ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 47–52

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ ПРИМИТИВНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

© 2020 г. Академик РАН В. Е. Захаров[1, 2,*], Д. В. Захаров[3,]**

Поступило 14.02.2020 г.
После доработки 14.02.2020 г.
Принято к публикации 13.03.2020 г.

Недавно авторы ввели новый класс ограниченных потенциалов в одномерном стационарном уравнении Шрёдингера, определенном на всей вещественной оси, а также соответствующие свойства решений уравнений, принадлежащих к КдФ иерархии. Эти потенциалы, названные "примитивными", строятся как замыкание множества быстро убывающих безотражательных потенциалов, которым соответствуют многосолитонные решения уравнений КдФ. Авторы ввели обобщенные примитивные потенциалы, которые получили как пределы общих быстроубывающих потенциалов в операторе Шрёдингера. Потенциалы конструируются как решения задачи Римана–Гильберта и определяются парой положительно определенных "одевающих" функций на конечном интервале и функциональным параметром на вещественной оси.

Ключевые слова: интегрируемые системы, оператор Шрёдингера, примитивные потенциалы

DOI: 10.31857/S2686954320020253

Мы изучаем спектральные свойства одномерного стационарного оператора Шрёдингера на действительной оси:

$$-\psi'' + u(x)\psi = E\psi, \quad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Данный оператор Шрёдингера является вспомогательным линейным оператором, необходимым для интегрирования уравнений, принадлежащих к иерархии уравнений КдФ. Первый член этой иерархии имеет вид

$$u_t(x,t) = 6u(x,t)u_x(x,t) - u_{xxx}(x,t). \tag{2}$$

Тесная связь между оператором Шрёдингера и уравнением КдФ есть стартовый пункт для построения современной теории интегрируемых систем.

Уравнение КдФ может быть решено точно методом обратной задачи рассеяния (ISM), если начальное условие $u(x) = u(x,0)$ быстро убывает при $x \to \pm\infty$. Этим методом конструируется вспомогательная функция $\chi(k,x) = e^{ikx}\psi$, зависящая от параметра $k = \sqrt{E}$. Она удовлетворяет нелокальной задаче Римана–Гильберта на вещественной оси и имеет в виде сингулярностей простые полюсы на мнимой оси, соответствующие солитонам в уравнении КдФ. Ее скачок на вещественной оси определяется коэффициентом отражения. Асимптотическое поведение функции $\chi(k,x,t)$ при $|k| \to \infty$ определяет потенциал $u(x,t)$. Существует также метод построения решений уравнений КдФ, известный как конечнозонный метод. Построенные этим методом решения являются квазипериодическими и, следовательно, не убывают на бесконечности. Соответствующая функция χ имеет скачки на зонах, расположенных на мнимой оси, и может рассматриваться как мероморфная функция на гиперэллиптической римановой поверхности, дважды накрывающей k-плоскость. На границах зон эта функция имеет точки ветвления.

В работах [1–5] мы осуществляли замыкание множества N-солитонных решений уравнения КдФ и устремляли $N \to \infty$. Возникающая при этом функция χ имеет скачки на двух симметричных разрезах $[ia, ib]$ и $[-ib, -ia]$ на мнимой оси. Эти скачки удовлетворяют паре сингулярных интегральных уравнений, определяемых двумя произвольными положительными непрерывными функциями R_1 и R_2 на $[a,\ b]$, которые мы называем "одевающими функциями". Построенное таким образом решение уравнения КдФ мы называем "примитивным". Оно описывает плотный солитонный газ. Набелек показал недавно [6], что все конечнозонные потенциалы могут быть описаны таким образом при подходящем выборе функций R_1 и R_2. Одна и та же пара одевающих функций

[1]*Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия*
[2]*Аризонский университет, Тусон, США*
[3]*Центральный Мичиганский университет, Маунт Плезант, США*
**E-mail: zakharov@math.arizona.edu*
***E-mail: dvzakharov@gmail.com*

порождает решение всех высших уравнений из иерархии КдФ после умножения на соответствующие функции времени.

