*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 89–91*

**ИНФОРМАТИКА**

*УДК 519.1, 519.7*

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ И ВЕРОЯТНОСТИ ВЫРОЖДЕННОСТИ СЛУЧАЙНЫХ {±1}-МАТРИЦ

**© 2020 г. А. А. Ирматов[1,*]**

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко 26.02.2020 г.
Поступило 04.03.2020 г.
После доработки 04.03.2020 г.
Принято к публикации 19.03.2020 г.

В работе решены две известные проблемы, касающиеся числа пороговых функций $P(2, n)$ и вероятности $\mathbb{P}_n$ вырожденности случайных $(n \times n)$ $\{\pm 1\}$-матриц, а именно, получены асимптотики

$$P(2,n) \sim 2\binom{2^n-1}{n} \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n \sim n^2 \cdot 2^{1-n} \quad n \to \infty.$$

*Ключевые слова:* пороговая функция, матрица Бернулли, функция Мёбиуса, супермодулярная функция, комбинаторный флаг

**DOI:** 10.31857/S2686954320030091

Определение 1. Функция $f\colon \{\pm 1\}^n \to \{\pm 1\}$ называется *пороговой функцией*, если существуют действительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ такие, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sign}\langle \boldsymbol{\alpha}, (1, \mathbf{x})\rangle,$$

где $(1,\mathbf{x}) = (1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Через $P(2,n)$ обозначим число пороговых функций. Таким образом, пороговой функции с весовым $(n + 1)$-вектором $\boldsymbol{\alpha}$ можно сопоставить точку в двойственном пространстве $(\mathbf{R}^{n+1})^* = \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $A^{\perp}$ – конечный центральный пучок (т.е. проходящих через $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n+1}$) гиперплоскостей в $\mathbf{R}^{n+1}$ и $A = \{w_1, \dots, w_T\}$ – множество нормальных векторов его гиперплоскостей. Одномерное подпространство, порожденное вектором $w \in \mathbf{R}^{n+1} \backslash \mathbf{0}$, определяет точку $\langle w\rangle$ $n$-мерного проективного пространства $\mathbf{RP}^n$. Интерпретация пороговых функций как подмножеств точек двойственного пространства позволяет отождествить $P(2, n)$ с числом $C(\langle E_n\rangle)$ непересекающихся областей дополнения в $\mathbf{R}^{n+1}$ к центральному пучку гиперплоскостей с нормальными векторами из множества $E_n = \{(1, b_1, \dots \dots, b_n) \mid b_i \in \{\pm 1\}, i = 1, \dots, n\}$. Данное замечание позволяет использовать формулу Л. Шлефли [1] для верхней оценки $P(2, n)$:

$$P(2,n) = C(\langle E_n\rangle) \le 2\sum_{i=0}^{n}\binom{2^n-1}{i}. \tag{1}$$

Следует отметить, что верхняя оценка (1) была переоткрыта в начале 1960-х гг. несколькими авторами (см. [2]). Первая нижняя оценка для $P(2, n)$ была получена С. Мурога [3]: $P(2,n) \ge 2^{0.33048n^2}$. С. Яджима и Т. Ибораки [4] улучшили ее до $2^{n(n-1)/2+8}$ для $n \ge 6$. В работе [5] было замечено, что из работ А.М. Одлызко [6] и Т. Заславского [7] следует асимптотика логарифма числа пороговых функций: $\log_2 P(2,n) \sim n^2$. Дальнейшее улучшение нижней оценки было получено в работе [8] с помощью оригинальной геометрической конструкции:

$$P(2,n) \ge 2^{n^2\left(1-\frac{7}{\ln n}\right)} P\left(2, \left[\frac{7(n-1)}{\log_2(n-1)}\right]\right).$$

Параллельно нахождению асимптотики числа пороговых функций велись исследования по оценке числа вырожденных $\{\pm 1\}$ (или $\{0, 1\}$) $(n \times n)$-матриц. Пусть $M_n = (a_{ij})$ – случайная $(n \times n)$ $\{\pm 1\}$-матрица с элементами, являющимися независимыми одинаково распределенными случайными величинами Бернулли: $\Pr(a_{ij} = 1) = \Pr(a_{ij} = -1) =$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: irmatov@intsys.msu.ru*

$=\frac{1}{2}$. В 1963 г. Я. Комлас [9] доказал гипотезу П. Эрдёша о том, что вероятность вырожденности случайной бернуллиевой $\{0, 1\}$-матрицы с ростом размерности стремится к нулю, что верно и для $\{\pm 1\}$-матриц: $\mathbb{P}_n \overset{\text{def}}{=} \Pr(\det M_n = 0) = o_n(1)$. В 1977 г. он улучшил свой результат до верхней оценки $\mathbb{P}_n < O(1/\sqrt{n})$ (см. [10]). В 1995 г. Дж. Кан, Я. Комлос и Е. Семереди в работе [11] добились экспоненциального убывания верхней оценки: $O(0.999^n)$. В работе [12] Т. Тао и В. Ву получили оценку $(3/4 + o_n(1))^n$, а в 2009 г. Ж. Бургейн, В. Ву и П.М. Вуд улучшили ее до $(\sqrt{2}/2 + o_n(1))^n$ (см. [13]). В 2018 г. К. Тихомировым в работе [14] было показано, что $\mathbb{P}_n = (1/2 + o_n(1))^n$.

