ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 15–18

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

О КОНСТРУКТИВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ

© 2020 г. А. И. Боголюбский[1], В. Г. Лысов[1,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 23.12.2019 г.
Поступило 26.12.2019 г.
После доработки 26.12.2019 г.
Принято к публикации 23.01.2020 г.

Изучается двумерная векторная задача равновесная логарифмического потенциала с матрицей взаимодействия Никишина. Приведен конструктивный способ нахождения носителей векторной равновесной меры. Плотности компонент равновесной меры выражены в терминах алгебраической функции, которая выписана явно. Задача мотивирована исследованием сходимости рациональных аппроксимаций Фробениуса–Паде и Эрмита–Паде.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, векторная задача равновесия, матрица взаимодействия Никишина, равновесная мера, аппроксимации Фробениуса–Паде, аппроксимации Эрмита–Паде

DOI: 10.31857/S268695432002006X

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\vec{\Delta} := (\Delta_1, \Delta_2)$ – пара непересекающихся замкнутых промежутков вещественной оси, а $\vec{p} := (p_1, p_2)$ – вектор с положительными координатами. Обозначим через $M(\vec{\Delta}, \vec{p})$ класс векторных мер $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ таких, что μ_j – положительная борелевская мера массы p_j с носителем $S_{\mu_j} \subseteq \Delta_j$ и конечной энергией: $I(\mu_j) := \int V^{\mu_j} d\mu_j < \infty$, где $V^{\mu_j}(x) := -\int \ln|x-t| d\mu_j(t)$ – логарифмический потенциал.

В классе $M(\vec{\Delta}, \vec{p})$ требуется найти меру $\vec{\lambda}$, которая минимизирует функционал $J(\vec{\mu}) := I(\mu_1) + I(\mu_2) + I(\mu_1 - \mu_2)$. В силу выпуклости такая экстремальная мера $\vec{\lambda}$ существует и единственна. По теореме Куна–Таккера векторная мера $\vec{\lambda}$ полностью характеризуется условиями равновесия:

$$W_1^{\vec{\lambda}}(x) = \omega_1 := \min_{\Delta_1} W_1^{\vec{\lambda}}, \quad x \in S_{\lambda_1},$$
$$W_2^{\vec{\lambda}}(x) = \omega_2 := \min_{\Delta_2} W_2^{\vec{\lambda}}, \quad x \in S_{\lambda_2}, \tag{1}$$
$$\text{где} \quad \begin{cases} W_1^{\vec{\lambda}} := 2V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2}, \\ W_2^{\vec{\lambda}} := 2V^{\lambda_2} - V^{\lambda_1}. \end{cases}$$

Таким образом, исходными данными задачи являются $\vec{\Delta}$ и $\vec{p}$. Наша цель состоит в описании зависимости от исходных данных векторной равновесной меры $\vec{\lambda}$, ее носителя $S_{\vec{\lambda}} := (S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2})$ и открытых множеств $D_j^+ := \{z \in \mathbb{C}: \omega_j - W_j^{\vec{\lambda}}(z) > 0\}$, $D_j^- := \{z \in \mathbb{C}: \omega_j - W_j^{\vec{\lambda}}(z) < 0\}$.

2. МОТИВАЦИЯ: СХОДИМОСТЬ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Задачи равновесия логарифмических потенциалов векторных мер были введены А.А. Гончаром и Е.М. Рахмановым [1] при исследовании сходимости рациональных аппроксимаций. Важным примером является сформулированная выше задача равновесия [2], отвечающая за асимптотику совместных аппроксимаций для системы Никишина [3]. В последнее время интерес к векторным задачам с произвольными массами компонент мотивирован приложениями, связанными с прямыми и обратными задачами [4], вариационными принципами для гиперболических систем [5] и операторами Якоби на решетках и деревьях [6]. В качестве иллюстрации мы приведем здесь одно известное [7–9] приложение задачи (1), связанное с аппроксимациями Фробениуса–Паде.

Пусть $\{q_n\}$ – последовательность ортонормированных многочленов относительно меры σ на отрезке $E \subset \mathbb{R}$: $\int q_n q_m d\sigma = \delta_{n,m}$. Для функции $f \in L^1(E, \sigma)$ будем рассматривать аппроксимации Фробениу-

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: vlysov@mail.ru*

са–Паде, т.е. рациональные функции P_m/Q_n такие, что

$$c_k(Q_n f - P_m) = 0, \qquad k = 0,1,\dots,m+n, \tag{2}$$

где $c_k(g) := \int g q_k d\sigma$ – коэффициенты Фурье функции g по системе $\{q_n\}$.

