

УДК 519.63

О ТОЧНОСТИ СХЕМ ТИПА MUSCL ПРИ РАСЧЕТЕ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2020 г. О. А. Ковыркина^{1,*}, В. В. Остапенко^{1,2,**}

Представлено академиком РАН В.П. Дымниковым 13.06.2019 г.

Поступило 15.06.2019 г.

После доработки 09.04.2020 г.

Принято к публикации 10.04.2020 г.

Рассматривается центрально-разностная NT-схема (Nessyahu–Tadmor scheme), при построении которой используется MUSCL-реконструкция потоков второго порядка. Изучается точность NT-схемы при расчете ударных волн, распространяющихся с переменной скоростью. Показано, что эта схема имеет первый порядок интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны. В результате в этих областях локальная точность NT-схемы существенно снижается. Приведены тестовые расчеты, демонстрирующие эти свойства NT-схемы.

Ключевые слова: NT-схема, MUSCL-реконструкция потоков, ударная волна, точность разностной схемы

DOI: 10.31857/S2686954320030121

1. Поскольку в классической работе [1] было показано, что среди линейных двухслойных по времени схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории численных методов сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы как разностных, так и проекционных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL-схемы [2], TVD-схемы [3], ENO-схемы [4], WENO-схемы [5], DG-схемы [6], CABARET-схемы [7]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализируют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

В дальнейшем для NFC-схем типа TVD, WENO, DG и CABARET было показано [8–11], что эти

схемы (независимо от их точности на гладких решениях) имеют не более чем первый порядок интегральной сходимости на интервалах, одна из границ которых находится в области влияния ударной волны, что приводит к существенному снижению их точности в этой области. В настоящей работе аналогичный результат получен для центрально-разностной NT-схемы второго порядка [12], при построении которой используется MUSCL-реконструкция численных потоков. Эта схема представляет особый интерес, поскольку лежит в основе целого класса монотонных центрально-разностных схем повышенной точности [13], при реализации которых не применяется решение задачи Римана на границе смежных ячеек разностной сетки (в отличие от стандартных MUSCL-схем [2]).

2. Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ – искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ – заданная гладкие вектор-функции. Поставим для системы (1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{v}(x) \equiv \mathbf{v}(x + X). \quad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) при $t > 0$ имеет единственное ограниченное обобщенное решение $\mathbf{u}(x, t)$, в котором в некоторый момент времени $T_0 > 0$ в результате градиентной катастрофы возникают ударные волны. Пусть $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}(x_j, t_n) -$

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

²Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет, Новосибирск, Россия

*E-mail: olyana@ngs.ru

**E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

численное решение этой задачи, полученное по NT-схеме [12], заданной на равномерной прямоугольной сетке $x_j = jh, t_n = n\tau$, в которой временной шаг τ выбирается из условия устойчивости Куранта

$$\tau = \frac{zh}{\max_{k,j,n} |a_k(\mathbf{v}_j^n)|},$$

где $a_k(\mathbf{u})$ – собственные значения матрицы Якоби \mathbf{f}_u системы (1), $z = 0.5$ – коэффициент запаса.

Зафиксируем пространственный шаг h базисной сетки и рассмотрим последовательность разностных решений $(\mathbf{v}_i)_j^n = \mathbf{v}(x_j^i, t_n^i)$ на последовательности сжимающихся сеток $x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i$ с шагами $h_i = \frac{h}{2^i}, \tau_i = \frac{\tau}{2^i}$. Зададим натуральное число $m \gg 1$ и целые числа $m_1 < m_2$. Для момента времени $T = m\tau$ путем линейной интерполяции доопределим разностные решения $(\mathbf{v}_i)_j^n$ до непрерывных по x функций $\mathbf{v}_i(x, T)$ и рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(a, b, T) &= \int_a^b \mathbf{u}(x, T) dx, \\ \mathbf{V}_i(a, b, T) &= \int_a^b \mathbf{v}_i(x, T) dx, \end{aligned}$$

где $a = m_1 h$ и $b = m_2 h$.

