

УДК 519.635.8

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА МЕТОДАМИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

© 2020 г. Н. М. Евстигнеев^{1,*}, Н. А. Магницкий^{1,**}

Представлено академиком РАН Ю.С. Попковым 05.06.2019 г.

Поступило 05.06.2019 г.

После доработки 05.06.2019 г.

Принято к публикации 18.02.2020 г.

Данная работа подводит итог результатам, полученным авторами в рамках применения численных методов и методов хаотической динамики к проблеме ламинарно-турбулентного перехода в некоторых задачах динамики жидкости и газа. Были проанализированы следующие задачи: 2D- и 3D-задача А.Н. Колмогорова в периодической области, 3D-задача Релея–Бенара в прямоугольных областях, 3D-задача течения с уступа несжимаемой жидкости, 3D-задачи развития неустойчивостей Релея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца для вязкого идеального газа. Анализ подтвердил развитие неустойчивостей через каскады субкритических и суперкритических бифуркаций. Во всех системах был найден универсальный сценарий перехода к хаосу Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого вместе с другими сценариями хаотизации динамических систем.

Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, хаотическая динамика, численные методы, бифуркационный анализ, уравнения Навье–Стокса

DOI: 10.31857/S2686954320020113

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем предполагать, что ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) полностью описывается начально-краевой задачей для уравнений Навье–Стокса. В общем виде можно сформулировать следующую задачу.

Задача 1. Пусть задана кусочно-непрерывная область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с краем $\partial\Omega$, вектор-функция \mathbf{g} , число T и начальные условия $\rho_0, \mathbf{u}_0, E_0$. Для заданных значений параметра $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ найти вектор-функцию скорости $\mathbf{u}: \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ и скалярные функции плотности $\rho: \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, давления $p: \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ и энергии $E: \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - 2\mu S_{ij}] &= \rho g_i, \\ \{i, j, k\} &= 1, 2, 3; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j E + u_j p - 2\mu u_i S_{ij}] &= \rho u_k g_k, \\ \rho E &= \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho e, \\ p &= (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Полученные функции проанализировать методами хаотической динамики и определить тип решения в смысле указанных методов. Определить такие μ_* , что найденные решения терпят бифуркации и построить бифуркационные схемы вплоть до перехода в хаос. Проследить наблюдающиеся сценарии перехода к хаосу.

Здесь $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\delta_{ij}}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, значение динамической вязкости μ выступает в роли бифуркационного параметра. Заметим, что для случая те-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: evstigneevnm@gmail.com

**E-mail: nikhmag@gmail.com

чения несжимаемой жидкости первое уравнение становится калибровкой вида $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, во втором векторном уравнении постоянная плотность ρ^* может быть вынесена и $\frac{\partial}{\partial x_j} (-2\mu S_{ij}) = -\frac{\mu}{\rho^*} \Delta \mathbf{u}$, третье уравнение сохранения энергии выражается в тождество. Таким образом, тип задачи поменяется на седловую. Во всех задачах мы переходим к безразмерным критериям подобия, которые становятся бифуркационными параметрами.

Будем разделять ЛТП на четыре стадии:

1. Потеря устойчивости основного течения. Основное течение теряет свою устойчивость и образуются вторичные течения. Применяются методы линейной устойчивости, теория слабых нелинейных возмущений, теория косимметрии Юдовича [1], а в сложных случаях численные методы, например, [2].

2. Множественные изменения вторичных течений. Наблюдается каскад изменений вторичных течений (субкритический [3], смешанный [4], суперкритический [5]). На данной стадии превалируют численные методы анализа – методы прямого численного моделирования и методы анализа динамических систем.

3. Кризис вторичных течений. Происходит резкое усложнение многообразия, содержащего решение системы. Кризисы обычно связаны с сильными структурными изменениями фазовых портретов систем и их аттракторов.

