ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 23–28

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

ВОЗНИКНОВЕНИЕ “СТРАННОГО ЧЛЕНА”, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ, В ПРОЦЕССЕ УСРЕДНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С БЫСТРО ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА И ДИНАМИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ: КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

© 2020 г. Ж. И. Диаз[1,*], Д. Гомез-Кастро[1], Т. А. Шапошникова[2,], М. Н. Зубова[2]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.11.2019 г.
Поступило 10.12.2019 г.
После доработки 10.12.2019 г.
Принято к публикации 11.12.2019 г.

Работа посвящена выявлению “странного” члена в процессе усреднения эллиптических (и параболических) уравнений при условии, что на некоторых множествах, принадлежащих границе области и имеющих критический “размер”, заданы динамические краевые условия. Рассмотрена задача, в которой динамические краевые условия заданы на объединении подмножеств, принадлежащих внешней границе области, имеющих критический диаметр и расположенных ε-периодически вдоль границы. На оставшейся части границы поставлены однородные условия Неймана. Основная цель этой работы – доказать, что усредненное краевое условие представляет собой условие типа Робина, содержащее нелокальный член, зависящий от следа решения $u(x, t)$ на границе области $\partial\Omega$.

Ключевые слова: усреднение, быстро осциллирующие краевые условия, динамические краевые условия

DOI: 10.31857/S2686954320020095

Работа посвящена выявлению “странного” члена в процессе усреднения эллиптических (и параболических) уравнений при условии, что на некоторых множествах, принадлежащих границе области и имеющих критический “размер”, заданы динамические краевые условия. В работе [5] изучен случай, в котором динамические краевые условия заданы на границе полостей критического радиуса, ε-периодически перфорированной области. В отличие от случая, когда динамические краевые условия заданы на границе полостей диаметра порядка ε [1, 7], новое нелокальное слагаемое H_u возникает как член абсорбции в усредненном эллиптическом (или параболическом) уравнении, причем H_u является решением обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от решения усредненной модели $u(x,t)$. Задача, в которой динамические условия поставлены на границе полостей, ε-периодически расположенных вдоль $(n-1)$-мерного многообразия, была рассмотрена в [6]. В этом случае нелокальный странный член $H_u(x,t)$ возникает в условиях трансмиссии, заданных на этом многообразии. В сообщении мы рассматриваем ситуацию, в которой динамические краевые условия заданы на объединении подмножеств, принадлежащих внешней границе области, имеющих критический диаметр и расположенных ε-периодически вдоль границы. На оставшейся части границы поставлены однородные условия Неймана. Основная цель этой работы – доказать, что усредненное краевое условие представляет собой условие типа Робина, содержащее нелокальный член, зависящий от следа решения $u(x,t)$ на границе области $\partial\Omega$. Этот результат является обобщением основной теоремы работы [3] на случай динамических краевых условий.

Мы хотели бы подчеркнуть, что одним из наиболее важных шагов в процессе получения странного члена (именно так было названо новое слагаемое в усредненном уравнении в работе Д. Чиоранеску и Ф. Мюрат [2]) является правильный выбор значений параметров, характеризующих

[1] *Instituto de Mathematica Interdisciplinar, Universitat Complutense, Madrid, Spain*
[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: ji_diaz@mat.ucm.es*
***E-mail: shaposh.tan@mail.ru*

радиус перфорации и коэффициент адсорбции в краевом условии.

Результаты этой работы допускают много обобщений. Для более широкого ознакомления с ними, как и с многочисленными другими работами по этой теме, отсылаем читателя к монографии авторов [4].

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2 \cap \{x_2 > 0\}$ с гладкой границей, состоящей из двух частей $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x_2 > 0\}$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \{x_2 = 0\} = [-l, l]$ для некоторого $l > 0$.