В данной работе мы описываем тот же самый предельный переход для произвольных быстроубывающих решений уравнения КдФ. В результате вспомогательные функции $\chi(k,x)$ имеют скачки на двух симметричных разрезах на мнимой оси и скачок на вещественной оси $c(k)$, определяемый коэффициентом отражения. Соответствующие потенциалы оператора Шрёдингера, которые мы называем “обобщенными примитивными потенциалами”, имеют дважды вырожденный спектр $[-b^2,-a^2]\cup[0,\infty)$. Функция χ получается решением задачи Римана–Гильберта, определяемой двумя произвольными положительными функциями R_1, R_2 и функциональным параметром $c(k)$, заданным на вещественной оси и наследующим свойства коэффициента отражения быстроубывающего случая.

1. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КАК РАЗНОВИДНОСТЬ МЕТОДА ОДЕВАНИЯ

Мы начнем с переформулировки метода обратной задачи рассеяния с ISM на язык метода $\bar{\partial}$-проблемы (см., например [7–9]). Рассмотрим оператор Шрёдингера:

$$L(t)=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,t),\tag{3}$$

где $u(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,0)(1+|x|)dx<\infty\tag{4}$$

и уравнению КдФ (2). Оператор $L(t)$ имеет конечное число связанных состояний с собственными числами $-\kappa_1^2,\ldots,-\kappa_N^2$, не зависящими от времени, а также абсолютно-непрерывный спектр на верхней полуоси $[0,\infty)$. Уравнение Шрёдингера допускает два решения в виде функций Йоста

$$L(t)\psi_\pm(k,x,t)=k^2\psi_\pm(k,x,t),\quad \mathrm{Im}(k)>0,\tag{5}$$

с асимптотическим поведением

$$\lim_{x\to\pm\infty}e^{\mp ikx}\psi_\pm(k,x,t)=1.\tag{6}$$

Функции Йоста $\psi_\pm$ аналитичны при $\mathrm{Im}k>0$, непрерывны при $\mathrm{Im}k\geq 0$ и имеют асимптотическое разложение при $k\to\infty$, $\mathrm{Im}k>0$:

$$\psi_\pm(k,x,t)=e^{\pm ikx}\left(1+Q_\pm(x,t)\frac{1}{2ik}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right),\tag{7}$$

$$Q_+(x,t)=-\int\limits_z^{\infty}u(y,t)dy,\quad Q_-(x,t)=-\int\limits_{-\infty}^{x}u(y,t)dy.\tag{8}$$

Функции Йоста удовлетворяют соотношениям рассеяния

$$\begin{gathered}\overline{t(k)\psi_\mp(k,x,t)}=\\=\overline{\psi_\pm(k,x,t)}+r_\pm(k,t)\psi_\pm(k,x,t),\quad k\in R,\end{gathered}\tag{9}$$

где $t(k)$ и $r_\pm(k,t)$ суть коэффициенты прохождения и отражения. Они удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1. Коэффициент прохождения $t(k)$ есть мероморфная функция при $\mathrm{Im}k>0$, непрерывна при $\mathrm{Im}k\geq 0$. У нее есть простые полюсы в $i\kappa_1,\ldots,i\kappa_N$, вычеты в которых

$$\mathrm{Res}_{i\kappa_n}t(k)=i\mu_n(t)\gamma_n(t)^2,\tag{10}$$

$$\begin{gathered}\gamma_n(t)^{-1}=\|\psi_+(i\kappa_n,x,t)\|_2,\\ \psi_+(i\kappa_n,x,t)=\mu_n(t)\psi_-(i\kappa_n,x,t).\end{gathered}\tag{11}$$

Далее выполняются условия

$$\begin{gathered}t(k)\overline{r_+(k,t)}+\overline{t(k)}r_-(k,t)=0,\\ |t(k)|^2+|r_\pm(k,t)|^2=1,\quad r_-(k,t)=\overline{r_+}(k,t).\end{gathered}\tag{12}$$