Предположим, что последовательность интегралов $\mathbf{V}_i(a, b, T)$ от разностных решений $\mathbf{v}_i(x, T)$ сходится с порядком ρ , где $0 < \rho \leq 2$, к интегралу $\mathbf{U}(a, b, T)$ от точного решения $\mathbf{u}(x, T)$. Это означает, что с точностью $o(h_i^\rho)$ выполнено условие

$$\mathbf{V}_i(a, b, T) - \mathbf{U}(a, b, T) = \mathbf{C}h_i^\rho, \quad (3)$$

где вектор-функция $\mathbf{C} \neq 0$ не зависит от h_i . Ограничение $\rho \leq 2$, с одной стороны, следует из того, что NT-схема имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, а с другой стороны, из того, что с учетом линейной интерполяции интегралы $\mathbf{V}_i(a, b, T)$ вычисляются по формуле трапеций, которая имеет второй порядок точности на гладких функциях. Если рассчитываемое точное решение \mathbf{u} не имеет особенностей, то порядок ρ интегральной сходимости (3) будет равен двум. Порядок такой сходимости на отрезках $[a, b]$, содержащих сильные разрывы точного решения или пересекающихся с их областями влияния, может снижаться ниже двух, что зависит от точности передачи схемой условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн.

Для приближенного определения порядка интегральной сходимости ρ в случае, когда точное

решение \mathbf{u} заранее неизвестно, необходимо провести три расчета с достаточно малыми шагами $h_0 = h, h_1 = \frac{h}{2}, h_2 = \frac{h}{4}$ и воспользоваться правилом Рунге. Вычитая из (3) эту же формулу, в которой индекс i заменен на $i + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{V}_{i,i+1}(a, b, T) &= \\ &= \mathbf{V}_i(a, b, T) - \mathbf{V}_{i+1}(a, b, T) = \mathbf{C}(h_i^\rho - h_{i+1}^\rho). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассматривая отношение модулей равенств (4) при $i = 1$ и $i = 0$, находим

$$\frac{|\delta \mathbf{V}_{1,2}(a, b, T)|}{|\delta \mathbf{V}_{0,1}(a, b, T)|} = \frac{h_1^\rho - h_2^\rho}{h_0^\rho - h_1^\rho} = \left(\frac{1}{2}\right)^\rho.$$

Отсюда получаем искомую формулу

$$\rho = \rho(a, b, T) = \log_{1/2} \frac{|\delta \mathbf{V}_{1,2}(a, b, T)|}{|\delta \mathbf{V}_{0,1}(a, b, T)|}. \quad (5)$$

Пусть $\varphi(x, T) = \varphi(\mathbf{u}(x, T))$ некоторая скалярная функция от точного решения $\mathbf{u}(x, T)$, а $\psi_i(x, T) = \varphi(\mathbf{v}_i(x, T))$ – соответствующая ей последовательность функций от разностных решений $\mathbf{v}_i(x, T)$. Предположим, что последовательность $\psi_i(x, T)$ в некотором пространственном узле $x = jh$ базисной сетки сходится с порядком α к функции $\varphi(x, T)$, т.е. с точностью $o(h_i^\alpha)$ выполнено условие

$$\delta \psi_i(x, T) = \psi_i(x, T) - \varphi(x, T) = ch_i^\alpha, \quad (6)$$

где функция $c \neq 0$ не зависит от h_i . Для приближенного определения порядка локальной сходимости α , по аналогии с (5), получаем следующую формулу:

$$\alpha = \alpha(x, T) = \log_{1/2} \frac{|\delta \psi_{1,2}(x, T)|}{|\delta \psi_{0,1}(x, T)|}, \quad (7)$$

в которой

$$\delta \psi_{i,i+1}(x, T) = \psi_i(x, T) - \psi_{i+1}(x, T), \quad i = 0, 1. \quad (8)$$

Из формулы (8) при $i = 0$ с учетом формулы (6) при $i = 0, 1$ имеем

$$\delta \psi_{0,1}(x, T) = c(h_0^\alpha - h_1^\alpha) = ch^\alpha(1 - (1/2)^\alpha).$$

Отсюда с учетом (7) находим

$$c = \frac{\delta \psi_{0,1}(x, T)}{h^\alpha(1 - (1/2)^\alpha)} = \frac{\delta \psi_{0,1}(x, T)}{h^\alpha} \left(1 - \frac{|\delta \psi_{1,2}(x, T)|}{|\delta \psi_{0,1}(x, T)|}\right)^{-1}.$$

Подставляя это значение функции c в формулу (6), в которой $i = 0$, получаем приближенное выражение

$$\begin{aligned} \delta \varphi(x, T) &= \delta \psi_0(x, T) = \\ &= \delta \psi_{0,1}(x, T) \left(1 - \frac{|\delta \psi_{1,2}(x, T)|}{|\delta \psi_{0,1}(x, T)|}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

для локальных дисбалансов, возникающих при вычислении функции $\varphi(x, T)$ на базисной сетке с пространственным шагом $h = h_0$. Далее формула (9) будет использована для оценки разностных дисбалансов, возникающих при вычислении инвариантов точного решения.