В данной работе найдены асимптотики $P(2, n)$ и $\mathbb{P}_n$.

Теорема 1. *Для асимптотики вероятности* $\mathbb{P}_n$ *имеет место выражение*

$$\mathbb{P}_n \sim n^2 \cdot 2^{1-n}, \quad n \to \infty.$$

Теорема 2. *Для асимптотики числа пороговых функций имеет место выражение*

$$P(2,n) \sim 2\binom{2^n - 1}{n}, \quad n \to \infty.$$

## СУПЕРМОДУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ $\boldsymbol{\eta}^\star$ И ЕЕ СВОЙСТВА

Центральный пучок гиперплоскостей $H^\perp$ с множеством нормальных векторов $H = \{w_1, \ldots, w_T\} \in \mathbf{R}^{n+1}\backslash 0$ здесь рассматривается как подмножество $\langle H\rangle \overset{\text{def}}{=} \{\langle w_1\rangle, \ldots, \langle w_T\rangle\} \subset \mathbf{RP}^n$ $n$-мерного проективного пространства. На множестве конечных подмножеств $\mathbf{RP}^n$ определим функцию $\eta_n^\star\colon 2^{\mathbf{RP}^n}_{fin} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ по формуле

$$\eta_n^\star(\langle H\rangle) = \operatorname{rank} H_{n-1}(K^H; \mathbf{R}), \quad \langle H\rangle \subset \mathbf{RP}^n,$$

где по определению симплексами симплициального комплекса $K^H$ на вершинах, совпадающих с множеством $\langle H\rangle$, являются все подмножества $\{\langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_s}\rangle\}$ в $\langle H\rangle$ такие, что

$$\operatorname{span}\langle w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}\rangle \neq \operatorname{span}\langle w_1, \ldots, w_T\rangle.$$

Опираясь на результаты работы [15], можно показать, что $\eta_n^\star$ супермодулярна и

$$P(2,n) = C(\langle E_n\rangle) \geq 2\eta_n^\star(\langle E_n\rangle). \tag{2}$$

Для любого конечного $\langle H\rangle \subset \mathbf{RP}^n$ и $\langle w\rangle \in \mathbf{RP}^n$ введем обозначение

$$\binom{\langle H\rangle}{\eta_n^\star}^{\langle w\rangle} \overset{\text{def}}{=} \sum \eta_n^\star(\{\langle w\rangle, \langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_n}\rangle\}),$$

где суммирование ведется по всем подмножествам $\{\langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_n}\rangle\} \subset \langle H\rangle$.

Теорема 3. *Для любых $n \geq 1$, конечного подмножества $\langle H\rangle \subset \mathbf{RP}^n$ и $\langle w\rangle \in \mathbf{RP}^n$ выполнено неравенство*

$$\eta_n^\star(\langle H\rangle \cup \{\langle w\rangle\}) \leq \binom{\langle H\rangle}{\eta_n^\star}^{\langle w\rangle}.$$

Пусть $\langle H\rangle^{\perp w} \overset{\text{def}}{=} P_{R^{n+1}}^{\langle w\rangle}(\langle H\rangle)$, где $P_{R^{n+1}}^{\langle w\rangle}$ – ортогональный проектор вдоль линейного подпространства $\langle w\rangle \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Теорема 4. *Для любых $n \geq 1$, конечного подмножества $\langle H\rangle \subset \mathbf{RP}^n$, $\langle u\rangle \in \mathbf{RP}^n \backslash \langle H\rangle$, $\langle u\rangle \in \operatorname{span}\langle H\rangle$ существует множество второй категории Бэра $L_n^c(\langle u\rangle; \langle H\rangle) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ такое, что для любого $v \in L_n^c(\langle u\rangle; \langle H\rangle)$ выполнено неравенство*

$$\eta_n^\star(\langle H\rangle \cup \{\langle u\rangle, \langle v\rangle\}) \geq \binom{\langle H\rangle^{\perp u}}{\eta_n^\star}^{\langle v\rangle}.$$

Пусть $\langle H\rangle^{\times s}$, $s = 1, 2, \ldots, T$, обозначает множество упорядоченных наборов $(\langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_s}\rangle)$ различных $s$ элементов из $\langle H\rangle$ и пусть

$$\langle H\rangle_{\neq 0}^{\times s} \overset{\text{def}}{=} \{(\langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_s}\rangle) \in \langle H\rangle^{\times s} \mid \dim \operatorname{span}\langle w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}\rangle = s\}.$$

Для любого $W = (\langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_n}\rangle) \in \langle H\rangle_{\neq 0}^{\times n}$ положим $q_l^W \overset{\text{def}}{=} |L_l(W) \cap \langle H\rangle| \overset{\text{def}}{=} |\operatorname{span}\langle\langle w_{i_{n-l+1}}\rangle, \ldots, \langle w_{i_n}\rangle\rangle \cap \langle H\rangle|$ и назовем набор $W(\langle H\rangle) \overset{\text{def}}{=} (q_n^W, q_{n-1}^W, \ldots, q_1^W)$ комбинаторным флагом $W$ на $\langle H\rangle \subset \mathbf{RP}^n$.

