

УДК 517.984.52

О РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

© 2020 г. А. С. Макин^{1,*}

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 13.01.2020 г.

Поступило 14.01.2020 г.

После доработки 31.03.2020 г.

Принято к публикации 31.03.2020 г.

В работе изучаются спектральные задачи для заданного на конечном интервале оператора Дирака с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями, и комплекснозначным суммируемым потенциалом. Целью работы является нахождение условий, при которых система корневых функций образует обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками.

Ключевые слова: оператор Дирака, спектральные разложения, регулярные краевые условия

DOI: 10.31857/S2686954320030145

1. В в е д е н и е. В настоящей работе изучается система Дирака

$$By' + Vy = \lambda y, \quad (1)$$

где $y = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P(x), Q(x) \in L_1(0, \pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$U(y) = Cy(0) + Dy(\pi) = 0, \quad (2)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} являются произвольными комплексными числами, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Оператор $\mathbb{L}y = By' + Vy$ рассматривается как линейный оператор в про-

странстве $\mathbb{H} = L_2(0, \pi) \oplus L_2(0, \pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{y \in W_1^1[0, \pi] : Ly \in \mathbb{H}, U_j(y) = 0 (j = 1, 2)\}$.

Задачи на собственные значения для оператора $\mathbb{L}$ с краевыми условиями (2) исследовались во многих работах. В [1] было установлено, что система корневых функций задачи (1), (2) с регулярными краевыми условиями полна в $\mathbb{H}$. Регулярные задачи Дирака с потенциалами $V \in L_2(0, \pi)$ были изучены П. Джаковым и Б.С. Митягиным [2–10], причем в [8] ими было получено доказательство теоремы о безусловной базисности со скобками соответствующей системы корневых функций. Значительно более сложный случай, когда потенциал $V(x) \in L_1(0, \pi)$, был исследован А.М. Савчуком и А.А. Шкаликовым в [11], где было установлено, что система корневых функций задачи (1), (2) с усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса в $\mathbb{H}$ и базис Рисса со скобками в $\mathbb{H}$ в случае регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий. Другим способом аналогичные результаты о базисности Рисса системы корневых функций задачи (1), (2) с усиленно регулярными краевыми условиями для потенциала $V(x) \in L_1(0, \pi)$ были получены А.А. Луневым и М.М. Маламудом в [12, 13] и о базисности Рисса со скобками в случае регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий, в [13], а также А.М. Савчуком и И.В. Садовничей в [14] (более подробные ссылки можно найти в [13, с. 778]).

¹ МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

*E-mail: alexmakin@yandex.ru

Однако для регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий (кроме частного случая периодических и антипериодических условий, которые были исследованы в [2–10], если функции $P(x), Q(x) \in L_2(0, \pi)$), все перечисленные работы оставляют открытым вопрос, образует ли система корневых функций обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками. Основная цель настоящей работы заключается в исследовании этой проблемы.

2. Характеристический определитель и спектр. Обозначим

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x, \lambda) & e_{12}(x, \lambda) \\ e_{21}(x, \lambda) & e_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

фундаментальную матрицу решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0, \lambda) = I$, где I – единичная матрица. Обозначим также A_{ij} определитель, составленный из i -го и j -го столбцов матрицы A .

Методом оператора преобразования в [12] было показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= A_{12} + A_{34} + A_{32}e_{11}(\pi, \lambda) + A_{14}e_{22}(\pi, \lambda) + \\ &+ A_{13}e_{12}(\pi, \lambda) + A_{42}e_{21}(\pi, \lambda) = \\ &= \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t} dt + \int_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t} dt, \end{aligned}$$

где функция

$$\Delta_0(\lambda) = A_{12} + A_{34} - A_{23}e^{i\pi\lambda} + A_{14}e^{-i\pi\lambda}$$

является характеристическим определителем задачи

$$By' = \lambda y, \quad U(y) = 0, \quad (3)$$

а функции $r_j(t) \in L_1(0, \pi), j = 1, 2$.

Определение 1. Краевые условия (2) называются регулярными, если

$$A_{14}A_{23} \neq 0, \quad (4)$$

и усиленно регулярными, если дополнительно имеет место неравенство

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} \neq 0. \quad (5)$$

Определение 2. Краевые условия (2) называются регулярными, но не усиленно регулярными, если условие (4) выполнено, а (5) не выполнено, т.е.

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} = 0. \quad (6)$$

Хорошо известно, что собственные значения λ_k^0 оператора $L_0 y = By'$ с регулярными краевыми условиями образуют две серии:

$$\lambda_k^0 = \lambda_{n,1}^0 = -\frac{i}{\pi} \ln z_1 + 2n, \quad \text{если } k = 2n;$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^0 &= \lambda_{n,2}^0 = -\frac{i}{\pi} \ln z_2 + 2n, \\ \text{если } k &= 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где z_1 и z_2 являются корнями квадратного уравнения

$$A_{23}z^2 - (A_{12} + A_{34})z - A_{14} = 0,$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$. В [11–14] было показано, что собственные значения λ_k задачи (1), (2) с регулярными краевыми условиями удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + o(1),$$

где λ_k^0 являются собственными значениями соответствующей невозмущенной задачи (3).