Если обозначим $r(k,t)=r_+(k,t)$, $r(k)=r(k,0)$, и $\gamma_n=\gamma_n(0)$, имеют место равенства

$$t(-k)=\overline{t(k)},\quad r(-k)=\overline{r(k)},\quad k\in\mathbb{R},\tag{13}$$

$$\begin{gathered}|r(k)|<1\ \text{ для }\ k\in R,\quad k\neq 0,\\ r(0)=-1\ \text{ если }\ |r(0)|=1.\end{gathered}\tag{14}$$

Если потенциал – гладкая функция, коэффициент отражения $r(k)$ убывает как $O\left(\frac{1}{|k|^3}\right)$ при $|k|\to\infty$. Временная эволюция функций $r(k,t)$ и $\gamma_n(t)$ дается уравнениями

$$r(k,t)=r(k)e^{8ik^3t},\quad \gamma_j(t)=\gamma_n e^{4\kappa_n^3t}.\tag{15}$$

Набор данных $(r(k,t),k\geq 0;\kappa_1,\ldots,\kappa_N,\gamma_1(t),\ \ldots,$ $\gamma_N(t))$ называется данными рассеяния оператора Шрёдингера $L(t)$. Мы преобразуем задачу определения потенциала по данным рассеяния в задачу Римана–Гильберта следующим образом. Введем функцию

$$\chi(k,x,t)=\begin{cases}t(k)\psi_-(k,x,t)e^{ikx}, & \mathrm{Im}k>0,\\ \psi_+(-k,x,t)e^{ikx}, & \mathrm{Im}k<0.\end{cases}\tag{16}$$

Условие 2. Пусть $(r(k);\kappa_1,\ldots,\kappa_N,\gamma_1,\ldots,\gamma_N)$ – данные рассеяния для оператора Шрёдингера $L(0)$. Тогда функция $\chi(k,x,t)$ определяется единственным образом из следующих условий:

1) χ является мероморфной функцией на комплексной плоскости k и на действительной оси имеет следующие пределы:

$$\chi_\pm(k,x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\chi(k\pm i\varepsilon,x,t),\quad k\in\mathbb{R};\tag{17}$$

2) χ имеет скачок на действительной оси, удовлетворяющий условию

$$\chi_+(k,x,t) - \chi_-(k,x,t) = \\ = r(k)e^{2ikx+8ik^3t}\chi_-(-k,x,t), \quad k \in \mathbb{R}; \tag{18}$$

3) χ имеет простые полюсы в точках $i\kappa_1,\ldots,i\kappa_N$ и не имеет других особенностей. Вычеты в полюсах удовлетворяют условию

$$\mathrm{Res}_{i\kappa_n}\chi(k,x,t) = \\ = ic_n e^{-2\kappa_n x + 8\kappa_n^3 t}\chi(-i\kappa_n,x,t), \quad c_n = \gamma_n^2; \tag{19}$$

4) χ имеет асимптотическое поведение

$$\chi(k,x,t) = 1 + \frac{i}{2k}Q_+(x,t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ |k| \to \infty, \quad \mathrm{Im}k \neq 0. \tag{20}$$

Функция χ есть решение уравнения

$$\chi'' - 2ik\chi' - u(x)\chi' = 0, \tag{21}$$

и потенциал $u(x,t)$, данный формулой

$$u(x,t) = \frac{d}{dx}Q_+(x,t), \tag{22}$$

есть решение уравнения КдФ (2), удовлетворяющее условию (4).