Обозначим $Y_1 = \left\{(y_1, 0): -\frac{1}{2} < y_1 < \frac{1}{2}\right\}$, $\hat{l}_0 = \{(y_1, 0) : -l_0 < y_1 < l_0\} \subset Y_1$, где $l_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Для малого параметра $\varepsilon > 0$ и параметра a_ε, такого, что $0 < a_\varepsilon \ll \varepsilon$, причем a_ε имеет критическое значение, т.е. $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)$, $C_0, \alpha > 0$, введем множество

$$\tilde{G}_\varepsilon = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}'} (a_\varepsilon \hat{l}_0 + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}'} l_\varepsilon^j,$$

где $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \times \{0\}$ – множество векторов вида $j = (j_1, 0)$ и $j_1 \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}' : \overline{l_\varepsilon^j} \subset [-l + 2\varepsilon, l - 2\varepsilon] \times \{0\}\}.$$

Введем множества $Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y_1 + \varepsilon j$, $j \in \mathbb{Z}'$ и

$$l_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} l_\varepsilon^j.$$

Легко видеть, что $\overline{l_\varepsilon^j} \subset Y_\varepsilon^j$. Обозначим $\gamma_\varepsilon = \Gamma_2 \setminus \overline{l_\varepsilon}$. Заметим, что для произвольного $j \in \mathbb{Z}'$, $|l_\varepsilon^j| = 2a_\varepsilon l_0$, $|l_\varepsilon| \cong d a_\varepsilon \varepsilon^{-1}$, $d = \text{const} > 0$.

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} -\Delta_x u_\varepsilon = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ \beta(\varepsilon)\partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon + \lambda\beta(\varepsilon) u_\varepsilon = \beta(\varepsilon) g(x,t), \\ (x,t) \in l_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon = 0, \quad (x,t) \in \gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = 0, \quad x \in l_\varepsilon, \end{gathered} \tag{1}$$

где коэффициент $\beta(\varepsilon)$ имеет критическое значение, а именно, $\beta(\varepsilon) = \exp\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)$, $\lambda \geq 0$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\partial_t f \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $g(x,t) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$.

Назовем обобщенным решением начально-краевой задачи (1) функцию $u_\varepsilon \in L^2(0,T; H^1(\Omega, \Gamma_1))$, такую, что $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T; H^{-1/2}(l_\varepsilon, \Gamma_1))$ и для произвольной функции $v \in L^2(0,T; H^1(\Omega, \Gamma_1))$ имеет место интегральное тождество

$$\begin{gathered} \beta(\varepsilon)\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v\rangle_{l_\varepsilon} dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v\, dx dt + \\ + \lambda\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{l_\varepsilon} u_\varepsilon v\, dx_1 dt = \\ = \beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{l_\varepsilon} g v\, dx_1 dt + \int_0^T\int_\Omega f v\, dx dt, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\langle .,.\rangle_{l_\varepsilon}$ – отношение дуальности пространств $H^{1/2}(l_\varepsilon, \Gamma_1)$ и $H^{-1/2}(l_\varepsilon, \Gamma_1)$. Как обычно, через $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ обозначено замыкание в $H^1(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, обращающихся в ноль в окрестности Γ_1.

Используя галёркинские приближения, получена

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет единственное обобщенное решение u_ε и для него справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega,\Gamma_1))} + \beta(\varepsilon)\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^2(l_\varepsilon))} + \\ + \beta(\varepsilon)\|\partial_t u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^2(l_\varepsilon))} \leq K, \end{gathered} \tag{3}$$

где K здесь и далее – положительная постоянная, не зависящая от ε.