Пусть теперь функция f является марковской, т.е. $f(z) := \int_F \frac{\rho(t)\,dt}{z-t}$, где ρ – положительный вес на отрезке F и $F \cap E = \phi$. Рассмотрим последовательность аппроксимаций Фробениуса–Паде P_m/Q_n для f с нормировкой $Q_n = x^n + \cdots$ и со следующими условиями на степени числителя и знаменателя: $m \ge n-1$, $\frac{m}{n} \to c \ge 1$. Пусть $\vec{\lambda}$ – векторная равновесная мера (1) для исходных данных $\vec{\Delta} := (F,E)$ и $\vec{p} := (1, 1+c)$, тогда справедливы (см. [9]) следующие предельные при $n \to \infty$ соотношения в указанных областях:

$$\frac{1}{n}\ln|Q_n| \to -V^{\lambda_1}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus S_{\lambda_1},$$
$$\frac{1}{n}\ln|Q_n f - P_m| \to V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} - \omega_1,$$
$$z \in \mathbb{C}\setminus(F \cup S_{\lambda_1}).$$

Из этих соотношений следует, что мера λ_1 отвечает за предельное распределение свободных полюсов аппроксимаций, при $z \in D_1^+$ аппроксимации сходятся к f с геометрической скоростью, а при $z \in D_1^-$ расходятся к ∞.

Перейдем к формулировке основных результатов.

3. НОСИТЕЛЬ РАВНОВЕСНОЙ МЕРЫ

Результаты будут сформулированы для случая $\vec{\Delta} = ([-a,0],[b,1])$, $\vec{p} = (p,1)$, где $a > 0$, $b \in (0,1)$ и $p \in (0,1]$. Ясно, что линейным преобразованием общий случай сводится к данному.

Помимо исходных параметров задачи (a, b) будем использовать параметры (s, t), где $s \in (1,2)$, $t > 1$, которые всюду в тексте связаны с (a, b) следующим диффеоморфизмом [10]:

$$a = R_s(t) - 1, \quad R_s(t) := \frac{t^2(t+s-2)}{(2s-1)t-s},$$
$$b = \frac{aS(s)}{1+a-S(s)}, \quad S(s) := \frac{s(2-s)^3}{(2s-1)^3}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что обратное преобразование, т.е. нахождение (s, t) по (a, b), сводится к последовательному решению двух алгебраических уравнений четвертой и третьей степени.

Определим функцию $p^L(a,b)$ следующим образом:

$$p^L := \frac{\theta^L + 1}{\theta^L - 1},$$
$$\theta^L(s,t) := -\left(\frac{(2st-s-t)(s+3t-2)^2}{(2st-s-t+2)(s+t)(s+t-2)}\right)^{1/2}.$$

Выражение под знаком корня принимает положительные значения в полуполосе $s \in (1,2)$, $t > 1$, а корень – арифметический. Функция p^L является гладкой, принимает значения на $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и монотонно возрастает относительно первой переменной: $\frac{\partial p^L}{\partial a} > 0$. При фиксированных значениях b обратную к $p^L(a,b)$ функцию обозначим $a^L(p,b)$.

Теперь мы готовы сформулировать результат о виде носителя $S_{\vec{\lambda}}$ равновесной меры $\vec{\lambda}$ в зависимости от исходных данных a, b и p.

Т е о р е м а 1. *Если* $p \ge p^L(a,b)$, *то* $S_{\vec{\lambda}} = \vec{\Delta}$. *Если* $p \le p^L(a,b)$, *то* $S_{\vec{\lambda}} = ([-A,0],[b,1])$, *где* $A = a^L(p,b)$.

Остановимся на некоторых простых следствиях этой теоремы. Во-первых, $S_{\vec{\lambda}}$ состоит из пары отрезков. Во-вторых, так как $p^L(a,b) < \frac{1}{2}$, то при $p \in \left[\frac{1}{2},2\right]$ носитель $S_{\vec{\lambda}}$ совпадает с $\vec{\Delta}$. В-третьих, при $p \le p^L(a,b)$ носитель равновесной меры $\vec{\lambda}$ не зависит от параметра a. Ниже мы покажем, что в последнем случае плотности $\vec{\lambda}$ также не зависят от a.