Теперь, следуя [10], мы переформулируем условия (17)–(20), определяющие функцию χ как $\bar\partial$-проблему. Обозначим как $\rho(k,x,t)$ скачок χ на вещественной оси, двигаясь с верхней в нижнюю полуплоскость, и обозначим через $i\chi_n(x,t)$ вычеты $\chi(k,x,t)$ при $k = i\kappa_n$. Условия (17)–(20) означают, что χ имеет спектральное представление

$$\chi(k,x,t) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(q,x,t)}{q-k}dq + i\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi_n(x,t)}{k-i\kappa_n}, \tag{23}$$

причем скачок $\rho(k,x,t)$ и вычеты $\chi_n(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\rho(k,x,t) = r(k)e^{2ikx+8ik^3t} \times \\ \times\left[1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(q,x,t)}{q+k+i\varepsilon}dq - i\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi_n(x,t)}{k+i\kappa_n}\right], \tag{24}$$

$$\chi_n(x,t) = c_n e^{-2\kappa_n x+8\kappa_n^3 t} \times \\ \times\left[1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(q,x,t)}{q+i\kappa_n}dq + \sum_{m=1}^{N}\frac{\chi_m(x,t)}{\kappa_n+\kappa_m}\right]. \tag{25}$$

Рассмотрим обобщенную функцию

$$T(k) = \frac{i}{2}\delta(k_I)\theta(-k_I)r(k_R) + \\ + \pi\delta(k_R)\sum_{n=1}^{N}c_n\delta(k_I - \kappa_n), \tag{26}$$

которую назовем “одевающей функцией”. Здесь θ – функция Хевисайда, δ – функция Дирака, $k = k_R + ik_I$. Теперь используем тождество

$$\frac{\partial}{\partial\bar k}\frac{1}{k} = \pi\delta(k) = \pi\delta(k_R)\delta(k_I). \tag{27}$$

Смысл обобщенной функции $\delta(x)\theta(\pm x)$ состоит в том, что если функция f есть разрывная функция при $x = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\theta(\pm x)dx = \lim_{x\to 0^\pm} f(x). \tag{28}$$

Прямое вычисление показывает, что условия (18), (19) эквивалентны $\bar\partial$-проблеме:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\bar k} = T(k)e^{2ikx+8ik^3t}\chi(-k,x,t), \\ \chi \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{29}$$

2. ТРАНСПЛАНТАЦИЯ ПОЛЮСОВ

Основное наблюдение работ [1–3] состоит в следующем. Чтобы получить N-зонный потенциал из N-солитонного решения, нужно позволить функции χ иметь полюсы и в нижней полуплоскости.

Пусть $(r(k),\kappa_1,\ldots,\kappa_N,c_1,\ldots,c_N)$ есть набор данных рассеяния потенциала $u(x,t)$, быстро уменьшающихся на бесконечности, и пусть функция $\chi(k,x,t)$ определена условием 2. Зафиксируем подмножество $I \subset \{1,\ldots,N\}$ и введем функцию

$$\tilde\chi(k,x,t) = \chi(k,x,t)\prod_{m\in I}\frac{k-i\kappa_m}{k+i\kappa_m}, \tag{30}$$

в которой k_m принадлежит этому сообществу. Функция $\tilde\chi$ по-прежнему имеет скачок на вещественной оси и стремится к 1 при $k\to\infty$. Она имеет $N - I$ полюсов в верхней полуплоскости при $k = i\kappa_m$, $m \notin I$, и I полюсов в нижней полуплоскости при $k = -i\kappa_m$, $m \in I$. Это значит, что спектральное представление приняло вид

$$\tilde\chi(k,x,t) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde\rho(q,x,t)}{q-k}dq + \\ + i\sum_{m\notin I}\frac{\tilde\chi_m(x,t)}{k-i\kappa_m} + i\sum_{n\in I}\frac{\tilde\chi_m(x,t)}{k+i\kappa_m}, \tag{31}$$

где скачок $\tilde\rho$ и вычеты $i\tilde\chi_n$ равны

$$\tilde\rho(q,x,t) = \rho(q,x,t)\prod_{m\in I}\frac{q-i\kappa_m}{q+i\kappa_m}, \\ \tilde\chi_n(x,t) = \chi_n(x,t)\prod_{m\in I}\frac{\kappa_n-\kappa_m}{\kappa_n+\kappa_m} \quad \text{для} \quad n\notin I, \tag{32}$$

$$\tilde{\chi}_m(x,t) = -2\kappa_n\chi(-i\kappa_n,x,t)\times \times \prod_{m\in I\setminus\{n\}} \frac{\kappa_n+\kappa_m}{\kappa_n-\kappa_m} \quad \text{для} \quad n\in I. \tag{33}$$