Из оценки (3) следует, что по некоторой подпоследовательности (обозначим ее так же, как исходную последовательность) имеем при $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; H^1(\Omega, \Gamma_1)), \tag{4}$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; L^2(\Omega)). \tag{5}$$

Основной результат сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть u_ε – обобщенное решение задачи* (1). *Тогда функция $u \in L^2(0,T; H^1(\Omega, \Gamma_1))$, определенная в* (4), (5), *является обобщенным решением нелокальной краевой задачи*

$$\begin{gathered} -\Delta_x u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \partial_\nu u + \frac{\pi}{\alpha^2} u = H_u(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T), \end{gathered} \tag{6}$$

где $H_u(x,t)$ – единственное решение задачи Коши для ОДУ

$$\begin{gathered} \frac{\partial H_u}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{\pi}{2\alpha^2 l_0 C_0}\right) H_u = g(x,t) + \frac{\pi}{2\alpha^2 l_0 C_0} u(x,t), \\ (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T), \\ H(x,0) = 0, \quad x \in \Gamma_2. \end{gathered} \tag{7}$$

З а м е ч а н и е 1. Для функции $u \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_2))$ решение задачи Коши имеет вид

$$H_u(x,t) = \frac{\pi}{\alpha^2}\int_0^t \left(g(x,\tau) + \frac{\pi}{2\alpha^2 l_0 C_0} u(x,\tau) \right) \times \\ \times \exp\left(-\left(\lambda + \frac{\pi}{2\alpha^2 l_0 C_0} \right)(t-\tau) \right) d\tau. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательные функции w_ε^j и q_ε^j как обобщенные решения краевых задач

$$\begin{aligned} \Delta w_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}, \\ w_\varepsilon^j &= 1, \quad x \in \partial T_{a_\varepsilon}^j, \\ w_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Delta q_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{l_\varepsilon^j}, \\ q_\varepsilon^j &= 1, \quad x \in l_\varepsilon^j, \\ q_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь T_r^j – шар радиуса r с центром в точке $(\varepsilon j, 0)$. Заметим, что w_ε^j и q_ε^j являются решениями задач

$$\begin{aligned} \Delta w_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+ \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}, \\ w_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j \cap \{x_2 > 0\}, \\ w_\varepsilon^j &= 1, \quad x \in \partial T_{a_\varepsilon}^j \cap \{x_2 > 0\}, \\ \partial_{x_2} w_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in \{x_2 = 0\} \cap (T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}), \end{aligned} \tag{11}$$

где $A^+ = A \cap \{x_2 > 0\}$, $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Delta q_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+, \\ q_\varepsilon^j &= 1, \quad x \in l_\varepsilon^j, \\ q_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in (\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+, \\ \partial_{x_2} q_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in (T_{\varepsilon/4}^j \cap \{x_2 = 0\}) \setminus \overline{l_\varepsilon^j}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $j \in \Upsilon_\varepsilon$, $l_\varepsilon^j = a_\varepsilon \hat{l}_0 + \varepsilon j$. Заметим, что

$$w_\varepsilon^j(x) = \frac{\ln\left(\frac{4r}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}. \tag{13}$$

Введем функции

$$W_\varepsilon(x) = \begin{cases} w_\varepsilon^j(x), & x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+ \setminus \overline{(T_{a_\varepsilon}^j)^+}, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 1, & x \in (T_{a_\varepsilon}^j)^+, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \overline{\cup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (T_{\varepsilon/4}^j)^+}, \end{cases} \tag{14}$$

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} q_\varepsilon^j, & x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \overline{\cup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (T_{\varepsilon/4}^j)^+}. \end{cases} \tag{15}$$

Легко видеть, что $W_\varepsilon, Q_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_1)$ и $W_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1(\Omega, \Gamma_1)$, если $\varepsilon \to 0$. Для сравнения этих двух функций, используем следующую лемму, доказанную в [3].