3. В качестве конкретной гиперболической системы выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды, дивергентная форма записи которой в случае прямоугольного горизонтального русла без учета донного трения имеет вид (1), где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{H} + \frac{gH^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь $H(x, t)$ и $q(x, t)$ – глубина и расход жидкости, g – ускорение свободного падения. Рассмотрим для системы (1), (10) задачу Коши (2) с начальными данными

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \\ H(x, 0) &= \frac{1}{4g} \left(a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b \right)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $v = \frac{q}{H}$ – скорость жидкости (такая задача рассматривалась в работе [14]). Начальным данным (11) соответствуют следующие начальные значения инвариантов $w_1 = v - 2c$ и $w_2 = v + 2c$:

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) &= -b, \\ w_2(x, 0) &= 2v(x, 0) + b = 2a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b, \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{gH}$, $a = 2$, $b = 10$ и $X = 10$.

Точное решение этой задачи моделируется численным расчетом по NT-схеме на мелкой сетке с пространственным шагом $h = 0.005$. Профили глубины, получаемые в этом расчете, показаны сплошными линиями на отрезке $[0, X]$ длины периода в моменты времени $T = 0.5$ (рис. 1а) и $T = 1$ (рис. 1б). Результаты расчета данной задачи по NT-схеме на сетке с пространственным шагом $h = 0.1$ приведены на рис. 1 кружками. Порядки интегральной сходимости ρ_j разностного решения на отрезках $[x_j, X]$, изображены на рис. 1 точками. На рис. 2 на момент времени $T = 1$ приведены графики сеточных функций

$$(\tau_i)_j = \lg|\Delta w_i(x_j, T)|, \quad \Delta w_i = \frac{\delta w_i}{w_i}, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

относительных локальных дисбалансов, возникающих при вычислении инвариантов w_1 (рис. 2а) и w_2 (рис. 2б), где величины δw_i определяются в соответствии с формулой (9). На рис. 2 проводится сравнение дисбалансов (12), получаемых при расчете данной задачи по NT-схеме (кружки), по схеме WENO5 [5] (точки) и по комбинированной схеме [14] (квадратики), в которой базисной является схема Русанова. Расчеты интегральных порядков сходимости и относительных локальных дисбалансов проводились на базисной сетке с пространственным шагом $h = 0.005$, что соответствует 2000 пространственным ячейкам сетки на отрезке $[0, X]$ длины периода. На рис. 1, 2 результаты этих расчетов показаны для каждого 30-го пространственного узла $j = 30i$ разностной сетки. На рис. 1б и 2 крестиком на оси x показана левая граница области влияния ударной волны, а треугольником – положение ее фронта на момент времени $T = 1$.

Из рис. 1а следует, что в момент времени $T = 0.5$, когда точное решение является гладким и ударная волна еще не сформировалась, NT-схема имеет второй порядок интегральной сходимости ρ_j почти на всех отрезках $[x_j, X] \in [0, X]$. Заметное локальное падение порядка интегральной сходимости на отрезке, левая граница которого лежит в окрестности минимума точного решения, объясняется тем, что NT-схема [12], подобно TVD-схеме [3], имеет лишь первый порядок аппроксимации на локальных экстремумах, расположенных в гладких частях рассчитываемого решения. Из рис. 1б видно, что подобно NFC-схемам других типов (TVD [8], WENO [9], DG [10] и CABARET [11]) и в отличие от немонотонной схемы Русанова с гладкими функциями численных потоков [8], NT-схема имеет первый порядок интегральной сходимости на интервалах $[x_j, X]$, левая граница которых лежит в области влияния ударной волны. Причина этого заключается в том, что коррекция потоков, характерная для NFC-схем, приводит к снижению их гладкости, что, в свою очередь, приводит к снижению порядка аппроксимации условий Гюгоню на фронтах ударных волн [14].

