ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 492, с. 70–74

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ДОПОЛНЕНИЕ ШУРА И НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР В КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

© 2020 г. С. А. Степин[1,*]

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 04.12.2019 г.
Поступило 06.12.2019 г.
После доработки 18.02.2020 г.
Принято к публикации 18.02.2020 г.

Цель работы – спектральный анализ генератора эволюционной полугруппы, задающей динамику двухкомпонентной разреженной плазмы в самосогласованном электромагнитном поле. Для рассматриваемой задачи получено описание спектра в терминах дисперсионного соотношения и предложен эффективный способ подсчета индекса неустойчивости.

Ключевые слова: кинетическая модель плазмы, генератор операторной полугруппы, дополнение Шура, дисперсионное соотношение, индекс неустойчивости

DOI: 10.31857/S2686954320030212

Работа посвящена спектральному анализу динамической системы, представляющей собой кинетическую модель двухкомпонентной разреженной плазмы, состоящей из двух типов частиц – электронов и ионов, находящихся в электромагнитном поле. Распределение частиц в фазовом пространстве характеризуется плотностями распределения, зависящими от времени t, координат и скоростей частиц. Система, описывающая динамику плазмы, составлена из уравнений Максвелла для компонент электромагнитного поля, и кинетических уравнений Больцмана для плотностей распределения.

В рассматриваемом здесь бесстолкновительном приближении взаимодействие заряженных частиц осуществляется посредством самосогласованного электромагнитного поля, которое, с одной стороны, индуцируется движением заряженных частиц, а с другой, оказывает воздействие на эволюцию плотностей их распределения. Указанная математическая модель позволила в [1] обнаружить эффект, описывающий неожиданное явление – затухание волн в бесстолкновительной плазме. Данной тематике посвящено значительное количество работ как физиков, так и математиков (см. [2–6], а также имеющуюся там библиографию). Наша цель – спектральный анализ интегро-дифференциального оператора, порождающего эволюционную полугруппу, задающую динамику начального возмущения стационарного решения системы (ср. [7] и [8]).

Для простоты изложения ограничимся случаем двумерного одночастичного фазового пространства (x, v), когда магнитная индукция $B(t, x)$ вырождена и рассматриваемая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial f^{(-)}}{\partial t} + v\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x} - \frac{e}{m}E\frac{\partial f^{(-)}}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial f^{(+)}}{\partial t} + v\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x} + \frac{Ze}{M}E\frac{\partial f^{(+)}}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi e\int_{-\infty}^{\infty} v(Zf^{(+)} - f^{(-)})dv = 0,$$

где e и Ze – заряды, m и M – массы электронов и ионов соответственно, $f^{(\mp)}$ – плотности их распределения, а $E = E(t, x)$ – напряженность электрического поля. Каждое из кинетических уравнений допускает запись в форме Лиувилля (см. [9]) и выражает тот факт, что полная производная плотности распределения вдоль траектории частицы соответствующего типа равна нулю. Стационарные решения кинетических уравнений имеют вид

$$f^{(-)} = f_0^{(-)}\left(\frac{mv^2}{2} - e\phi(x)\right),$$
$$f^{(+)} = f_0^{(+)}\left(\frac{Mv^2}{2} + Ze\phi(x)\right),$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: ststepin@mail.ru*

где $\phi(x)$ – электростатический потенциал, т.е. $E = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$. Ниже в качестве невозмущенного выбирается (ср. [10]) стационарное решение системы, не зависящее от пространственной координаты.

Следуя [4], будем считать, что плотность распределения ионов $f_0^{(+)}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ фиксирована, и линеаризуем систему относительно соответствующего стационарного решения. В результате получаем систему

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}f_0'(v)E,$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi e\int_{-\infty}^{\infty} vf dv,$$

где $f = f(t,x,v)$ – возмущение стационарного распределения электронов $f_0(v) = f_0^{(-)}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$, а $E(t,x)$ – напряженность индуцированного электрического поля. Предполагается, что возмущение плотности распределения частиц и напряженность электрического поля достаточно быстро убывают к нулю на бесконечности.