Л е м м а 1. *Пусть W_ε – функция, определенная в* (14), *а Q_ε – определена в* (15). *Тогда*

$$\|W_\varepsilon - Q_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le K\sqrt{\varepsilon}. \tag{16}$$

Из интегрального тождества (2) следует, что для произвольной тестовой функции $v \in L^2(0,T; H^1(\Omega, \Gamma_1))$, такой, что $\partial_t v \in L^2(0,T; L^2(l_\varepsilon))$, выполняется интегральное неравенство

$$\beta(\varepsilon)\int_0^T \int_{l_\varepsilon} \partial_t v (v - u_\varepsilon) dx_1 dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla v \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt + \\ + \beta(\varepsilon)\lambda \int_0^T \int_{l_\varepsilon} v(v - u_\varepsilon) dx_1 dt \ge \beta(\varepsilon)\int_0^T \int_{l_\varepsilon} g(v - u_\varepsilon) dx_1 dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega f(v - u_\varepsilon) dx dt - \frac{\beta(\varepsilon)}{2}\|v(x,0)\|_{L^2(l_\varepsilon)}^2. \tag{17}$$

Для произвольных функций $\eta \in C^1[0,T]$ и $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающейся в ноль в окрестности границы Γ_1, введем $\phi(x,t) = \eta(t)\psi(x)$. Пусть $H_\phi(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{\pi}{2\alpha^2 l_0 C_0} \right) H_\phi = g(x,t) + \frac{\pi}{2\alpha^2 l_0 C_0}\phi(x,t), \\ H_\phi(x,0) = 0. \tag{18}$$

Положим $H_{\varepsilon,j}(t) = H_\phi(P_\varepsilon^j, t)$. Для $t \in (0,T)$ определим функцию

$$Q_\phi^\varepsilon = \begin{cases} q_\varepsilon^j(x)(\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\varepsilon,j}(t)), & x \in (T_{\varepsilon/4}^j)^+, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \overline{\cup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (T_{\varepsilon/4}^j)^+}. \end{cases} \tag{19}$$

Принимая во внимание оценку (16), получим

$$Q_\phi^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо} \quad \text{в} \quad H^1(\Omega, \Gamma_1). \tag{20}$$

В неравенстве (17) в качестве тестовой функции возьмем $v = \phi(x,t) - Q_\phi^\varepsilon$. Получим

$$\beta(\varepsilon)\int_0^T \int_{l_\varepsilon} (\partial_t \phi - \partial_t Q_\phi^\varepsilon)(\phi - Q_\phi^\varepsilon - u_\varepsilon)\, dx_1 dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega \nabla(\phi - Q_\phi^\varepsilon) \nabla(\phi - Q_\phi^\varepsilon - u_\varepsilon)\, dx dt +$$

$$+\lambda\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{l_\varepsilon}(\phi-Q_\phi^\varepsilon)(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt\geq$$
$$\geq\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{l_\varepsilon}g(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega f(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt-\tag{21}$$
$$-\frac{\beta(\varepsilon)}{2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\left\|\phi(x,0)-\phi(P_\varepsilon^j,0)\right\|^2_{L^2(l_\varepsilon^j)}.$$

Заметим, что $\partial_t Q_\phi^\varepsilon(x,t)\big|_{l_\varepsilon^j}=\partial_t\phi(P_\varepsilon^j,t)-(H_{\varepsilon,j}(t))'$, если $x\in l_\varepsilon^j$, $t\in[0,T]$. Поэтому

$$\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{l_\varepsilon}(\partial_t\phi-\partial_t Q_\phi^\varepsilon)(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt=$$
$$=\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{l_\varepsilon}(\partial_t\phi(x,t)-\partial_t\phi(P_\varepsilon^j,t))(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt+$$
$$+\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{l_\varepsilon^j}\left(\frac{d}{dt}H_{\varepsilon,j}\right)(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt.\tag{22}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{l_\varepsilon}(\partial_t\phi(x,t)-\partial_t\phi(P_\varepsilon^j,t))\times$$
$$\times(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt=0.\tag{23}$$

Обозначим

$$I_\varepsilon\equiv\int_0^T\int_\Omega\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon)\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt.$$

Имеем

$$I_\varepsilon=\int_0^T\int_\Omega\nabla(\phi-W_\phi^\varepsilon)\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\nabla(W_\phi^\varepsilon-Q_\phi^\varepsilon)\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt,$$