Сравнение рис. 2а и 2б показывает, что во всех трех схемах точность вычисления в области влияния ударной волны инварианта $w_2 = v + 2c$, приходящего в эту область из гладкой части точного решения, существенно выше, чем инварианта $w_1 = v - 2c$, приходящего с фронта ударной волны и приносящего информацию об аппроксимации схемой условий Гюгоню. Причем максимальное снижение точности вычисления инварианта w_1 происходит не на правой границе области влияния, которая примыкает к фронту ударной волны, а в окрестности ее левой границы, где точное решение является достаточно гладким. В работах [8,

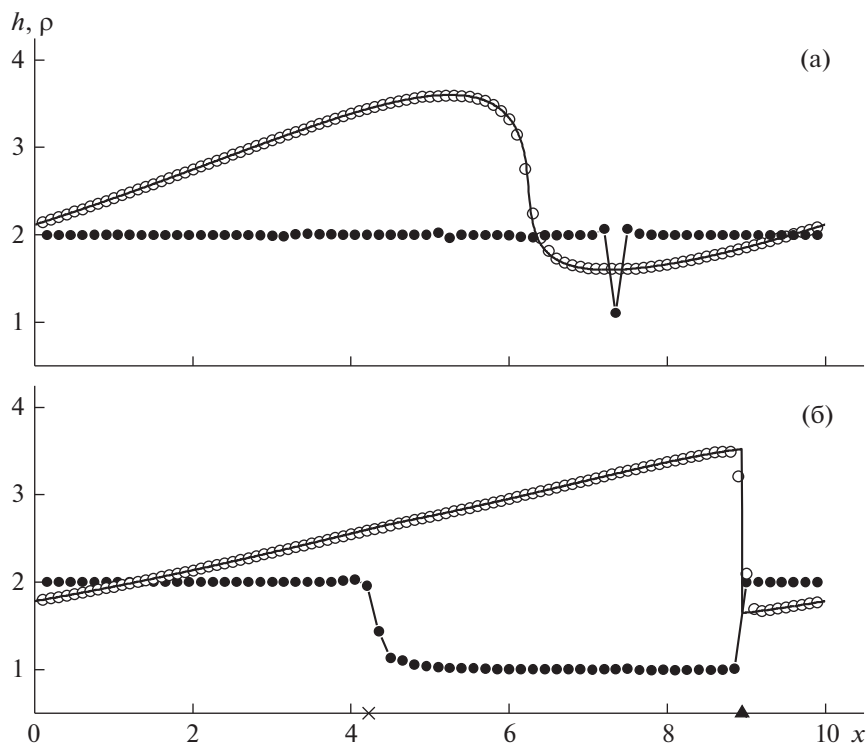


Рис. 1. Глубина жидкости (\circ) и интегральные порядки сходимости (\bullet) в моменты времени $T = 0.5$ (а) и $T = 1$ (б), получаемые по NT-схеме. Сплошная линия – “точное решение”, которое моделируется расчетом по NT-схеме на мелкой сетке.

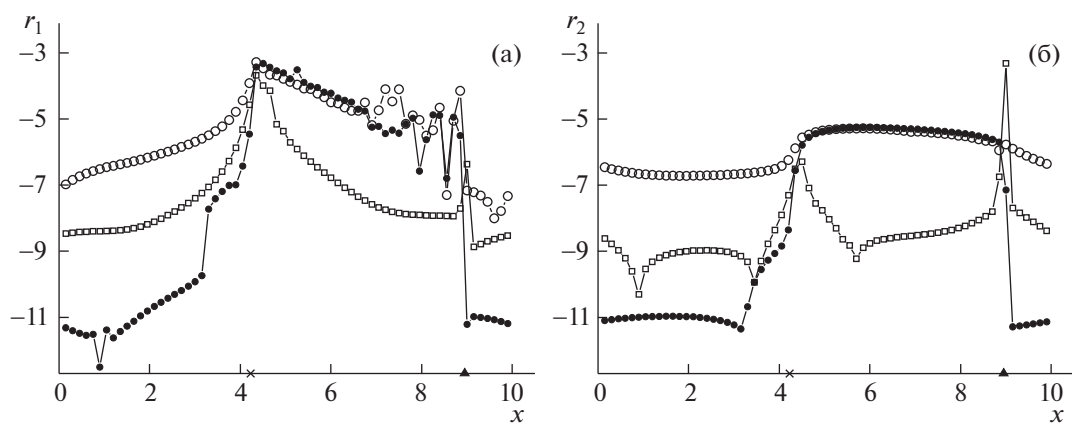


Рис. 2. График сеточной функции $(r_i)_j = \lg|\Delta w_i(x_j, T)|$, где $\Delta w_i(x_j, T)$ – относительные локальные дисбалансы вычисления модулей инвариантов w_1 (а) и w_2 (б) на момент времени $T = 1$, получаемые по NT-схеме (\circ), по WENO-схеме (\bullet) и по схеме Русанова (\square).

