторой окрестности точки $x = +\infty$. Указанные ряды подробно описаны и указан алгоритм их вычисления.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда нарушается условие (4), т.е. точка Q не принадле-

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва, Россия
*E-mail: 555svs@mail.ru

жит правой границе многоугольника N и выполняется неравенство

$$\max(p_{01} + p_{21}, 2p_{11}) > -2. \quad (5)$$

Если при этом $2p_{11} > p_{01} + p_{21}$, то могут быть вычислены два формальных степенных ряда (формальные решения уравнения (1)), являющихся асимптотическими представлениями (разложениями) всех нетривиальных продолжаемых решений уравнения (1). Указанные ряды, вообще говоря, расходятся в окрестности точки $x = +\infty$.

Если $2p_{11} \leq p_{01} + p_{21}$, то дополнительно требуется анализ коэффициентов c_{i1} первых приближений в разложениях функций $f_i(x)$. Если $\tilde{c}_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} < 0$, то уравнение (1) не имеет продолжаемых решений (здесь $\tilde{c}_{11} = c_{11}$, при $2p_{11} = p_{01} + p_{21}$ и $\tilde{c}_{11} = 0$ при $2p_{11} < p_{01} + p_{21}$). Если $\tilde{c}_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} > 0$, то продолжаемые решения есть и степенным преобразованием эта ситуация сводится к указанному выше основному случаю $2p_{11} > p_{01} + p_{21}$. При выполнении условия (5) и равенства $\tilde{c}_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} = 0$ уравнение (1) степенным преобразованием либо приводится к виду, где выполняется условие (4), либо к виду, где $\tilde{c}_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} \neq 0$.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

З а м е ч а н и е 1. Для формулировки результатов удобно использовать другую запись функции $f_i(x)$.

Если выполняется условие (5), то без ограничения общности будем считать, что в разложении в ряд функции $f_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}x^{p_{ij}}$ выполняется неравенство $p_{11} \geq 0.5(p_{01} + p_{21})$ (при этом в случае $p_{11} = 0.5(p_{01} + p_{21})$ коэффициент c_{11} может быть равен нулю, если же $p_{11} > 0.5(p_{01} + p_{21})$, то $c_{11} \neq 0$).

Напомним понятие асимптотического разложения (представления) функции.

О п р е д е л е н и е. Степенной ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\alpha_i}$, $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = -\infty$, называется асимптотическим разложением (представлением) функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если при всех $m \geq 1$ будет

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha_m} \left(f(x) - \sum_{i=1}^m c_i x^{\alpha_i} \right) = 0.$$

Т е о р е м а 1. Если выполняются условия (2), (5) и одно из двух условий:

$$1) p_{01} + p_{21} < 2p_{11},$$

$$2) p_{01} + p_{21} = 2p_{11}, \quad c_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} > 0,$$

то существуют два формальных ряда

$$z_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} x^{s_{ji}}, \quad j = 1, 2,$$

$$s_{11} = p_{01} - p_{11}, \quad s_{21} = p_{11} - p_{21}, \quad s_{ji+1} < s_{ji}, \quad (6)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_{ji} = -\infty, \quad a_{ji} = \text{const},$$

формально удовлетворяющих уравнению (1). При этом множество M продолжаемых решений уравнения (1) является объединением двух непустых множеств $M = M_1 \cup M_2$, где элементами множеств M_j , $j = 1, 2$, являются продолжаемые решения, асимптотическим разложением которых при $x \rightarrow +\infty$ является ряд $z_j(x)$. В (6) при выполнении условия 1)

$$a_{11} = -c_{01}(c_{11})^{-1}, \quad a_{21} = -c_{11}(c_{21})^{-1},$$

а при выполнении условия 2)

$$a_{11} = (2c_{21})^{-1}(-c_{11} + b),$$

$$a_{21} = (2c_{21})^{-1}(-c_{11} - b), \quad b = \sqrt{c_{11}^2 - 4c_{01}c_{21}}.$$

Смысл неравенства в условии 2) в теореме 1 раскрывается в теоремах 2 и 3.

Т е о р е м а 2. Если выполняются условия (2) и (5) и равенство $p_{01} + p_{21} = 2p_{11}$, то при $c_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} < 0$ уравнение (1) не имеет продолжаемых решений.