Далее мы будем рассматривать задачу (1), (2) только с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Легко видеть, что в этом случае

$$z_1 = z_2 = \frac{A_{12} + A_{34}}{2A_{23}} = z$$

и спектр состоит из попарно сближающихся собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_{n,1} = -\frac{i}{\pi} \ln z + 2n + \varepsilon_{n,1}, \\ \text{если } k &= 2n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_{n,2} = -\frac{i}{\pi} \ln z + 2n + \varepsilon_{n,2}, \\ \text{если } k &= 2n + 1, \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{Z}, \varepsilon_{n,j} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Если при всех n , таких что $|n| > n_0$, $\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2}$, то спектр называется асимптотически кратным. Если при всех n , таких что $|n| > n_0$, $\lambda_{n,1} \neq \lambda_{n,2}$, то спектр называется асимптотически простым.

Для изучения указанного выше класса задач целесообразно разделить краевые условия (2), удовлетворяющие (4) и (6), на два подкласса:

$$(a) A_{13} = A_{24} = 0;$$

$$(b) |A_{13}| + |A_{24}| > 0.$$

Эти два случая следует рассматривать отдельно.

3. Основные результаты.

Случай (а). Краевые условия (а) называются условиями периодического типа [8]. Условия периодического типа эквивалентны условиям, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $a \neq 0$. Если $a = -1$, то краевые условия (7) являются периодическими, если $a = 1$, то антипериодическими. В [8] было показано, что для задачи (3) с условиями периодического типа все собственные значения двойные и все соответствующие корневые подпространства состоят из двух собственных функций.

Запишем задачу (1), (2) с условиями периодического типа в более обозримой форме

$$\begin{aligned} -iy_1' + P(x)y_2 &= \lambda y_1, & iy_2' + Q(x)y_1 &= \lambda y_2, \\ y_1(0) + ay_1(\pi) &= 0, & ay_2(0) + y_2(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $a = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Обозначим $\tau_0 = \frac{\varphi + \pi}{\pi} + \frac{i \ln r}{\pi}$. Тогда задача (8) имеет две серии собственных значений

$$\lambda_{n,j} = \tau_0 + 2n + \varepsilon_{n,j},$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{n,j} \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$. Сопряженная задача имеет вид

$$\begin{aligned} -iz_1' + \bar{Q}(x)z_2 &= \lambda z_1, & iz_2' + \bar{P}(x)z_1 &= \lambda z_2, \\ \bar{a}z_1(0) + z_1(\pi) &= 0, & z_2(0) + \bar{a}z_2(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_{n,j}$ является простым собственным значением задачи (8), а $y_{n,j}(x) = \text{col}(y_{n,j}^{[1]}(x), y_{n,j}^{[2]}(x))$ — соответствующая собственная функция. Легко видеть, что

$$y_{n,j}(x) = \alpha_{n,j} \begin{pmatrix} e_{11}(x, \lambda_{n,j}) \\ e_{21}(x, \lambda_{n,j}) \end{pmatrix} + \beta_{n,j} \begin{pmatrix} e_{12}(x, \lambda_{n,j}) \\ e_{22}(x, \lambda_{n,j}) \end{pmatrix},$$

где $|\alpha_{n,j}| + |\beta_{n,j}| > 0$. Всюду в дальнейшем без потери общности будем предполагать, что корневые функции, соответствующие кратному собственному значению, образуют ортонормированный базис в соответствующем корневом подпространстве. Пусть T обозначает множество тех номеров n , для которых $\lambda_{n,1} \neq \lambda_{n,2}$. В [11, 13, 14] было показано, что двумерные подпространства S_n , соответствующие сближающимся собственным значениям

$\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n,2}$, образуют блок-базис Рисса в $\mathbb{H}$, следовательно, если T конечно, то, согласно [15, с. 414–415] система корневых функций $\{y_{n,j}(x)\}$ является базисом Рисса в $\mathbb{H}$.

Л е м м а 1. Пусть множество T бесконечно. Система собственных и присоединенных функций задачи (8) является базисом Рисса в $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, такие что для всех достаточно больших $|n|$ ($n \in T$)

$$C_1 < \frac{|\alpha_{n,1}|}{|\beta_{n,1}|} < C_2.$$

Л е м м а 2. Пусть множество T бесконечно. Система собственных и присоединенных функций задачи (8) является базисом Рисса в $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, такие что для всех достаточно больших $|n|$ ($n \in T$)

$$C_1 < \frac{|e_{12}(\pi, \lambda_{n,1})|}{|e_{21}(\pi, \lambda_{n,1})|} < C_2. \quad (9)$$

При дополнительных предположениях на гладкость коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$ условие (9) может быть проверено. В [1, гл. 1] система Дирака была рассмотрена в форме

$$\hat{\mathbb{L}}y = \hat{B}y' + \hat{V}y,$$

где

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix}.$$

В частности, при условии $p(x), r(x) \in W_2^1(0, \pi)$ были установлены асимптотические формулы для элементов $y_{ij}(x, \lambda)$ фундаментальной матрицы решений $Y(x, \lambda)$ уравнения

$$\hat{\mathbb{L}}y = \lambda y$$

с краевыми условиями $Y(0, \lambda) = I$. Отсюда стандартными рассуждениями (см., например, [1, гл. 1, § 4]) могут быть получены асимптотические формулы для функций $e_{ij}(\pi, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $|\text{Im} \lambda| < C$.