4. Возникновение развитой турбулентности. Развитием кризисов множества вторичных течений. Решения характеризуются большой нерегулярностью и невозможностью выделить какие-либо структуры в фазовом пространстве. Применяется теория А.Н. Колмогорова и А.М. Обухова [6], диаграммы Вилда, теория Крейчнана, методы замыкания моментов цепочек Фридмана–Келлера [7].

На первых трех стадиях ЛТП динамика процесса может быть описана с помощью теории динамических систем. Применение методов хаотической нелинейной динамики к вопросу ЛТП требует создания специальных методов численного решения и анализа задач, обладающих большой размерностью. Разработанные на сегодняшний день методы автоматического построения бифуркационных диаграмм не применимы к такого типа задачам, поскольку очень часто опираются на прямые методы работы с матрицами. При численном решении дискретных нелинейных уравнений, аппроксимирующих исходную задачу, требуется высокое разрешение как по пространственным, так и по временным переменным. Как отмечал академик К.И. Бабенко в работе [8], точке в фазовом пространстве может соответствовать очень сложное стационарное ре-

шение в физическом. Следовательно, высокая разрешающая способность численного метода необходима даже для описания простейшего решения, являющегося стационарной точкой в фазовом пространстве. Поэтому авторами во всех исследованиях используются высокопроизводительные вычислительные системы на основе множественных графических сопроцессоров.

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Заметим, что впервые динамическая система для начально-краевой задачи уравнений Навье–Стокса была рассмотрена в работе О.А. Ладыженской [9]. Система уравнений (1) численно в общем виде может быть записана как

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{N}(\mu) + \mathbf{g}, \quad (2)$$

где \mathbf{U} – вектор дискретных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ – вектор нелинейных членов уравнения и $\mathbf{N}(\mu)$ – вектор линейных членов уравнения, в которых численно реализованы дифференциальные операторы, учтены краевые условия и, если необходимо, учтена калибровка несжимаемости. Размерность вектора \mathbf{U} , с учетом вышесказанного, составляет порядка 60–210 млн в зависимости от задачи. Мы хотим построить бифуркационную диаграмму, зависящую от вектора параметров для системы (2) следующим образом. Пусть начальное решение (соответствующее основному ламинарному течению) известно аналитически или численно. Мы проводим продолжение решения по параметру, определяем точки бифуркации и их тип с помощью анализа линеаризованной системы (2). Вторичные бифурцировавшие решения продолжают аналогично. В связи со сложностью системы (2) мы должны учитывать существование решений, не связанных с основной ветвью, т.е. необходимо строить дислоцированные бифуркационные диаграммы. Получение полной информации о бифуркациях системы становится невозможной в практическом смысле (при численном анализе), но зная конечное количество значений параметров и классификацию фазовых портретов, можно определить структуру бифуркационной диаграммы между данными точками. Для этого будем использовать следующее

О п р е д е л е н и е 1. Б и ф у р к а ц и о н н о й с х е м о й будем называть запись вида

$$p_1(q_1) \rightarrow p_2(q_2) \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \{p_{n-1} \rightarrow p_n \rightarrow p_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow p_{n+m}\}_N(q_a, q_b) \rightarrow \dots,$$

$p_j(q_j)$ есть указание типа бифуркации или классификация фазового портрета (с точностью до гомеоморфизма) для значения бифуркационного параметра q_j , обозначение $\{\dots\}_N$ указывает на повторяемость данной последовательности бифур-

каций для интервала значений бифуркационных параметров (q_a, q_b) .