З а м е ч а н и е 2. Условие (2) в этой теореме является избыточным. Для справедливости теоремы достаточно, чтобы функции $f_i(x)$, $i \in \{0, 1, 2\}$ обладали при $x \rightarrow +\infty$ степенной асимптотикой

$$f_i(x) = c_{i1}x^{p_{i1}}(1 + o(x^{-\varepsilon})),$$

$$\varepsilon = \text{const} > 0, \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполняются условия (2) и (5) и равенства $p_{01} + p_{21} = 2p_{11}$, $c_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} = 0$. Уравнение (1) в этом случае будем называть вырожденным, в обратном случае — невырожденным.

Т е о р е м а 3. Если уравнение (1) является вырожденным, то существует преобразование вида

$$y = z + h(x),$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^m h_i x^{r_i}, \quad h_i, r_i = \text{const}, \quad (7)$$

$$r_{i+1} < r_i, \quad r_1 = p_{01} - p_{11}, \quad h_1 = -(2c_{21})^{-1}c_{11},$$

в результате которого уравнение (1) станет невырожденным.

З а м е ч а н и е 3. Если в результате преобразования (7) уравнение (1) примет вид

$$z' + \sum_{i=0}^2 g_i(x) z^i = 0, \quad (8)$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_{ij} x^{\tilde{p}_{ij}}, \quad \tilde{p}_{ij+1} < \tilde{p}_{ij},$$

где выполняется условие

$$\max(\tilde{p}_{01} + \tilde{p}_{21}, 2\tilde{p}_{11}) \leq -2, \quad (9)$$

то существующие продолжаемые решения уравнения (8) могут быть представлены в виде рядов, абсолютно и равномерно сходящихся в некоторой окрестности точки $x = +\infty$ (см. [5, 6]). Если же в невырожденном уравнении (8) условие (9) не выполняется, то эта ситуация описана выше в теоремах 1 и 2.

2. ПРИМЕРЫ

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$y' + y^2 - xy + 1 = 0, \quad (10)$$

где выполняются условия теоремы 1. Покажем, что один из рядов (6) здесь является сходящимся, а второй — расходящимся. Для вычисления этих рядов будем рассматривать укороченные уравнения и соответствующие преобразования рассматриваемого уравнения (см. [4]). Многоугольник Ньютона N уравнения (10) представлен на рис. 1.

Функция $z_1(x) = u_1(x) = x^{-1}$, являющаяся решением укороченного уравнения $-xu_1 + 1 = 0$, соответствующего правому нижнему ребру многоугольника N , одновременно является и решением уравнения (10). Вычисление членов ряда $z_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} x^{s_{2i}}$ приводит к следующим результатам.

Первое слагаемое $v_1 = a_{21} x^{s_{21}} = x$ является решением укороченного уравнения $v_1^2 - xv_1 = 0$, соответствующего правому верхнему ребру многоугольника Ньютона уравнения (10). После замены $y = y_1 + x$ уравнение (10) примет вид

$$y_1' + y_1^2 + xy_1 + 2 = 0. \quad (11)$$

Следующее слагаемое $v_2 = a_{22} x^{s_{22}} = -2x^{-1}$ ряда $z_2(x)$ является решением укороченного уравнения $xv_2 + 2 = 0$, соответствующего правому нижнему ребру многоугольника Ньютона уравнения (11). Делая замену $y_1 = y_2 - 2x^{-1}$, преобразуем уравнение (11), после чего опять рассматриваем укороченное уравнение, соответствующее правому нижнему ребру преобразованного уравнения. Продолжая этот процесс, вычисляем следующие члены

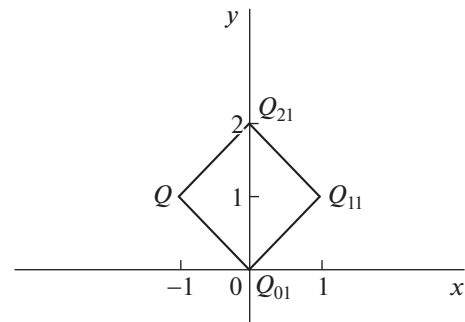


Рис. 1.

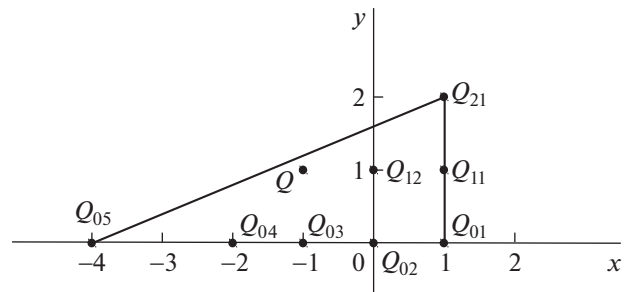


Рис. 2.