Из этого следует, что $\tilde{\chi}$ удовлетворяет той же $\bar{\partial}$-проблеме (29), что и χ, но с одевающей функцией

$$\tilde{T}(k) = \frac{i}{2}\delta(k_I)\theta(-k_I)\tilde{r}(k_R) + \pi\delta(k_R)\sum_{n=1}^{N}\tilde{c}_n\delta(k_I-\tilde{\kappa}_n), \tag{34}$$

где коэффициенты равны

$$\tilde{r}(k) = r(k)\prod_{m\in I}\left(\frac{k-i\kappa_m}{k+i\kappa_m}\right)^2, \quad \tilde{c}_n = c_n\prod_{m\in I}\left(\frac{\kappa_n-\kappa_m}{\kappa_n+\kappa_m}\right)^2 \quad \text{для} \quad n\notin I, \tag{35}$$

$$\tilde{c}_n = -\frac{4\kappa_n^2}{c_n}\prod_{m\in I\setminus\{n\}}\left(\frac{\kappa_n+\kappa_m}{\kappa_n-\kappa_m}\right)^2 \quad \text{для} \quad n\in I, \quad \tilde{\kappa}_n = \begin{cases}\kappa_n, & n\notin I,\\ -\kappa_n, & n\in I.\end{cases} \tag{36}$$

Мы видим, что по-прежнему

$$\tilde{r}(-k) = \overline{\tilde{r}(k)}, \quad |\tilde{r}(k)| = |r(k)| \quad \text{для} \quad k\in R, \quad \tilde{r}(0) = r(0), \tag{37}$$

следовательно, функция $\tilde{r}$ имеет те же свойства (13), (14), что и r. Заметим, $\tilde{c}_n$ положительны, если $n\notin I$, и отрицательны, если $n\in I$. То есть $\tilde{c}_n$ имеет тот же знак, что $\tilde{\kappa}_n$.

Наконец, мы убеждаемся, что $\tilde{\chi}$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (21), что χ, и имеет следующее асимптотическое поведение при $|k|\to\infty$:

$$\tilde{\chi}(k,x,t) = 1 + \frac{i}{2k}\tilde{Q}_+(x,t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \tilde{Q}_+(x,t) = Q_+(x,t) - 4\sum_{m\in I}\kappa_m. \tag{38}$$

Следовательно, $u(x, t)$ может быть получено через $\tilde{\chi}(k,x,t)$ при помощи формулы (22).

Мы показали, что если $u(x, t)$ получена методом обратной задачи рассеяния из спектральных данных $(r(k),\kappa_1,\ldots,\kappa_N,c_1,\ldots,c_N)$, то мы можем менять знак κ_m для $m\in I$, изменять коэффициенты r и c_n соответственно (36), и результат приведет к тому же потенциалу $u(x, t)$. То есть мы производим "пересадку" полюсов функции χ в нижнюю полуплоскость, не меняя потенциала u.

Обращая постановку задачи, мы утверждаем следующее. Пусть $(r(k);\kappa_1,\ldots,\kappa_N,c_1,\ldots,c_N)$ есть набор данных рассеяния, состоящих из функций $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (13), (14), и есть $2N$ не равных нулю констант κ_n, c_n, для которых выполнены условия

$$\kappa_n \neq \pm\kappa_m \quad \text{для} \quad n\neq m, \quad \kappa_n/c_n > 0 \quad \text{для всех} \quad n. \tag{39}$$

Тогда $\bar{\partial}$-проблема (29) с заданной одевающей функцией T, заданной уравнением (26), имеет единственное решение χ, а потенциал $u(x,t)$, заданный уравнением (22), есть решение КдФ уравнения с N солитонами, имеющими спектральные параметры $|\kappa_1|,\ldots,|\kappa_N|$. Следовательно, любое быстро убывающее решение КдФ уравнения, имеющее N солитонов, может быть построено методом одевания, и это можно сделать, используя 2^N различных способов.

3. КОНСТРУКЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРИМИТИВНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Перейдем теперь к пределу $N\to\infty$. Рассмотрим $\bar{\partial}$-проблему (29) с одевающей функцией T в форме (26), где r удовлетворяет (13), (14) и κ_n, c_n удовлетворяют (39). Пусть $0<k_1<k_2$, и предположим, что полюсы κ_n равномерно распределены на двух интервалах $[k_1,k_2]$ и $[-k_2,-k_1]$ таким образом, что $\kappa_n\neq\pm\kappa_m$ для $n\neq m$. В пределе $N\to\infty$ мы получим следующую одевающую функцию:

$$T(k) = \frac{i}{2}\delta(k_I)\theta(-k_I)r(k) + \pi\delta(k_R)\times \left[\int_{k_1}^{k_2}R_1(p)\delta(k_I-p)dp - \int_{k_1}^{k_2}R_2(p)\delta(k_I+p)dp\right]. \tag{40}$$

Предположим, что условия, наложенные на $r(k)$, те же, что и раньше:

$$r(-k) = \overline{r(k)}, \quad |r(k)|<1 \quad \text{для} \quad k\neq 0, \quad |r(0)|\leq 1, \quad r(0) = -1 \quad \text{если} \quad |r(0)| = 1. \tag{41}$$

Потребуем, чтобы функции R_1 и R_2 на $[k_1,k_2]$ были непрерывны, положительны и удовлетворяли условию Гёльдера, и будем искать решение χ для $\bar{\partial}$-проблемы (29), выбрав одевающую функцию согласно (40). Такая функция χ имеет скачок на вещественной оси и разрезы на интервалах $[ik_1,ik_2]$ и $[-ik_2,-ik_1]$ на мнимой оси. Ее спектральное представление имеет вид

$$\chi(k,x,t) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(p,x,t)dp}{p-k} + i\int_{k_1}^{k_2}\frac{f(p,x,t)dp}{k-ip} + i\int_{k_1}^{k_2}\frac{g(p,x,t)dp}{k+ip}. \tag{42}$$

Обозначим $\chi^{\pm}(ik,x,t)$ – правые и левые пределы функции χ на разрезах $k \in [ik_1, ik_2]$ и $k \in [-ik_1, -ik_2]$ по мнимой оси. Тогда

$$\begin{aligned} &\chi^+(ik,x,t) - \chi^-(ik,x,t) = 2\pi i f(p,x,t), \\ &\chi^+(ik,x,t) - \chi^-(-ik,x,t) = 2\pi i g(k,x,t). \end{aligned} \tag{43}$$

На вещественной оси χ удовлетворяет задаче Римана–Гильберта (18), где $\chi^{\pm}$ является верхним и нижним пределом χ на вещественной оси. На разрезах $k \in [ik_1, ik_2]$ и $k \in [-ik_2, -ik_1]$ вдоль мнимой оси имеет место симметричная задача Римана–Гильберта

$$\begin{aligned} &f(k,x,t) = \\ &= \frac{1}{2} R_1(k) e^{-2kx+8k^3t} [\chi^+(-ik,x,t) + \chi^-(-ik,x,t)], \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &g(k,x,t) = \\ &= -\frac{1}{2} R_2(k) e^{2kx-8k^3t} [\chi^+(ik,x,t) + \chi^-(ik,x,t)]. \end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, решение проблемы Римана–Гильберта (18), (44), (45) эквивалентно решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений для ρ, f и g:

$$\begin{aligned} \rho(k,x,t) = r(k,x,t) e^{-2ikx-8ik^3t} \Bigg[1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p,x,t)dp}{q+ik-\varepsilon} - \\ - i \int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p,x,t)dp}{k+ip} + i \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p,x,t)dp}{-k+ip} \Bigg], \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} &f(k,x,t) + R_1(k) e^{-2kx+8k^3t} \times \\ &\times \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p,x,t)}{k+p} dp + \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p,x,t)}{k-p} dp \right] = \\ &= R_1(k) e^{-2kx+8k^3t} \left[1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p,x,t)}{p-ik} dp \right], \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &g(k,x,t) + R_2(k) e^{2kx-8k^3t} \times \\ &\times \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p,x,t)}{k-p} dp + \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p,x,t)}{k+p} dp \right] = \\ &= -R_2(k) e^{2kx-8k^3t} \left[1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p,x,t)}{p+ik} dp \right]. \end{aligned} \tag{48}$$