Данная схема позволяет выделить основные классы эквивалентности системы, не указывая всех значений бифуркационных параметров и всех бифуркационных границ. Схема качественно показывает поведение динамической системы в рамках классов эквивалентности при затруднении построения бифуркационной диаграммы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Подведем итог исследованиям ЛТП, приводя полные бифуркационные схемы без учета физической интерпретации результатов, которая дана в соответствующих статьях. Введем следующие обозначения бифуркационных схем: P – устойчивая точка, ${}_s pf$ – субкритическая бифуркация вилки, pf_s – суперкритическая бифуркация вилки, sn – седлоузловая бифуркация, h_n – бифуркация Андронова–Хопфа коразмерности n , ${}_s h_n$ – субкритическая h_n , I – перемежаемость в смысле Магницкого [10], Cn – предельный цикл периода n , C_s – сингулярный предельный цикл, C_{sz} – сингулярный предельный цикл со сформировавшимися бесконечно складчатыми сепаратрисными многообразиями [10], nTm – инвариантный тор размерности n , образованный предельными циклами периода m , nTm_R – резонансный тор на основе nTm , nT_s – сингулярный nT , nT_{sz} – nT_s со сформировавшимися бесконечно складчатыми сепаратрисными многообразиями, Ch – хаотическое решение (это решение в фазовом портрете которого невозможно выделить структуры, а в образе Фурье наблюдаемого сигнала нет выделенных частот), ... – пропущенный участок каскадов бифуркаций. Отдельные ветви заключаются в квадратные скобки и нумеруются.

Течение А.Н. Колмогорова на 2D-торе [5]. Область $[0; 8\pi] \times [0; 2\pi]$, $\mathbf{f} = (\sin(4y), 0)^T$.

$$P \rightarrow \{pf_s \rightarrow P \rightarrow \dots\}_4(4.983, 17.288) \rightarrow \begin{cases} 1. \\ 2. \end{cases}$$

$$1. [C1(18, 19) \rightarrow 2T1(19) \rightarrow sn(20.151) \rightarrow 2T2(20.16, 20.17) \rightarrow 2T2_R(20.17) \rightarrow \dots \rightarrow 2T3(20.203) \rightarrow 2T3_R(20.205, 20.9) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2T3 \cdot 2(20.9, 22) \rightarrow Ch.]$$

$$2. [C1(10.1, 16) \rightarrow 2T1(16) \rightarrow sn(16.78) \rightarrow 2T2(16.8, 18.6) \rightarrow 2T4(18.6, 18.8) \rightarrow \dots \rightarrow 2T7(20.18) \rightarrow 2T5(20.201, 20.3) \rightarrow 2T5_R(20.3, 23.0) \rightarrow 2T_{sz}(23.5) \rightarrow Ch.]$$

Течение А.Н. Колмогорова на 3D-торе [11].

Область $[0; 2\pi]^3$:

$$P \rightarrow h_2(12.6) \rightarrow 2T1 \rightarrow I \rightarrow Ch.$$

Область $[0; 4\pi] \times [0; 2\pi]^2$:

$$P \rightarrow pf_s(4.219) \rightarrow {}_s h_1(6.012) \rightarrow$$

$$\rightarrow C1(6.012, 6.08) \rightarrow \begin{cases} 1. \\ 2. \\ 3. \end{cases}$$

$$1. [C2(6.8) \rightarrow C4(6.9) \rightarrow \dots \rightarrow C_s(7.69) \rightarrow C_{sz}(7.7) \rightarrow I(7.79, 7.98) \rightarrow \rightarrow \{C1 \rightarrow C2 \rightarrow C4 \rightarrow \dots \rightarrow C_s\}_2(8, 10.3) \rightarrow I(10.3, 10.4) \rightarrow C(10.401) \rightarrow \dots \rightarrow C3(10.41) \rightarrow C3 \cdot 2(10.421) \rightarrow \dots \rightarrow C_{sz}(10.43, 10.7) \rightarrow \rightarrow \{C16 \rightarrow C8 \rightarrow \dots \rightarrow C2 \rightarrow C1\}(10.7, 11.09) \rightarrow \rightarrow \{C2 \rightarrow C4 \rightarrow \dots \rightarrow C28 \rightarrow \dots \rightarrow C5 \rightarrow C3\}(11.09, 11.1) \rightarrow \rightarrow C_{sz}(11.105) \rightarrow I(11.11, 11.29) \rightarrow Ch.]$$