формального ряда $z_2(x)$. В результате вычислений нетрудно видеть, что имеет место оценка $v_k(x) = a_{2k} x^{-2k+3}$, $a_{2k} \leq -k!$, $k \geq 2$, откуда следует, что ряд $z_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ расходится в любой окрестности точки $x = +\infty$.

Приведем теперь пример, иллюстрирующий теорему 3.

П р и м е р 2. Рассмотрим следующее уравнение Риккати:

$$y' + xy^2 + (2x - 2)y + x - 2 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-4} = 0. \quad (12)$$

Данное уравнение является вырожденным, так как выполняются условия (2), (5) и равенства $p_{01} + p_{21} = 2p_{11}$, $c_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} = 0$. Многоугольник Ньютона N уравнения (12) представлен на рис. 2.

Функция $u_1(x) = -1$ является решением укороченного уравнения $xu_1^2 + 2u_1x + x = 0$, соответствующего правому вертикальному ребру многоугольника N . После замены $y = y_1 - 1$ уравнение (12) примет вид

$$y_1' + xy_1^2 - 2y_1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-4} = 0. \quad (13)$$

Здесь опять выполняются условие (5) и равенства $p_{01} + p_{21} = 2p_{11}$, $c_{11}^2 - 4c_{01}c_{21} = 0$, т.е. уравнение (13) вырождено.

Функция $u_2(x) = x^{-1}$ является решением укороченного уравнения $xu_2^2 - 2u_2 + x^{-1} = 0$, соответствующего правому ребру многоугольника Ньютона уравнения (13). После замены $y_1 = y_2 + x^{-1}$ уравнение (13) примет вид

$$y_2' + xy_2^2 + x^{-4} = 0. \quad (14)$$

Полученное уравнение удовлетворяет условию (4) и, следовательно, является невырожденным. К этому уравнению применимы результаты работ [5, 6]. Функция $u_3(x) = \frac{1}{3}x^{-3}$ является решением

укороченного уравнения $u_3' + x^{-4} = 0$, соответствующего правому нижнему ребру многоугольника Ньютона уравнения (14). Продолжая вычисления, приходим к выводу, что уравнение (14) имеет решение в виде абсолютно и равномерно сходящегося в некоторой окрестности точки $x = +\infty$ степенного ряда $y_2 = \frac{1}{3}x^{-3} + \dots$. Уравнению (14) также соответствует укороченное уравнение $v' + xv^2 = 0$, решением которого является функция $v(x) = 2x^{-2}$. Отсюда, продолжая вычисления согласно [5, 6], получаем решение уравнения (14), имеющее вид абсолютно и равномерно сходящегося в некоторой окрестности точки

$x = +\infty$ ряда $y_2 = 2x^{-2} - x^{-3} - x^{-4}(\ln x + a) + \dots$, слагаемыми которого являются произведения убывающих степеней переменной x на многочлены от $\ln x$. В итоге получаем, что семейство продолжаемых решений уравнения (12) включает степенной ряд $y = -1 + x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} + \dots$, а также семейство рядов

$$y = -1 + x^{-1} + 2x^{-2} - x^{-3} - x^{-4}(\ln x + a) + \dots,$$

где a — произвольная постоянная. Все ряды абсолютно и равномерно сходятся в некоторой окрестности точки $x = +\infty$. Можно показать, что других продолжаемых решений уравнение (12) не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Riccati J.* // *Acta eruditorum* 1724. Suppl. 8. P. 66–73.
2. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций, Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1971.
4. *Брюно А.Д.* // УМН. 2004. Т. 59. В. 3. С. 31–80.
5. *Самовол В.С.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 4. С. 401–404.
6. *Самовол В.С.* // Мат. заметки. 2019. Т. 105. В. 4. С. 603–615.
7. *Samovol V.S.* // *Asymptotic Analysis*. 2019. V. 115. P. 223–239.

ON ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTIONS TO THE RICCATI EQUATION

V. S. Samovol

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin November 19, 2019

Received November 26, 2019

The Riccati real scalar equations with coefficients expandable in convergent power series in a neighborhood of infinity are considered. Extendable solutions to such equations are studied. Methods of power geometry are used to obtain conditions for asymptotic series expansions of these solutions.

Keywords: Riccati equation, extendable solution, power geometry, Newton polygon, asymptotic series