где для $t\in[0,T]$

$$W_\phi^\varepsilon(x,t)=\begin{cases}w_\varepsilon^j(x)(\phi(P_\varepsilon^j,t)-H_{\varepsilon,j}(t)),\\ x\in(T_{\varepsilon/4}^j)^+,\quad j\in\Upsilon_\varepsilon,\\ 0,\quad x\in\Omega\setminus\cup_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\overline{(T_{\varepsilon/4}^j)^+}.\end{cases}$$

Используя лемму 1, получим

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T\int_\Omega\nabla(W_\phi^\varepsilon-Q_\phi^\varepsilon)\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt=0.\tag{24}$$

Кроме того, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T\int_\Omega\nabla\phi\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\nabla\phi\nabla(\phi-u)dxdt.\tag{25}$$

Учитывая определение функции W_ϕ^ε, имеем

$$-\int_0^T\int_\Omega\nabla W_\phi^\varepsilon\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt=$$
$$=-\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(T_{\varepsilon/4}^j)^+\setminus\overline{(T_{a_\varepsilon}^j)^+}}\nabla w_\varepsilon^j\times$$
$$\times\nabla[(\phi(P_\varepsilon^j,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)]dxdt=$$
$$=-\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+}\partial_\nu w_\varepsilon^j(\phi(P_\varepsilon^j,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-u_\varepsilon)dsdt-$$
$$-\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T_{a_\varepsilon}^j)^+}\partial_\nu w_\varepsilon^j(\phi(P_\varepsilon^j,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dsdt.$$

В силу того, что w_ε^j является решением задачи (9), получим

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\big|_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+}=\frac{4}{-\alpha^2+\varepsilon\ln(4C_0)},$$
$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\big|_{(\partial T_{a_\varepsilon}^j)^+}=\frac{\exp(\alpha^2/\varepsilon)}{C_0\alpha^2-C_0\varepsilon\ln(4C_0)}.\tag{26}$$

Отсюда выводим

$$-\int_0^T\int_\Omega\nabla W_\phi^\varepsilon\nabla(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dxdt=$$
$$=\frac{4}{\alpha^2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T_{\varepsilon/4}^j)^+}(\phi(P_\varepsilon^j,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-u_\varepsilon)dsdt-$$
$$-\frac{\beta(\varepsilon)}{\alpha^2C_0}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T_{a_\varepsilon}^j)^+}(\phi(P_\varepsilon^j,t)-H_{\varepsilon,j}(t))\times\tag{27}$$
$$\times(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dsdt+\alpha_\varepsilon,$$

где $\alpha_\varepsilon\to0$, если $\varepsilon\to0$.

Из (20)–(27) следует неравенство

$$\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{l_\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}H_{\varepsilon,j}+\lambda H_{\varepsilon,j}-g(P_\varepsilon^j,t)\right)(\phi-Q_\phi^\varepsilon-u_\varepsilon)dx_1dt-$$
$$-\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T_{a_\varepsilon}^j)^+}\frac{1}{C_0\alpha^2}(\phi(P_\varepsilon^j,t)-$$
$$-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-u_\varepsilon)dsdt+\hat\alpha_\varepsilon+$$

$$+\frac{4}{\alpha^2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T^j_{\varepsilon/4})^+}(\phi(P^j_\varepsilon,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-u_\varepsilon)dsdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega\nabla\phi\nabla(\phi-u_\varepsilon)dxdt\geq\int_0^T\int_\Omega f(\phi-Q^\varepsilon_\phi-u_\varepsilon)dxdt, \quad (28)$$

$$\hat{\alpha}_\varepsilon\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\left\|\phi(x,0)-\phi(P^j_\varepsilon,0)\right\|^2_{L^2(l^j_\varepsilon)}=0.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма [3].