Система уравнений (46)–(48) полностью описывает обобщенные примитивные потенциалы (для данного момента времени) и соответствующие решения уравнения КдФ. Положив $r(k) = 0$, мы получим $\rho(k,x,t) = 0$ и вернемся к системе уравнений, описывающих безотражательные примитивные потенциалы, ранее описанные в работах [1–4].

Окончательно обобщенный примитивный потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) = 2\frac{d}{dx} \Bigg[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p,x,t)dp + \\ + \int_{k_1}^{k_2} [f(p,x,t) + g(p,x,t)]dp \Bigg]. \end{aligned} \tag{49}$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ 19–72–30028 (Владимир Захаров) и NSF грантом DMS-1716822 (Дмитрий Захаров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dyachenko S., Zakharov D., Zakharov V.* Primitive Potentials and Bounded Solutions of the KdV Equation // Phys. D. 2016. V. 333. P. 148–156.
2. *Zakharov D., Dyachenko S., Zakharov V.* Bounded Solutions of KdV and Non-Periodic One-Gap Potentials in Quantum Mechanics // Lett. Math. Phys. 2016. V. 106. № 6. P. 731–740.
3. *Zakharov D., Zakharov V.* Non-Periodic One-Gap Potentials in Quantum Mechanics. Geometric Methods in Physics // XXXV Workshop. 2016. P. 213–225. Trends in Mathematics, 2018. Springer International Publishing.
4. *Nabelek P., Zakharov D., Zakharov V.* On Symmetric Primitive Potentials // J. Integrable Systems. 2019. V. 4. № 1. xyz006.
5. *Дьяченко С.А., Набелек П., Захаров Д.В., Захаров В.Е.* Примитивные решения уравнения Кортевега-де Фриза // ТМФ. 2020. Т. 202. № 3. С. 382–391.
6. *Nabelek P.* Algebro-Geometric Finite Gap Solutions to the Korteweg -de Vries Equation as Primitive Solutions // Submitted to Physica D. (arXiv:1907.09667)
7. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
8. *Deift P., Trubowitz E.* Inverse Scattering on the Line // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32. № 2. P. 121–251.
9. *Grunert K., Teschl G.* Long-Time Asymptotics for the Korteweg-de Vries Equation Via Nonlinear Steepest Descent // Math. Phys., Anal. and Geom. 2009. V. 12. № 3. P. 287–324.
10. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 11–25.
11. *Кузнецов Е.А., Михайлов А.В.* О полной интегрируемости двумерной классической модели Тирринга // ТМФ. 1977. Т. 30. № 3. С. 303–314.

GENERALIZED PRIMITIVE POTENTIALS

Academician of the RAS V. E. Zakharov[a,b] and D. V. Zakharov[c]

[a] *Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation*
[b] *University of Arizona, Tucson, AZ, USA*
[c] *Central Michigan University, Mount Pleasant, MI, USA*

Recently, we introduced a new class of bounded potentials of the one-dimensional stationary Schrödinger operator on the real axis, and a corresponding family of solutions of the KdV hierarchy. These potentials, which we call primitive, are obtained as limits of rapidly decreasing reflectionless potentials, or multisoliton solutions of KdV. In this note, we introduce generalized primitive potentials, which are obtained as limits of all rapidly decreasing potentials of the Schrödinger operator. These potentials are constructed by solving a contour problem, and are determined by a pair of positive functions on a finite interval and a functional parameter on the real axis.

Keywords: integrable systems, Schrödinger equation, primitive potentials