$$2. [{}_s pf(6.0806) \rightarrow h_1(11.012) \rightarrow C(11.015, 11.25) \rightarrow h_1(11.25) \rightarrow 2T1 \rightarrow h_1(11.352) \rightarrow 3T1 \rightarrow 3T1_R(11.4, 11.8) \rightarrow 3T1(11.8, 11.864) \rightarrow h_1(11.685) \rightarrow 4T1 \rightarrow 4T1_R(11.685, 11.686) \rightarrow Ch(11.69, 11.7) \rightarrow 2T1(11.705) \rightarrow 2T2(11.71) \rightarrow 2T5(11.725) \rightarrow 2T3(11.76) \rightarrow Ch(11.78, 11.855) \rightarrow 2T_s(11.856) \rightarrow 2T_{sz}(11.86, 12.05) \rightarrow Ch.]$$

$$3. [{}_s pf(6.806) \rightarrow h_1(7.095) \rightarrow C(7.1) \rightarrow h_1(7.202) \rightarrow 2T1 \rightarrow 3T1(9.4, 9.6) \rightarrow 3T1_R(9.61, 10.2) \rightarrow Ch(10.2, 10.43) \rightarrow 2T1(10.431) \rightarrow 2T3(10.45) \rightarrow$$

$$2T3_R(10.45, 10.451) \rightarrow 2T_{sz}(10.452, 11.84411) \rightarrow Ch.]$$

Задача течения с уступа в 3D-прямоугольной области [12]. Область до ступени $[0, 2] \times [0, 0.9] \times [0, 3.5]$ после ступени $[2, 12] \times [0, 1.5] \times [0, 3.5]$, твердые стенки по осям y и z .

$$P \rightarrow pf_s(736) \rightarrow h_1(738.95) \rightarrow C1(740, 850) \rightarrow h_1(849.7) \rightarrow 2T1(850, 882) \rightarrow h_1(882.9) \rightarrow 3T1(883, 883.8) \rightarrow 3T2(883.5, 890) \rightarrow Ch.$$

Задача конвекции Релея–Бенара в 3D-прямоугольных областях [13]. Бифуркационный параметр – число Рэлея, фиксированный параметр – число Прандтля $Pr = 1$.

Область $4 \times 4 \times 1$, периодические краевые условия по осям x, y , твердая стенка по оси z .

$$P \rightarrow pf_s(1710) \rightarrow$$

$$\rightarrow \{pf_s \rightarrow P\}_4(2432; 3001; 4832; 4844) \rightarrow \begin{cases} 1. \\ 2. \\ 3. \end{cases}$$

$$1. [C1 \rightarrow C2 \rightarrow C4 \rightarrow \dots \rightarrow C_s \rightarrow \dots \rightarrow I^* \rightarrow \dots \rightarrow C2 \cdot 9 \rightarrow C2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow C7 \rightarrow C5 \rightarrow C3 \rightarrow C3 \cdot 2 \rightarrow \dots \rightarrow C_s]_4(7610.3858, 9550) \rightarrow Ch. \\ * \rightarrow Ch.]$$

$$2. [h_1(4990.37) \rightarrow C1(4991, 5893) \rightarrow h_1(5893.4) \rightarrow 2T1(5894, 7180) \rightarrow 2T2(7180.5) \rightarrow 2T2_R(7421.5623) \rightarrow 2T2(7425, 8350) \rightarrow 2T2_R(8350.0712) \rightarrow 2T2_s(8377) \rightarrow 2T2_{sz}(8381, 8382) \rightarrow Ch.]$$

$$3. [h_1(4990.37) \rightarrow C1(4991, 5893) \rightarrow h_1(5893.4) \rightarrow 2T1(5894, 7180) \rightarrow 2T2(7180.5) \rightarrow 2T2_R(7421.5623) \rightarrow 2T2(7425, 8350) \rightarrow 3T1(8527) \rightarrow 4T1(8617.7, 8619) \rightarrow Ch.]$$

