ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 78–81

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ e^{-itH}, ГДЕ $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$

 М. В. Платонова[1,2,*], **С. В. Цыкин**[1,**]

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 17.12.2019 г.
Поступило 17.12.2019 г.
После доработки 17.12.2019 г.
Принято к публикации 26.02.2020 г.

В работе предложены два типа вероятностной аппроксимации в смысле сильной операторной сходимости оператора e^{-itH}, где $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. Аппроксимирующие операторы в первом случае имеют вид математических ожиданий функционалов от пуассоновского точечного поля, а во втором случае – математических ожиданий функционалов от сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным моментом порядка $2m + 2$.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, пуассоновские случайные меры, предельные теоремы

DOI: 10.31857/S2686954320020198

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности ($\sigma \in \mathbf{R}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{1}$$

причем начальная функция φ предполагается непрерывной и ограниченной. Известно, что для решения задачи (1) справедливо вероятностное представление

$$u(t, x) = \mathbf{E}\varphi(x + \sigma w(t)), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Если в уравнении (1) вещественное число σ заменить на комплексное число $\sigma = e^{i\pi/4}$, то уравнение теплопроводности (1) перейдет в уравнение Шрёдингера (см. [8, с. 331]). Представление (2) в этом случае теряет смысл, так как в этом случае мы должны будем подставлять комплексную величину $x + \sigma w(t)$ в функцию вещественного аргумента. Формально решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера может быть записано с использованием интеграла (обычно его называют континуальным или функциональным интегралом) по так называемой мере Фейнмана. Мера Фейнмана является комплексно-значной конечно-аддитивной функцией множества, определенной на алгебре цилиндрических множеств, и не может быть продолжена до меры на соответствующей σ-алгебре (см. [1]).

В работах [2–4] был предложен уже чисто вероятностный метод построения аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера средними значениями функционалов от стохастических процессов. Были построены два типа аппроксимации решения задачи Коши. В первом случае решение аппроксимировалось средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля, а во втором случае – средними значениями функционалов от нормированных сумм независимых случайных величин с общим симметричным распределением и конечным четвертым моментом.

Целью данной работы является построение вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{3}$$

где m – произвольное натуральное число. Так же как в [3] будет построено два типа аппроксимации решения задачи Коши средними значениями

[1] *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
*E-mail: mariyaplat@rambler.ru
**E-mail: sergei.tcykin@gmail.com

функционалов от стохастических процессов. Первый из них в качестве стохастического процесса использует интеграл по пуассоновскому точечному полю, а второй — нормированные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным моментом порядка $2m + 2$. Отметим еще, что в работах [5–7] были построены аппроксимации решения задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера, содержащего в правой части дробную производную порядка $\alpha \in \bigcup_{m=2}^{\infty} (m-1, m)$.

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ СРЕДНИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ПУАССОНОВСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПОЛЯ

Пусть ν — пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью $\mathbf{E}\nu(dt, dx) = dt\mu(dx)$, где мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx}{x^{1+2m}}.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint_{[0,t]\times[\varepsilon, e\varepsilon]} x\nu(ds, dx),$$

где e — основание натурального логарифма.

Через $\hat{\varphi}(p)$ будем обозначать прямое преобразование Фурье функции φ:

$$\hat{\varphi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ipx} dx.$$

Представим начальную функцию φ в виде суммы

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где P_+, P_- — проекторы Рисса, определяемые на $L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R})$ как

$$\begin{aligned} P_+\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)dp, \\ P_-\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ipx}\hat{\varphi}(p)dp. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

Положим $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)}$. Так выбранное комплексное число σ принадлежит верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$, $\mathrm{Re}\sigma > 0$ и удовлетворяет соотношению $(i\sigma)^{2m} = -i$.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}[&(\varphi_- * h_\varepsilon)(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)) + \\ &+ (\varphi_+ * h_\varepsilon)(x + \sigma\xi_\varepsilon(t))], \end{aligned}$$

где функция $h_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\begin{aligned} \hat{h}_\varepsilon(p) = \exp&\left(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\left(i|p|\sigma x + \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} + \ldots + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{(i|p|\sigma x)^{2m-1}}{(2m-1)!}\right)d\mu(x)\right) \times \\ &\times \exp\left(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}d\mu(x)\right). \end{aligned}$$

Отметим, что функция $\hat{h}_\varepsilon(p) \in L_q(\mathbf{R})$ при всех $1 \le q \le \infty$, так как $\mathrm{Re}(i\sigma)^{2m+1} > 0$.

