ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 82–85

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

 С. В. Попов[1,2,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 18.02.2019 г.
Поступило 19.02.2019 г.
После доработки 25.02.2020 г.
Принято к публикации 25.02.2020 г.

Рассматривается теорема о поведении интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности и ее приложение для краевых задач для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Теория сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения гёльдеровским пространствам. Отметим случай $n = 3$, когда гладкость входных данных с условиями разрешимости определяют принадлежность решения более гладким пространствам вблизи концов по временной переменной.

Ключевые слова: интеграл типа Коши, параболические уравнения с меняющимся направлением времени, условия склеивания, пространство Гёльдера, сингулярное интегральное уравнение

DOI: 10.31857/S2686954320020204

Изучаются параболические уравнения с меняющимся направлением времени с помощью применения теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [1–5], а также поведение интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и в точках разрыва плотности в пространствах Гёльдера. Известно, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного направления времени существенно зависят как от условий склеивания, так и от нецелого показателя пространства Гёльдера.

В области $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассматривается параболическое уравнение $2n$-го порядка с меняющимся направлением времени

$$\operatorname{sgn} x u_t = (-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^{\pm})$, $p = 2nl + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $l \geq 1$ — целое число. Пусть оно удовлетворяет следующим начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi_1(x), \quad x > 0, \\ u(x,T) &= \varphi_2(x), \quad x < 0, \end{aligned} \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t), \\ 0 < t < T, \quad k = 0,1,\dots,2n-1. \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\varphi(\tau) \in H^{\lambda}(L)$, $0 < \lambda < 1$, концы a или b обозначим через c. Будем считать, что положительное направление на L ведет от a к b.

Рассмотрим интеграл типа Коши с плотностью, имеющей интегрируемую особенность:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^{\mu}(\tau - t)} d\tau, \tag{4}$$

где $0 < \mu < 1$ и $\varphi(\tau) \in H^{\lambda}(L)$ вблизи c, включая c, $0 < \lambda < 1$.

[1]*Академия наук Республики Саха (Якутия), Якутск, Россия*
[2]*Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия*
[*]*E-mail: guspopov@mail.ru*

Перепишем формулу (4) в виде

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(c)}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}d\tau + \\ + \frac{\varphi(c)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}d\tau \equiv F(t) + \varphi(c)\Omega(t), \tag{5}$$

где $\Omega(t)$ вблизи точки a определяется формулой

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-a)^{\mu}(\tau-t)}d\tau = \\ = \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}(\mu\pi)(t-a)^{-\mu} + \Omega_1(t), \tag{6}$$

вблизи точки b – формулой

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{(\tau-b)^{\mu}(\tau-t)}d\tau = \\ = -\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}(\mu\pi)(t-b)^{-\mu} + \Omega_2(t), \tag{7}$$

где функция $\Omega_1(z)$ является аналитической функцией в окрестности точки a, а функции $\Omega_2(z)$ – аналитической функцией в окрестности точки b.

Введем обозначение

$$\Psi(t) = \frac{(t-c)^{\mu}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}d\tau \equiv (t-c)^{\mu}F(t), \tag{8}$$

где

$$\psi(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(c) \in H^{\lambda}(L)$$

вблизи c, включая c.

Сформулируем теорему о гёльдеровости функции $\Psi(t)$ для точек контура L в окрестности точки c, включая c.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\psi(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* λ *вблизи* c, $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. *Тогда для точек контура ab интеграл типа Коши* $\Psi(t)$ *вида* (8) *удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c, с показателем* $\min\{\lambda,\mu\}$ *при* $\lambda \neq \mu$ *и условию Гёльдера с показателем* $\lambda - \varepsilon$ *при* $\lambda = \mu$, *где* ε *– сколь угодно малая положительная постоянная*.

З а м е ч а н и е 1. Впервые теорема 1 о гёльдеровости интеграла типа Коши $\Psi(t)$ для точек контура L с точными гёльдеровскими показателями была доказана в работах Р.В. Дудучава [6], А.П. Солдатова [7].

З а м е ч а н и е 2. Теорема Н.И. Мусхелишвили о гёльдеровости интеграла типа Коши $\Psi(t)$ также доказана в работе В.Н. Монахова [4], но в несколько слабой форме и другим методом, чем она доказана в частных случаях теоремы 1, в монографиях Н.И. Мусхелишвили [2], С.А. Терсенова [3].

З а м е ч а н и е 3. Если $\mu = \lambda + \frac{1}{2}$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ и $\varphi(t) = O((t-c)^{\lambda})$ для t близких к c, то $\Psi(t) = O((t-c)^{\lambda+\frac{1}{2}})$ для t близких к c, при этом $\Psi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c с показателем $\lambda + \frac{1}{2}$.

Справедлива теорема [9, 10].

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 2nl + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $2[p]\left(1-\frac{1}{2n}\right)+2$ *условий*

$$L_s(\varphi_1,\varphi_2) = 0, \quad s = 1,\ldots,2[p]\left(1-\frac{1}{2n}\right)+2 \tag{9}$$

существует единственное решение уравнения (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3), *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^{\pm})$.

Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига [12, 13], краевая задача (1), (2) при непрерывных условиях склеивания (3) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}d\tau = \vec{Q}(t). \tag{10}$$

В классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0, T)$, каноническая функция соответствующей краевой задачи Римана имеет вид

$$\chi(z) = z^{\frac{1}{4}}(z-1)^{\frac{3}{4}}, \quad \text{если} \quad n \text{ нечетно},$$

$$\chi(z) = z^{\frac{3}{4}}(z-1)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{если} \quad n \text{ четно},$$

индекс задачи $\varkappa = -1$. Имеем $\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1+\gamma}{2n}\right\} = \frac{1+\gamma}{2n}$ при $n \geq 4$. С учетом этого и теоремы 1 количество условий разрешимости можно уменьшить до необходимых и достаточных $2nl$ условий. В случае $n = 2$ или $n = 3$ справедливы соответственно $4l$, $6l$ разрешимости при выполнении общих весовых условий склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t), \\ 0 < t < T, \quad k = 0,\ldots,2n-1, \tag{11}$$

где σ_k – действительные постоянные.

При $n = 2$ справедлива теорема [11].

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $4l$ *условий*

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 4l, \tag{12}$$

существует единственное решение уравнения (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p, p/4}$, *если* $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q, q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, *если* $1 - 4\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/4}$, *если* $\gamma = 1 - 4\theta$, *где* ε — *сколь угодно малая положительная постоянная.*

Здесь $\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{a}{b}\right| < \frac{1}{4}$, $a = \sigma_0\sigma_1 - \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3$, $b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1$.

Замечание 4. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{4}$, то из теоремы 3 следует существование единственного решения задачи (1)–(3) из пространства $H_{x\ t}^{p, p/4}(Q^{\pm})$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (12).

Примеры. Для уравнения (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. В этом случае единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l + 2$ условий вида (12), если же рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_3 = -2$, то $\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+4}{16\sqrt{2}+4} \approx 0.064 < 0.25$, тогда находимся в условиях теоремы 3 и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $4l$ условий (12).

Рассмотрим случай $n = 3$:

$$\operatorname{sgn} x u_t - \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = 0. \tag{13}$$

Отметим, что в силу замечания 2 к теореме 1

$$\frac{3}{4} - \frac{1+\gamma}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < n < 4 \Rightarrow n = 3 \quad \text{при} \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 6l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $10l + 2$ *условий* (9) *существует единственное решение уравнения* (13), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *из пространства* $H_{x\ t}^{p, p/6}(Q^{\pm})$. *При* $\gamma = \frac{1}{2}$ *вблизи* $t = 0$, T *решение принадлежит пространству* $H_{x\ t}^{q, q/6}(Q^{\pm})$, $q = 6l + \frac{1}{2} + \varepsilon$, *где* ε — *сколь угодно малая положительная постоянная.*

Замечание 5. Аналогичные результаты справедливы и в случае общих $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением времени с произвольными переменными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
3. *Терсенов С.А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
4. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968. 380 с.
6. *Дудучава Р.В.* О сингулярных интегральных операторах в пространстве Гёльдера с весом // ДАН СССР. 1970. Т. 191. № 1. С. 16–19.
7. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высш. шк., 1991. 266 с.
8. *Попов С.В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // ДАН. 2005. Т.400. № 1. С. 29–31.
9. *Попов С.В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. журн. "Сиб. мат. журнал". Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНИТИ 07.12.88, 8646–Б88.
10. *Попов С.В., Потапова С.В.* Гельдеровские классы решений $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // ДАН. 2009. Т. 424. № 5. С. 594–596.
11. *Попов С.В.* Гельдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением времени с переменными условиями склеивания // Матем. заметки СВФУ. 2014. Т. 21. № 2 (82). С. 81–93.
12. *Cattabriga L.* Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$ // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1958. V. 28. № 2. P. 376–401.
13. *Cattabriga L.* Equazioni paraboliche in due variabili. I // Rend. sem. fac. sc. Univ. Cagliari. 1961. V. 31. № 1–2. P. 48–79; II // Rend. sem. fac. sc. Univ. Cagliari. 1962. V. 32. № 3-4. P. 254–267.

PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING DIRECTION OF TIME

S. V. Popov[a,b]

[a] *Academy of Sciences of Sakha Republic (Yakutia), Yakutsk, Russian Federation*

[b] *North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov, Yakutsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

We consider theorem about the behavior of Cauchy-type integrals at the endpoints of the integration contour and the discontinuity points of the density and its application to boundary value problems for $2n$-parabolic equations with changing time direction. The theory of singular equations makes it possible to specify necessary and sufficient conditions for the solution to belong to the Hölder spaces. Note that in the case of $n = 3$ the smoothness of the initial data and solvability conditions determines that the solution belongs to smoother spaces near the ends with respect to the time variable.

Keywords: Cauchy-type integral, parabolic equations with changing direction of time, bonding gluing condition, Hölder space, singular integral equation