Кубическая область $1 \times 1 \times 1$, условия твердой стенки по всем направлениям. Число Прандтля варьируется в зависимости от серии расчетов. Бифуркационный параметр в схемах μ записан как $\mu = Ra \times 10^{-5}$.

$$Pr = 1.866$$

$$P \rightarrow pf_s(0.14345) \rightarrow P \rightarrow \{pf_s \rightarrow P \rightarrow \}_4(0.1435, 2.5) \rightarrow h_1(2.503) \rightarrow C1 \rightarrow h_1(2.67) \rightarrow 2T1 \rightarrow 2T2(2.912) \rightarrow 2T4(2.913) \rightarrow \dots \rightarrow 2T_{sz}(2.92) \rightarrow Ch.$$

$$Pr = 1.61$$

$$P \rightarrow pf_s(0.1432) \rightarrow P \rightarrow \{pf_s \rightarrow P \rightarrow \}_4(0.1432, 3.015) \rightarrow h_1(3.061) \rightarrow C1 \rightarrow h_s(3.0652) \rightarrow 2T1 \rightarrow 2T2(3.069) \rightarrow Ch.$$

$$Pr = 1.354$$

$$P \rightarrow pf_s(0.14163) \rightarrow P \rightarrow \{pf_s \rightarrow P \rightarrow \}_4(0.142, 2.68) \rightarrow h_1(2.681) \rightarrow C1 \rightarrow C2(2.69, 3.005) \rightarrow C4(3.01) \rightarrow \dots \rightarrow C3(3.085) \rightarrow C_{sz}(3.0856) \rightarrow Ch.$$

Задачи развития неустойчивостей Релея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца [14]. Описываются системой законов сохранения идеального вязкого

газа. Область расчета – прямоугольная $8 \times 1 \times 1$, периодические краевые условия по оси z и условия симметрии по оси y в направлении действия гравитации. По оси x формируется слой смешения с разными скоростями (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, обозначена КН), а также с разными плотностями (совместная задача, обозначена RT–КН). Бифуркационный параметр – сжимаемый аналог числа Рейнольдса. Фиксированы число Ричардсона и длина области. Вариация формы входных граничных условий, задающих фазу раздела: фаза раздела зависит только от y (простые условия) или задана некоторой функцией от y, z (возмущенные условия).

КН, простые граничные условия:

$$P \rightarrow h_1(997.6) \rightarrow C1(1000, 1020) \rightarrow C2(1020, 1022) \rightarrow \dots \rightarrow C5(1105) \rightarrow \dots \rightarrow C11(1140) \rightarrow C13(1175) \rightarrow \dots \rightarrow C(2500, 100000).$$

КН, возмущенные граничные условия:

$$P \rightarrow h_1(422.2) \rightarrow C1(423, 760) \rightarrow h_1(760.12) \rightarrow 2T1(761, 950) \rightarrow 3T1(951, 990) \rightarrow Ch.$$

RT–КН, простые граничные условия:

$$P \rightarrow h_1(1501) \rightarrow C(1501, 1700) \rightarrow C2(1700, 1754) \rightarrow C4(1754) \rightarrow \dots \rightarrow C_s(1790) \rightarrow \dots \rightarrow C5(2402) \rightarrow C3(2417, 2435) \rightarrow C3 \cdot 2(2435, 2480) \rightarrow Ch.$$

RT–КН, возмущенные граничные условия:

$$P \rightarrow h_1(10.5) \rightarrow \{C \rightarrow C2 \rightarrow C4 \rightarrow \dots \rightarrow C2 \rightarrow C\}(11, 509) \rightarrow h_1(509.8) \rightarrow 2T1 \rightarrow 3T1(515, 520.5) \rightarrow 4T1(520.5)^1 \rightarrow 4T_{sz}(521.2) \rightarrow Ch.$$

Анализ фазового портрета при сверхзвуковом течении газа. Обнаружено [15], что при наличии в решении стационарных ударных волн фазовое пространство распадается на не связанные подпространства (прямая сумма подпространств), разделенные границами краевых условий задачи и конфигурацией стационарных ударных волн. В каждом таком подпространстве происходит полностью независимый от других подпространств сценарий ЛТП.