Теорема 5. *Для любых действительных чисел $p = (p_1, \ldots, p_T)$ таких, что $\sum_{i=1}^{T} p_i = 1$, выполнено равенство*

$$\eta_n^\star(\langle H\rangle) = \sum_{W \in \langle H\rangle_{\neq 0}^{\times n}} \frac{1 - p_{i_1} - p_{i_2} - \cdots - p_{i_{q_n^W}}}{W[H]}.$$

Здесь $W[H] \overset{\text{def}}{=} q_n^W \cdot q_{n-1}^W \cdots q_1^W$ и в числителе вычитаются числа, приписанные элементам из множества $L_n(W) \cap \langle H\rangle = \{\langle w_{i_1}\rangle, \ldots, \langle w_{i_n}\rangle, \ldots, \langle w_{i_{q_n^W}}\rangle\}$.

Теоремы 1 и 2 выводятся из теорем 3–5 и неравенств (1), (2).


## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 18–01–00398 А.


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Schläfli L.* Gesammelte Mathematische Abhandlungen I. Verlag Birkhäuser. Springer Basel AG, 1950. P. 209–212.
2. *Cover T.M.* Geometrical and Statistical Properties of Systems of Linear Inequalities with Applications in Pattern Recognition // IEEE Transactions on Electronic Computers. 1965. V. 14. Issue 3. P. 326–334. https://doi.org/10.1109/PGEC.1965.264137
3. *Muroga S.* Lower Bounds of the Number of Threshold Functions and a Maximum Weight // IEEE Transactions on Electronic Computers. 1965. V. EC-14. Issue 2. P. 136–148. https://doi.org/10.1109/PGEC.1965.263958
4. *Yajima S., Ibaraki T.* A Lower Bound of the Number of Threshold Functions // IEEE Transactions on Electronic Computers. 1965. V. 14. Issue 6. P. 926–929. https://doi.org/10.1109/PGEC.1965.264090
5. *Зуев Ю.А.* Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // ДАН. 1989. Т. 306. № 3. С. 528–530. Zbl 0693.94010
6. *Odlyzko A.M.* On Subspaces Spanned by Random Selection of ±1 Vectors // J. Combin. Theory Ser. A. 1988. V. 47. P. 124–133. https://doi.org/10.1016/0097-3165(88)90046-5
7. *Zaslavsky T.* Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes. Mem. Amer. Math. Soc., 154, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1975.
8. *Ирматов А.А.* О числе пороговых функций // Дискрет. матем. 1993. Т. 5. № 3. С. 40–43. http://www.mathnet.ru/links/9c56ab1fba763b5ff56f7-f8b82d6172b/dm689.pdf
9. *Komlós J.* On the Determinant of (0,1) Matrices // Studia Sci. Math. Hungar. 1967. V. 2. P. 7–21. MR0221962
10. *Komlós J.* Manuscript (1977) / In: B. Bollobás (Ed.) “Random Graphs”. N.Y.; L.: Academic Press, 1985. P. 347–350.
11. *Kahn J., Komlós J., Szemerédi E.* On the Probability That a Random ±1-Matrix is Singular // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 8. № 1. P. 223–240. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-1995-1260107-2
12. *Tao T., Vu V.* On the Singularity of Random Bernoulli Matrices // J. Amer. Math. Soc. 2007. V. 20. № 3. P. 603–628. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-07-00555-3
13. *Bourgain J., Vu V.H., Wood P.M.* On the Singularity Probability of Discrete Random Matrices // J. Functional Analysis. 2010. V. 258. P. 559–663. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.04.016
14. *Tikhomirov K.* Singularity of Random Bernoulli Matrices // Annals of Math. 2020. V. 191. № 2. P. 593–634. https://doi.org/10.4007/annals.2020.191.2.6
15. *Irmatov A.A.* Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions // Acta Applicandae Mathematicae. 2001. V. 68. P. 211–226. https://doi.org/10.1023/A:1012087813557


# ASYMPTOTICS OF THE NUMBER OF THRESHOLD FUNCTIONS AND THE SINGULARITY PROBABILITY OF RANDOM {±1}-MATRICES


**A. A. Irmatov**[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*


Presented by Academician of the RAS A.T. Fomenko


Two results concerning the number of threshold functions $P(2, n)$ and the singularity probability $\mathbb{P}_n$ of random $(n \times n)$ $\{\pm 1\}$-matrices are established. It was obtained the following asymptotics

$$P(2,n) \sim 2\binom{2^n - 1}{n} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}_n \sim n^2 \cdot 2^{1-n} \quad n \to \infty.$$



*Keywords:* threshold function, Bernoulli matrices, Möbius function, supermodular function, combinatorial flag