Л е м м а 2. *Пусть* $h\in H^1(\Omega,\Gamma_1)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\left|\frac{\beta(\varepsilon)\pi}{2l_0}\int_{l_\varepsilon}hdx_1-\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{(\partial T^j_{a_\varepsilon})^+}hds\right|\leq \quad (29)$$
$$\leq K\sqrt{\varepsilon}\|h\|_{H^1(\Omega,\Gamma_1)}.$$

Из оценки (29) вытекает, что при $\varepsilon\to 0$

$$\left|\frac{\beta(\varepsilon)}{\alpha^2C_0}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T^j_{a_\varepsilon})^+}(\phi(P^j_\varepsilon,t)-H_{\varepsilon,j}(t))\times\right.$$
$$\times(\phi-Q^\varepsilon_\phi-u_\varepsilon)dsdt-\frac{\beta(\varepsilon)\pi}{2\alpha^2C_0l_0}\times$$
$$\left.\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{l_\varepsilon}(\phi(P^j_\varepsilon,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-Q^\varepsilon_\phi-u_\varepsilon)dx_1dt\right|\to 0. \quad (30)$$

Учитывая (28)–(30), выводим неравенство

$$\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{l^j_\varepsilon}\left(\frac{dH_{\varepsilon,j}}{dt}+\lambda H_{\varepsilon,j}-g(P^j_\varepsilon,t)-\frac{\pi}{2\alpha^2C_0l_0}\phi(P^j_\varepsilon,t)+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{2\alpha^2C_0l_0}H_{\varepsilon,j}\right)(\phi-Q^\varepsilon_\phi-u_\varepsilon)dx_1dt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\nabla\phi\nabla(\phi-u)dxdt+$$
$$+\frac{4}{\alpha^2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T^j_{\varepsilon/4})^+}(\phi(P^j_\varepsilon,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-u_\varepsilon)dsdt\geq$$
$$\geq\int_0^T\int_\Omega f(\phi-Q^\varepsilon_\phi-u_\varepsilon)dxdt+\tilde{\alpha}_\varepsilon, \quad (31)$$

где $\tilde{\alpha}_\varepsilon\to 0$, если $\varepsilon\to 0$.

Учитывая, что $H_{\varepsilon,j}(t)$ – решение задачи Коши (18), получим, что первая сумма в левой части неравенства (31) равна нулю.

Из доказанного в [3, 6] утверждения имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{\alpha^2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{(\partial T^j_{\varepsilon/4})^+}(\phi(P^j_\varepsilon,t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\phi-u_\varepsilon)dsdt=$$
$$=\frac{\pi}{\alpha^2}\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\phi(x,t)-H_\phi(x,t))(\phi-u)dx_1dt, \quad (32)$$

где функция $H_\phi(x,t)$ определена формулой (8).

Из (31), (32) следует, что u удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla\phi\nabla(\phi-u)dxdt+$$
$$+\frac{\pi}{\alpha^2}\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\phi-H_\phi)(\phi-u)dx_1dt\geq$$
$$\geq\int_0^T\int_\Omega f(\phi-u)dxdt. \quad (33)$$

Принимая во внимание, что u удовлетворяет неравенству (33), заключаем, что u является обобщенным решением интегрального тождества

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla u\nabla v dxdt+\frac{\pi}{\alpha^2}\int_0^T\int_{\Gamma_2}(u-H_u)vdx_1dt=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega fvdxdt,$$

где $v(x,t)=\eta(t)\psi(x)$, $\eta\in C^1[0,T]$, $\psi\in C^\infty(\bar{\Omega})$ и ψ обращается в ноль в некоторой окрестности границы Γ_1. Учитывая, что множество функций такого вида всюду плотно в $L^2(0,T;H^1(\Omega,\Gamma_1))$, выводим, что u – обобщенное решение задачи (6), (7).