¹ Проекция фазового пространства, сечения Пуанкаре и физическое решение, ему соответствующее, показаны на рис. 1 и 2.

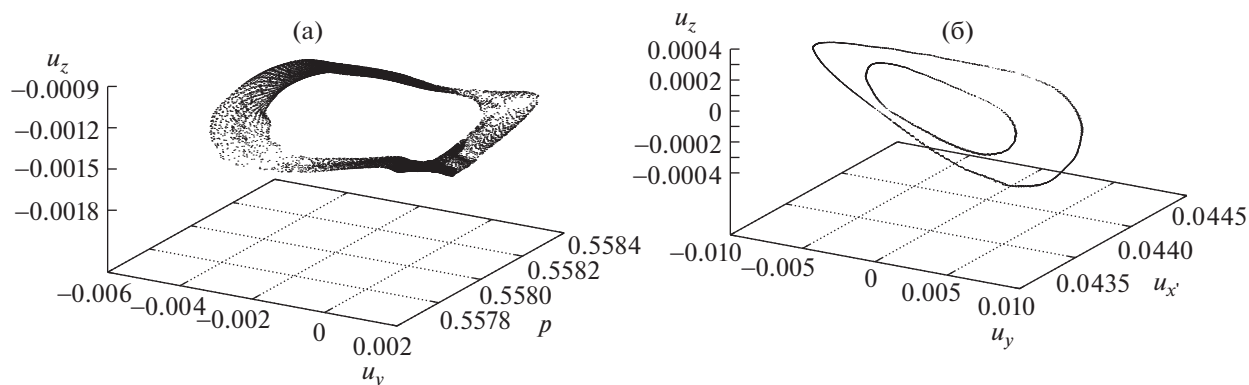


Рис. 1. Проекция первого и третьего сечений Пуанкаре тора размерности четыре.

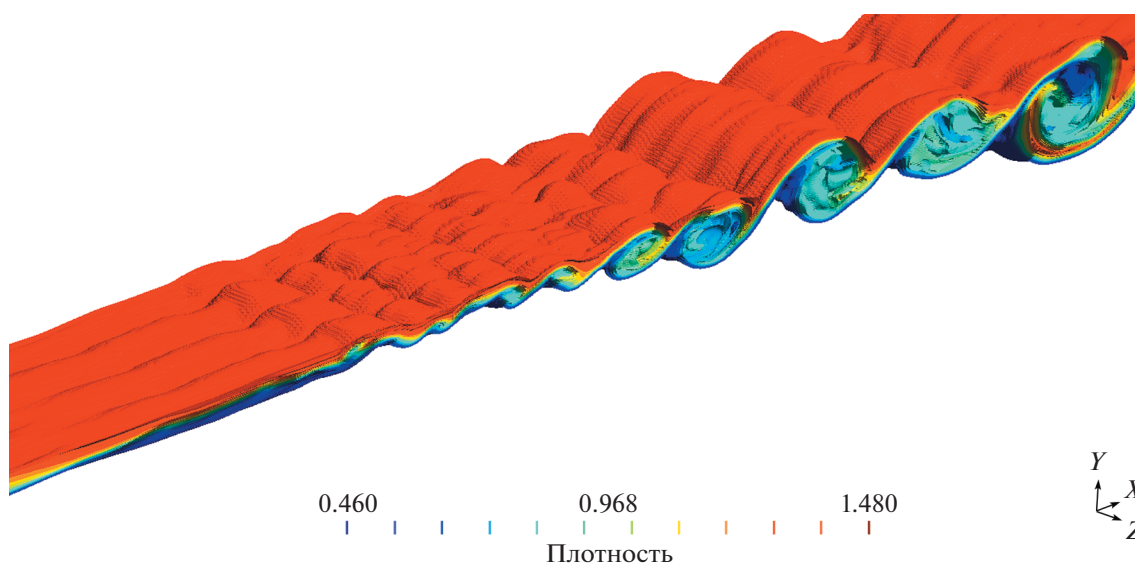


Рис. 2. Изоповерхности функции плотности в физическом пространстве, соответствующие тору размерности четыре в фазовом пространстве.