Генератор возникающей при этом операторной полугруппы действует по формуле

$$T:\begin{pmatrix} f(x,v) \\ g(x)\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -v\partial_x f(x,v) + \varphi(v)g(x) \\ \int_{\mathbb{R}} vf(x,v)dv\end{pmatrix},$$

где функция $\varphi(v) = \dfrac{4\pi e^2}{m}f'_0(v)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(v)dv = 0. \tag{1}$$

В качестве основного пространства, в котором действует оператор T, выбирается согласующееся с физической постановкой задачи пространство вектор-функций $(f(x,v), g(x))$ с конечной нормой

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,v)|(1+|v|)dv + \int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx.$$

Явное описание структуры и локализации спектра оператора T в терминах функционального параметра φ рассматриваемой задачи содержит

Т е о р е м а 1. *При условии конечности момента*

$$\int_{\mathbb{R}}|\varphi(v)|v^4 dv < \infty \tag{2}$$

спектр $\sigma(T)$ оператора T состоит из следующих двух компонент:

$$\sigma(T) = i\mathbb{R}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}: \exists k\in\mathbb{R}, \Delta(k,\lambda) = 0\},$$

где

$$\Delta(k,\lambda) := 1 + \frac{1}{ik}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(v)}{\lambda + ikv}dv.$$

Доказательство использует известный (см., например, [11]) теоретико-операторный факт: для действующих в прямой сумме банаховых пространств $X\oplus Y$ операторных матриц справедлива формула

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & J\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $A: X\to X$ – обратимый, $B: Y\to X$ и $C: X\to Y$ – ограниченные операторы, I и J – единичные операторы в X и Y соответственно, а выражение $D - CA^{-1}B$ называется дополнением Шура, ассоциированным с A.

П р е д л о ж е н и е 1. *Точка $\lambda\notin\sigma(A)$ принадлежит резольвентному множеству действующей в $X\oplus Y$ операторной матрицы* (3) *в том и только том случае, когда в Y ограниченно обратимо соответствующее дополнение Шура*

$$D - \lambda J - C(A-\lambda I)^{-1}B.$$

Применительно к рассматриваемой здесь ситуации положим

$$X = Y\otimes \mathrm{L}_1(\mathbb{R}_v, (1+|v|)dv), \quad Y = \mathrm{L}_1(\mathbb{R}_x, dx),$$

и определим компоненты действующей в $X\oplus Y$ блочной матрицы

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0\end{pmatrix}$$

следующим образом: оператор $A = -v\dfrac{\partial}{\partial x}$ действует в X с плотной областью определения $\{f\in X: f(\cdot,v)$ – абсолютно непрерывна, $\dfrac{v\partial f}{\partial x}\in X\}$, $C = \int_{\mathbb{R}}\cdot\, vdv$, B – оператор умножения на локально ограниченную функцию $\varphi(v)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2). Ключевым элементом доказательства теоремы 1 является следующее

П р е д л о ж е н и е 2. *При условиях* (1) *и* (2) *спектр оператора T состоит из двух компонент*:

$$\sigma(T) = \sigma(A)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}: 0\in\sigma(S(\lambda))\},$$

где $\sigma(A) = i\mathbb{R}$, а нормированное дополнение Шура

$$S(\lambda) = J + \lambda^{-1}C(A-\lambda I)^{-1}B: Y\to Y$$

в представлении Фурье по переменной x действует как умножение на функцию $\Delta(k,\lambda)$.