11, 14] показано, что аналогичное снижение точности на границе области влияния ударной волны, противоположной ее фронту, демонстрируют и другие разностные схемы повышенной точности: как NFC-схемы, так и немонотонные схемы с гладкими функциями численных потоков. Свя-

зано это с тем, что в точном решении задачи Коши (1), (10), (11) из малой окрестности точки градиентной катастрофы выходят расходящиеся характеристики первого семейства, распространяющиеся в расширяющейся окрестности левой границы области влияния ударной волны и переносящие в эту

окрестность значения инварианта w_1 . Поэтому такое снижение точности разностных схем сквозного счета аналогично снижению их точности при расчете центрированных волн разрежения.

Из рис. 2 следует, что вне области влияния фронта ударной волны точность вычисления инвариантов в NT-схеме, схеме Русанова и схеме WENO5 является различной и полностью согласуется с порядком их аппроксимации на гладких решениях. Однако в области влияния ударной волны, где порядок интегральной сходимости схем NT и WENO5 снижается до первого, точность вычисления инвариантов по этим схемам резко падает, становится сравнимой, и на несколько порядков меньшей, чем в схеме Русанова, сохраняющей второй порядок интегральной сходимости [8, 14]. Отсюда с учетом результатов работ [8, 11] следует, что снижение точности NFC-схем в областях влияния ударных волн слабо зависит от типа схемы и порядка ее аппроксимации на гладких решениях, а связано с характерной для этих схем нелинейной коррекцией потоков.

До последнего времени в теории разностных схем сквозного счета имела место следующая альтернатива: невозможно одновременно с высокой точностью локализовать сильные разрывы и сохранить повышенный порядок сходимости в областях их влияния. При этом на практике NFC-схемы (и особенно MUSCL, WENO и DG-схемы) широко применяются при численном моделировании сложных газо- и гидродинамических течений с большим числом ударных волн различной амплитуды, в силу чего все такие расчеты имеют лишь первый порядок точности. Для решения этой проблемы в [14] был предложен метод построения комбинированных разностных схем сквозного счета, которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и классических немонотонных схем, а именно, с повышенной точностью локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок сходимости во всех областях гладкости рассчитываемых обобщенных решений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16–11–10033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
4. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309. https://doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7_11
5. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
6. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems, advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 151–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
7. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
8. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О сходимости разностных схем сквозного счета // ДАН. 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603. <https://doi.org/10.1134/S1064562410040265>
9. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138. <https://doi.org/10.1134/S2070048215050075>
10. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58. № 8. С. 148–156. <https://doi.org/10.1134/S0965542518080122>
11. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности и точности схемы КАБАРЕ при расчете обобщенных решений с ударными волнами // Выч. технологии. 2018. Т. 23. № 2. С. 37–54.
12. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. № 2. P. 408–463.
13. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys. 2000. V. 160. № 1. P. 241–282. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6459>
14. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // ДАН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643. <https://doi.org/10.1134/S1064562418060315>

ON ACCURACY OF MUSCL TYPE SCHEMES IN CALCULATIONS WITH SHOCK WAVES

O. A. Kovyrkina^a and V. V. Ostapenko^{a,b}

^a *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

^b *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Dymnikov

The central-difference NT-scheme (Nessyahu–Tadmor scheme) is considered, the construction of which uses the second-order MUSCL reconstruction of flows. The accuracy of the NT-scheme is studied when calculating shock waves propagating with a variable velocity. It is shown that this scheme has the first order of integral convergence on the intervals, one of the boundaries of which is in the region of influence of the shock wave. As a result, the local accuracy of the NT-scheme is significantly reduced in these areas. Test calculations are presented that demonstrate these properties of the NT-scheme.

Keywords: NT scheme, MUSCL reconstruction, shock wave, accuracy of finite-difference scheme