4. ПЛОТНОСТЬ РАВНОВЕСНОЙ МЕРЫ

Плотность равновесной меры записывается в терминах некоторой алгебраической функции. Для соответствующих построений нам понадобятся трехлистная риманова поверхность $\mathfrak{R}_{-a,b}$ рода нуль и ее конформное отображение на сферу. Поверхность $\mathfrak{R}_{-a,b}$ является замыканием склейки трех экземпляров $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ комплексной сферы вдоль разрезов. Лист $\mathfrak{R}_0 := \overline{\mathbb{C}}\setminus([-a,0] \cup [b, 1])$ склеивается с листом $\mathfrak{R}_1 := \overline{\mathbb{C}}\setminus[-a,0]$ крест-накрест вдоль $[-a,0]$, а с листом $\mathfrak{R}_2 := \overline{\mathbb{C}}\setminus[b, 1]$ – вдоль $[b,1]$. Пусть $\pi\colon \mathfrak{R}_{-a,b} \to \overline{\mathbb{C}}$ – каноническая проекция. Для обозначения поднятия точки $z \in \overline{\mathbb{C}}$ на поверхность $\mathfrak{R}_{-a,b}$ используем жирный шрифт и индекс листа: $\mathbf{z}, \mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}_{-a,b}$. Пусть (s,t)

связана с (a, b) диффеоморфизмом (3), тогда функция $\mathbf{z}(\cdot)$ задает [11] конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}_w$ на $\mathfrak{R}_{-a,b}$, где

$$z = \pi \circ \mathbf{z}(w) = \frac{aR_s(w)}{1 + a - R_s(w)}. \tag{4}$$

При этом выполнены следующие соотношения: $\mathbf{z}(\infty) = -\mathbf{a}_{01}$, $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}_{01}$, $\mathbf{z}(w_b) = \mathbf{b}_{02}$, $\mathbf{z}(1) = \mathbf{1}_{02}$, $\mathbf{z}(2 - s) = \mathbf{0}_1$, $\mathbf{z}(t) = \infty_0$, $\mathbf{z}(t_j) = \infty_j$, где

$$\begin{gathered} w_b = \frac{s(2-s)}{(2s-1)}, \quad t_1 + t_2 = 2 - s - t, \\ t_1 t_2 = \frac{st(2-s-t)}{(2st-s-t)}. \end{gathered} \tag{5}$$

На римановой поверхности $\mathfrak{R}_{-a,b}$ рассмотрим две мероморфные функции h^Lи h^R. Функция h^L имеет дивизор $\dfrac{\infty_0 \times \infty_1 \times \infty_2}{\mathbf{0}_{01} \times \mathbf{b}_{02} \times \mathbf{1}_{02}}$ и следующее представление:

$$zh^L = \frac{c^L w(w-2+s)}{(w-1)(w-w_b)}, \quad c^L := \frac{2(t-1)(t-w_b)}{(\theta^L - 1)t(t-2+s)}.$$

Функция h^R имеет дивизор $\dfrac{\infty_0 \times \infty_1 \times \infty_2}{(-\mathbf{a}_{01}) \times \mathbf{0}_{01} \times \mathbf{b}_{02}}$ и следующее представление:

$$\begin{gathered} zh^R = \frac{c^R w(w-2+s)}{(w-w_b)}, \\ c^R := \frac{2(t-w_b)}{(\theta^R - 1)t(t-2+s)}, \end{gathered}$$

где зависимость θ^R от (s,t) имеет вид

$$p^R := \frac{\theta^R + 1}{\theta^R - 1},$$

$$\theta^R(s,t) := \left(\frac{(s+t)(2st+s-t-2)^2}{(2st-s-t+2)(2st-s-t)(s+t-2)}\right)^{1/2}.$$

Для функции h, определенной на поверхности $\mathfrak{R}_{-a,b}$, ее сужения на листы обозначим $h_j(z) :=$ $:= h(\mathbf{z}_j)$. Теперь сформулируем результат, касающийся плотностей компонент векторной равновесной меры.