Докажем единственность обобщенного решения задачи (6), (7). Пусть u_1 и u_2 – два обобщенных решения задачи (6), (7). Тогда $w=u_1-u_2$ – обобщенное решение задачи

$$\Delta_x w=0,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),$$
$$\partial_\nu w+\frac{\pi}{\alpha^2}w=H_w(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_2\times(0,T),$$
$$w(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_1\times(0,T),$$
$$\frac{\partial H_w}{\partial t}+\left(\lambda+\frac{\pi}{2\alpha^2l_0C_0}\right)H_w=\frac{\pi}{2\alpha^2l_0C_0}w,$$
$$(x,t)\in\Gamma_2\times(0,T),$$
$$H_w(x,0)=0,\quad x\in\Gamma_2.$$

Так как H_w – решение задачи Коши (7), то для него справедлива оценка

$$\int_0^t\int_{\Gamma_2}|H_w(x,\tau)|^2dx_1d\tau \le Ct\int_0^t\int_{\Gamma_2}|w(x,\tau)|^2dx_1d\tau.$$

Из интегрального тождества для функции w имеем

$$\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla w|^2dxd\tau+\frac{\pi}{\alpha^2}\int_0^t\int_{\Gamma_2}w^2dx_1d\tau=\int_0^t\int_{\Gamma_2}wH_wdx_1d\tau \le$$

$$\le C_1\sqrt{t}\int_0^t\int_{\Gamma_2}w^2dx_1d\tau \le C_2\sqrt{t}\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla w|^2dxd\tau.$$

При $C_2^2t<1$ немедленно получаем, что $w\equiv 0$. Далее, применяя итерации по времени, получим, что $w=0$ п.в. в $\Omega\times(0,T)$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования Ж.И. Диаз и Д. Гомез-Кастро были частично поддержаны проектом № MTM2017-85449-P (Ministerio de Ciencia, Innovacin y Universidades Agencia Estatal de Investigacin (Испания)). Кроме этого, исследования Д. Гомез-Кастро частично поддержаны Грантом PG 2018-098440-BI00 (Ministerio de Ciencia, Innovacin y Universidades Agencia Estatal de Investigacin (Испания)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Angulano M.* // arXiv:1712.01183v1[math.AP]4. Dec 2017.
2. *Cioranescu D., Murat F.* / In: *A. Cherkaev and R. Kohn* (Eds.). Topics in Mathematical Modeling of Composite Materials (P. 4594). N.Y.: Springer Scien Business Media, 1997.
3. *Диаз Ж.И., Гомез-Кастро Д., Подольский А.В., Шапошникова Т.А.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 644–649.
4. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T.A.* Nanocomposite reaction-diffusion processes: anomalous improved homogenization. Series on Nonlinear Analysis and Applicarions. B.: De Gruyter (to appear in 2021).
5. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* // EJDE. 2019. V. 77. P. 1–13.
6. *Шапошникова Т.А., Зубова М.Н.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 1. С. 12–19.
7. *Timofte C.* // Math. Model. and Analysis. 2003. V. 8. № 4. P. 337–350.
8. *Gomez D., Lobo M., Perez E., Sanchez-Palencia E.* // Applicable Analysis. 2018. V. 97. № 16. P. 2893–2919.

A TIME DEPENDING STRANGE TERM ARISING IN HOMOGENIZATION NEUMANN AND DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS IN CRITICAL CASE

J. I. Diaz[a], D. Gomez-Castro[a], T. A. Shaposhnikova[b], and M. N. Zubova[b]

[a] *Instituto de Mathematica Interdisciplinar, Universitat Complutense, Madrid, Spain*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper we consider the homogenization of the boundary value problem in a plane domain with rapidly alternating Neumann and dynamic boundary conditions on some parts of the boundary, which have so called the critical size. We show that in homogenized problem a new term arised and It is a nonlocal memory type term, depending on the trace on the boundary of the solution of the effective problem.

Keywords: homogenization, rapidly oscillating boundary conditions, dynamic boundary conditions