Т е о р е м а 1. Пусть $P(x), Q(x) \in W_2^1(0, \pi)$. Система собственных и присоединенных функций задачи (8) образует базис Рисса в $\mathbb{H}$, если

$$P(0) \neq a^2 P(\pi), \quad Q(\pi) \neq a^2 Q(0). \quad (10)$$

З а м е ч а н и е 1. При выполнении условия (10) спектр задачи (8) асимптотически простой.

Обозначим через Ψ множество пар функций $(P(x), Q(x)) \in L_1(0, \pi) \oplus L_1(0, \pi)$, таких что система корневых функций задачи (8) является базисом Рисса в $\mathbb{H}$, $\bar{\Psi} = (L_1(0, \pi) \oplus L_1(0, \pi)) \setminus \Psi$.

Т е о р е м а 2. Множества Ψ и $\bar{\Psi}$ всюду плотны в $L_1(0, \pi) \oplus L_1(0, \pi)$.

Случай (б). Этот случай содержит много крайних условий, например, условия, определенные матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & b & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & b & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \neq 0, b \neq 0$.

В [8] было показано, что для задачи (3) с крайними условиями, не являющимися условиями периодического типа, все собственные значения двойные и все соответствующие корневые подпространства состоят из одной собственной функции и одной присоединенной функции.

Т е о р е м а 3. Если краевые условия не являются условиями периодического типа, то система собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) образует базис Рисса в $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда спектр является асимптотически кратным.

Используя асимптотику функций $e_{ij}(\pi, \lambda)$, можно установить следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. Если $P(x), Q(x) \in W_2^1(0, \pi)$ и

$$\frac{A_{13}Q(\pi) + A_{24}P(0)}{A_{23}} \neq \frac{A_{13}Q(0) + A_{24}P(\pi)}{A_{14}},$$

то спектр задачи (1), (2) асимптотически простой.

С л е д с т в и е 1. При выполнении условий теоремы 4 система корневых функций задачи (1), (2) не является базисом в $\mathbb{H}$.

Обозначим через Υ множество пар функций $(P(x), Q(x)) \in L_1(0, \pi) \oplus L_1(0, \pi)$, таких что система корневых функций задачи (1), (2) образует базис Рисса в $\mathbb{H}$, $\bar{\Upsilon} = (L_1(0, \pi) \oplus L_1(0, \pi)) \setminus \Upsilon$.

Т е о р е м а 5. Множество $\bar{\Upsilon}$ всюду плотно в $L_1(0, \pi) \oplus L_1(0, \pi)$.

З а м е ч а н и е 2. Построение потенциалов, обеспечивающих асимптотическую кратность спек-

тра, связано с решением соответствующих обратных задач, исследование которых осуществляется другими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
2. Джаков П., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера // УМН. 2006. Т. 61. № 4. С. 77—182.
3. Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. V. 283. № 3. P. 443—462.
4. Djakov P., Mityagin B. 1D Dirac operators with special periodic potentials // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 2012. V. 60. № 1. P. 59—75.
5. Djakov P., Mityagin B. Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // J. Approx. Theory. 2012. V. 164. № 7. P. 879—927.
6. Djakov P., Mityagin B. Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators // J. Funct. Anal. 2012. V. 263. № 8. P. 2300—2332.
7. Djakov P., Mityagin B. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators // Proc. AMS. 2013. V. 141. № 4. P. 1361—1375.
8. Djakov P., Mityagin B. Unconditional Convergence of Spectral Decompositions of 1D Dirac operators with Regular Boundary Conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V. 61. № 1. P. 359—398.
9. Митягин Б.С. Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 456—459.
10. Mityagin B. Spectral Expansions of One-dimensional Periodic Dirac Operators // Dynamics of PDE 2004. V. 1. № 2. P. 125—191.
11. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential // Math. Notes. 2014. V. 96. № 5. P. 777—810.
12. Лунев А.А., Маламуд М.М. О базисности Рисса системы корневых векторов для 2×2 системы типа Дирака // ДАН. 2014. Т. 458. № 3. С. 1—6.
13. Lunyov A., Malamud M. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57—103.
14. Савчук А.М., Садовническая И.В. Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Соврем. математика. Фундам. направл. 2015. Т. 58. С. 128—152.
15. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1967.

ON REGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE DIRAC OPERATOR

A. S. Makin^a

^a *MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

Spectral problems for the Dirac operator with regular but not strongly regular boundary conditions and complex-valued potential summable over a finite interval are considered. The purpose of this paper is to find conditions under which the root function system forms a usual Riesz basis rather than a Riesz basis with parentheses.

Keywords: Dirac operator, spectral expansion, regular boundary conditions