ВЫВОДЫ

Проведены численные исследования некоторых характерных задач ЛТП. Во всех задачах отмечено присутствие универсального сценария Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого [10] перехода к хаосу, который может наблюдаться как на предельных циклах, так и на инвариантных торах различной размерности. При этом во всех случаях данный сценарий приводит к формированию сингулярных аттракторов со сформировавшимися бесконечно складчатыми сепаратрисными многообразиями [10]. При развитии неустойчивостей для всех задач характерен эффект мультистабильности решений, когда переход с одной ветви решений на другую может происходить из-за близости траекторий аттракторов в фазовом пространстве. Наблюдаются начальные стадии сценария Ландау–Хопфа (до тора размерности четыре). Также найдены другие сценарии и кризисы, характерные для динамики сложных систем большой размерности. В частно-

сти, наблюдается эффект перемежаемости в смысле Магницкого [10] и возникновение резонансов в квазипериодических решениях (phase lock).

Большая часть исходных кодов программ, использованных в данном сообщении, находятся на публичной платформе разработчика GitHub: github.com/evstigneevnm. Авторы просят читателей ссылаться на соответствующие публикации при использовании данных программ в научных целях.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 18–29–10008 мк и 20–07–00066.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдович В.И. // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.

2. Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. // ДАН. 2011. Т. 440. № 5.
3. Матин С.К., Tuckerman L.S. // Physics of Fluids. 1995. V. 7. P. 80.
4. Никитин Н.В., Пиманов В.О. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. V. 157. № 3. P. 111–116.
5. Евстигнеев Н.М., Магницкий Н.А., Силаев Д.А. // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1302–1314.
6. Колмогоров А.Н. // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
7. Фурсигов А.В. // ДАН СССР. 1991. 319. № 1. С. 83–87.
8. Афендикова А.Л., Бабенко К.И. // Математ. моделирование. 1989. Т. 1. № 8. С. 45–74.
9. Ладыженская О.А. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.
10. Магницкий Н.А. Теория динамического хаоса. М.: ЛЕНАЛД, 2011.
11. Evstigneev N., Magnitskii N. // J. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. V. 6. P. 345–353.
12. Evstigneev N.M., Magnitskii N.A. / In: Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications: INTECH, 2013. P. 250–280.
13. Evstigneev N.M. // Open J. Fluid Dyn. 2016. V. 6. P. 496–539.
14. Evstigneev N.M., Magnitskii N.A. // In: Turbulence Modelling Approaches – Current State, Development Prospects, Applications, INTECH, 2017. P. 29–60.
15. Евстигнеев Н.М., Магницкий Н.А. // Тр. ИСА РАН. 2012. Т. 62. № 4. С. 85–102.

NUMERICAL ANALYSIS OF LAMINAR-TURBULENT TRANSITION BY THE METHODS OF CHAOTIC DYNAMICS

N. M. Evstigneev^a and N. A. Magnitskii^a

^a *Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.S. Popkov

This paper highlights the results in the application of the methods of chaotic dynamics to the problem of laminar–turbulent transition in some problems of fluid and gas dynamics. The following problems were analyzed: 2D and 3D A.N. Kolmogorov problems, 3D Rayleigh–Benard convection problem in rectangular domain, 3D backward-facing step problem, development of 3D Rayleigh–Taylor and Kelvin–Helmholtz instabilities in compressible viscous flows. The analysis confirmed that the instabilities are developed via subcritical or supercritical cascades of bifurcations. In all systems a universal scenario of transition to chaos (Feigenbaum–Sharkovskii–Magnitskii scenario) was found along with other scenarios of dynamics system chaotization.

Keywords: laminar-turbulent transition, chaotic dynamics, numerical methods, Navier–Stokes equations