Т е о р е м а 2. *Если* $p = \alpha p^L(a,b) + (1-\alpha)p^R(a,b)$ *при* $\alpha \in [0,1]$ (*т.е.* $p^L(a,b) \le p \le p^R(a,b)$), *то плотности компонент* $\vec{\lambda}$ *выражаются через мероморфную функцию* $h := \alpha h^L + (1-\alpha)h^R$ *на* $\mathfrak{R}_{-a,b}$ *по формулам*

$$d\lambda_j(x) = \frac{(-1)^j}{\pi}\operatorname{Im} h_j(x+i0)dx, \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1,2.$$

Если $p \le p^L(a,b)$, *то плотности компонент* $\vec{\lambda}$ *выражаются через мероморфную функцию* h^L *на* $\mathfrak{R}_{-A,b}$, *где* $A = a^L(p,b)$, *по формулам*

$$\begin{gathered} d\lambda_j(x) = \frac{(-1)^j}{\pi}\operatorname{Im} h_j^L(x+i0)dx, \\ x \in S_{\lambda_j}, \quad j = 1,2. \end{gathered}$$

Таким образом, при $p \le p^L(a,b)$ мера $\vec{\lambda}$ не зависит от параметра a. Отметим, что предельный случай $b = 0$ приведенных результатов использовался в [12] при исследовании асимптотики совместно ортогональных многочленов.

В качестве следствия дадим описание открытых множеств D_j^-. Для этой цели рассмотрим [13] на поверхности $\mathfrak{R}_{-a,b}$ многозначную функцию Φ, которая в координатах w имеет вид

$$\Phi = \frac{(w-t_1)^p (w-t)^{1-p}}{(w-t_2)}.$$

Ее абсолютное значение $|\Phi|$ однозначно на $\mathfrak{R}_{-a,b}$. Векторные потенциалы простым образом связаны с $|\Phi|$:

$$W_j^{\vec{\lambda}}(z) - \omega_j = (-1)^j \ln\left|\frac{\Phi_j(z)}{\Phi_0(z)}\right|.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\begin{gathered} D_1^- = \{z \in \mathbb{C}: |\Phi_1(z)| < |\Phi_0(z)|\}, \\ D_2^- = \{z \in \mathbb{C}: |\Phi_0(z)| < |\Phi_2(z)|\}. \end{gathered}$$

В частности, эти формулы дают конструктивный способ нахождения областей расходимости аппроксимаций Фробениуса–Паде.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование второго автора (В.Г. Лысова) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–71–30004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончар А.А., Рахманов Е.А.* // Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157. С. 31–48.
2. *Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н.* // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 33–58.
3. *Никишин Е.М.* // Матем. сб. 1980. Т. 113 (155). № 4. С. 499–519.
4. *Aptekarev A.I., Lapik M.A., Lysov V.G.* // Anal. Math. Phys. 2019. V. 9. № 3. P. 919–935.

5. *Aptekarev A.I.* // Contemporary Mathematics. 2016. V. 661. P. 167–186.
6. *Aptekarev A.I., Denisov S.A., Yattselev M.L.* // Transactions AMS, 2019.
7. *Гончар А.А., Рахманов Е.А., Суетин С.П.* // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 136–146.
8. *Боголюбский А.И.* // Матем. Заметки. 2016. Т. 99. № 6. С. 937–940.
9. *Аптекарев А.И., Боголюбский А.И., Ятцелев М.Л.* // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. С. 4–27.
10. *Aptekarev A.I., Kaliaguine V.A., Lysov V.G., Tulyakov D.N.* // J. Computational and Applied Mathematics. 2009. V. 233. № 3. P. 602–616.
11. *Лысов В. Г., Туляков Д.Н.* // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 185–215.
12. *Лысов В.Г.* // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 3. С. 471–474.
13. *Лысов В.Г., Туляков Д.Н.* // Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 180–196.

ON THE CONSTRUCTIVE SOLUTION OF ONE VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEM

A. I. Bogolyubskii[a] and V. G. Lysov[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We study a two-dimensional vector logarithmic-potential equilibrium problem with the Nikishin matrix of interaction. A constructive method for finding the supports of a vector equilibrium measure is given. The densities of the components of the equilibrium measure are expressed in terms of an algebraic function that is explicitly written out. The problem is motivated by the study of the convergence of the Frobenius–Pade and Hermite–Pade rational approximants.

Keywords: logarithmic potential, vector equilibrium problem, Nikishin matrix of interaction, equilibrium measure, Frobenius–Pade approximants, Hermite–Pade approximants