Информацию о локализации спектра задачи, установленную в [4], дополняет и уточняет

Следствие 1. *Резольвентное множество оператора T содержит область*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Re}\lambda| > \frac{1}{|\lambda|}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)||v|\,dv\right\}.$$

В физической литературе (см., например, [2]) уравнение $\Delta(k, \lambda) = 0$ известно под названием дисперсионного соотношения Ландау. Оно определяет значения спектрального параметра λ и волнового числа k, при которых у рассматриваемой системы существуют решения типа плоской волны, зависящие от t и x по закону $\exp(\lambda t + ikx)$. Если $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то такие решения порождают неустойчивые моды, отвечающие незатухающим колебаниям плазмы. Эффективный способ подсчета индекса неустойчивости (ср. [12]) применительно к рассматриваемой задаче дает

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi(v) \to 0$ *при* $v \to \pm\infty$, *производная* $\varphi'(v)$ *ограничена, а все нули функции* φ *невырождены. Если для каждого нуля* s *функции* φ *параметр* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *удовлетворяет условию*

$$1 - \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v - s}\,dv \neq 0, \tag{4}$$

то число $N(k)$ *корней* $\lambda = \lambda(k)$ *уравнения* $\Delta(k, \lambda) = 0$, *расположенных в правой полуплоскости, совпадает с разностью* $N_+(k) - N_-(k)$, *где*

$$N_+(k) = \#\left\{s \in \mathbb{R}\colon \varphi(s) = 0,\ \varphi'(s) > 0,\right.$$
$$\left. 1 - \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v - s}\,dv < 0\right\},$$

$$N_-(k) = \#\left\{s \in \mathbb{R}\colon \varphi(s) = 0,\ \varphi'(s) < 0,\right.$$
$$\left. 1 - \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v - s}\,dv < 0\right\}.$$

Схему доказательства удобно изложить переходя к функции

$$w(z) = 1 - \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v - z}\,dv,$$

граничные значения которой на вещественной оси вычисляются по формулам Сохоцкого–Племеля

$$w(s \pm i0) = 1 - \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{k^2(v - s)}\,dv \mp \frac{i\pi}{k^2}\varphi(s).$$

В соответствии с принципом аргумента (см., например, [13]) для произвольного замкнутого контура $\gamma \subset \mathbb{C}_+$, содержащего внутри себя все нули функции $w(z)$, расположенные в $\mathbb{C}_+$, суммарное их количество $N = N(k)$ равно сумме логарифмических вычетов $w(z)$ в области, ограниченной контуром γ. Эта величина представляет собой индекс точки $w = 0$ относительно кривой $\Gamma = w(\gamma)$ и совпадает с числом вращения, т.е. числом оборотов вокруг нуля радиус-вектора w при обходе кривой Γ в положительном направлении:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{w'(z)}{w(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma} d\arg w(z).$$

Данный способ подсчета количества корней дисперсионного соотношения вполне согласуется с известным (см. [2]) критерием Найквиста, применимость которого в проблеме устойчивости/неустойчивости плазмы была строго обоснована в работе [14].

В рассматриваемой здесь ситуации в качестве γ выбирается контур, составленный из отрезка $[-R, R]$ и дуги полуокружности радиуса R такого, что образ полуокружности принадлежит достаточно малой окрестности точки $w = 1$, отделенной от нуля. При движении точки w вдоль замкнутой кривой $\Gamma = w(\gamma)$ участок между двумя последовательными ее пересечениями отрицательной полуоси, отвечающими нулям $s = s_j \in [-R, R]$, $j = 1, \ldots, n$, функции $\varphi(s)$, занумерованным в порядке возрастания, дает приращение аргумента

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} d\arg w(s + i0) = \pi(\mathrm{sign}\,\varphi'(s_j) + \mathrm{sign}\,\varphi'(s_{j+1}))$$

и, следовательно, индекс точки $w = 0$ относительно замкнутой кривой Γ вычисляется по формуле

$$N(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\arg w(s + i0) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sign}\,\varphi'(s_j) = N_+(k) - N_-(k).$$

Условие (4) означает отсутствие на мнимой оси корней дисперсионного соотношения $\Delta(k, \lambda)$, отвечающих данному $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Следствие 2. *В предположениях теоремы уравнение* $\Delta(k, \lambda) = 0$ *не имеет корней в правой полуплоскости, если*

$$k^4 > 8\max|\varphi'|\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(v)|\,dv.$$