Т е о р е м а 1. 1. *Оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$r_{\varepsilon,t}(p) = \exp\left(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\right)H(t, \varepsilon, p),$$

где

$$\begin{aligned} H(t, \varepsilon, p) = \exp&\left(t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\left(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m}}{(2m)!} - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)d\mu(x)\right). \end{aligned}$$

2. *Для любых t, ε, p справедливо неравенство $|H(t, \varepsilon, p)| \le 1$.*

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство Соболева функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [9, с. 146]). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k}\int_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2 dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [9, с. 190]):

$$\|\psi\|_{W_2^k(\mathbf{R})}^2 = \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k})|\hat{\psi}(p)|^2 dp.$$

Через P^t обозначим полугруппу $P^t = \exp\left(\frac{it(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\right)$. По определению полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (3) (см., например, [8, с. 331; 10]).

Т е о р е м а 2. *Существует число $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\left\|P^t\varphi - P^t_\varepsilon\varphi\right\|_{L_2(\mathbf{R})} \leq Ct\varepsilon^2 \left\|\varphi\right\|_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

С л е д с т в и е 1. *Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо*

$$\|P^t_\varepsilon\varphi - P^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ СРЕДНИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что случайная величина ξ_1 имеет конечный момент порядка $2m+2$ и $\mathbf{E}\xi_1^{2m} = 1$.

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$, – независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица. Обозначим $\varkappa_1 = \mathbf{E}\xi_1^1$, $\varkappa_2 = \mathbf{E}\xi_1^2, \ldots, \varkappa_{2m+2} = \mathbf{E}\xi_1^{2m+2}$. Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/2m}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j.$$

Для каждого натурального n определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}[(\varphi_- * R_n^t)(x - \sigma\zeta_n(t)) + (\varphi_+ * R_n^t)(x + \sigma\zeta_n(t))],$$

где, как и выше, функции $\varphi_\pm$ определены формулой (4), а $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)}$. Функция $R_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\hat{R}_n^t(p) = \exp\left(-ti|p|\sigma n^{1-\frac{1}{2m}}\varkappa_1 - \frac{t(i|p|\sigma)^2 n^{1-\frac{2}{2m}}\varkappa_2}{2!} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - \frac{t(i|p|\sigma)^{2m-1} n^{1-\frac{2m-1}{2m}}\varkappa_{2m-1}}{(2m-1)!}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{t(i|p|\sigma)^{2m+1} n^{1-\frac{2m+1}{m}}\varkappa_{2m+1}}{(2m+1)!}\right).$$

Т е о р е м а 3. 1. *Оператор P_n^t является псевдодифференциальным оператором с символом $r_{n,t}(p) = \exp\left(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\right)H_n(t,p)$, где*

$$H_n(t,p) = \exp\left(nt\int_0^\infty\left(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}} - \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m}}{(2m)!n} - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m+1}}{(2m+1)!n^{(2m+1)/2m}}\right)d\mathcal{P}(y)\right).$$

2. *Для любых n, t, p* справедливо неравенство $|H_n(t,p)| \leq 1$.

Т е о р е м а 4. *Существует число $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t\varphi - P_n^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \leq \frac{Ct}{n^{1/m}}\|\varphi\|_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

С л е д с т в и е 2. *Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Н.В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.* Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах. М.: Наука, 1983.
2. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2011. Т. 396. С. 111–143.
3. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2016. Т. 454. С. 158–175.
4. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* // Функц. анализ и его прил. 2018. Т. 52. 2. С. 25–39.

5. *Платонова М.В., Цыкин С.В.* // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2017. Т. 466. С. 257–272.
6. *Платонова М.В., Цыкин С.В.* // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2018. Т. 474. С. 199–212.
7. *Платонова М.В., Цыкин С.В.* // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2019. Т. 486. С. 254–264.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
9. *Фаддеев Д.К., Вулих Б.З., Уральцева Н.Н.* Избранные главы анализа и высшей алгебры. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1981.
10. *Kim J.M., Arnold A., Yao X.* // Monatshefte für Mathematik. 2012. V. 168. 2. P. 253–266.

PROBABILISTIC APPROXIMATION OF THE EVOLUTION OPERATOR e^{-itH} WHERE $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$

M. V. Platonova[a] and S. V. Tcykin[b]

[a] *Steklov Institute of Mathematics at Saint-Petersburg, Saint-Petersburg, Russian Federation*
[b] *Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov

We suggest two approaches to construct a probabilistic approximation of the evolution operator e^{-itH} where $H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ in the strong operator topology. In the first approach the approximating operators have the form of expectations of functionals of a certain random point field while in the second one the approximating operators have the form of expectations of functionals of sums of i.i.d. random variables with finite moments of the order $2m + 2$.

Keywords: Shrödinger equation, Poisson random measures, limit theorems