Известно (см. [2, 4]) формулируемое в терминах функции $f_0(v)$ простое достаточное условие, гарантирующее отсутствие неустойчивых плазменных колебаний. А именно, если $f_0(v)$ имеет единственный экстремум (максимум) $v = a$, то дисперсионное соотношение не имеет корней $\lambda = \lambda(k)$ в правой полуплоскости. В самом деле, при этом $\frac{\varphi(v)}{v-a} < 0$ и, следовательно, $N_+(k) = N_-(k) = 0$ для $k \neq 0$, поскольку

$$1 - \frac{1}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(v)}{v-a}\,dv > 0.$$

В случае, когда $f_0(v)$ имеет два максимума может возникнуть так называемая двухпучковая неустойчивость (см. [2]). В качестве модельного рассмотрим случай, когда $f_0(a) = f_0(b) = M$ — максимальное значение функции $f_0(v)$, а $c \in (a,b)$ — ее точка минимума, причем $f_0(c) = 0$. В рассматриваемой ситуации $N_-(k) = 0$ и критерием двухпучковой неустойчивости служит следующее

Предложение 3. *Для заданного* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *имеем* $N(k) = N_+(k) = 1$ *в том и только том случае, когда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(v)}{v-c}\,dv > k^2.$$

Имея в виду сформулировать достаточные условия существования неустойчивых мод в терминах расположения и величины максимумов невозмущенной функции распределения, для точки экстремума $v = a$ и фиксированного $\xi \in (0, M)$ положим

$$a_<(\xi) = \sup\{v < a\colon f_0(v) \le \xi\},$$
$$a_>(\xi) = \inf\{v > a\colon f_0(v) \le \xi\}.$$

Отметим, что величина $(a_>(\xi) - a_<(\xi))$ — ширина локального максимума на уровне ξ. Аналогичные обозначения $b_<(\eta)$ и $b_>(\eta)$ вводятся для точки экстремума $v = b$.

Следствие 3. *Пусть для некоторых* ξ, $\eta \in (0, M)$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\xi(a_> - a_<)}{(c - a_>)(c - a_<)} + \frac{\eta(b_> - b_<)}{(b_< - c)(b_> - c)} > \frac{k^2 m}{4\pi e^2},$$

где $a_> = a_>(\xi)$, $a_< = a_<(\xi)$, $b_> = b_>(\eta)$, $b_< = b_<(\eta)$ *и* $k \neq 0$. *Тогда* $N(k) = 1$.

Несколько иное по форме достаточное условие неустойчивости дает

Следствие 4. *Если для некоторых* $\sigma \in (0, c - a)$ *и* $\tau \in (0, b - c)$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\sigma f_0(a+\sigma)}{(c - a - \sigma)(c - a)} + \frac{\tau f_0(b-\tau)}{(b - c - \tau)(b - c)} > \frac{k^2 m}{4\pi e^2},$$

то в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$ *имеется ровно один корень* $\lambda = \lambda(k)$ *уравнения* $\Delta(k,\lambda) = 0$, *отвечающий данному* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Результаты настоящей работы распространяются на случай шестимерного одночастичного фазового пространства, когда дисперсионное соотношение Ландау имеет вид

$$1 + \frac{4\pi e^2}{i|\mathbf{k}|^2 m}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\langle\nabla f_0, \mathbf{k}\rangle}{\lambda + i\langle\mathbf{k}, \mathbf{v}\rangle}\,d\mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, а λ — спектральный параметр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д.* О колебаниях в электронной плазме // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574–586.
2. *Стикс Т.* Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965. 344 с.
3. *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1970. 294 с.
4. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Линейная теория затухания Ландау // Матем. сборник. 1985. Т. 127. № 4. С. 445–475.
5. *Арсеньев А.А.* Лекции о кинетических уравнениях. М.: Наука, 1992. 218 с.
6. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
7. *Degond P.* Spectral theory of the linearized Vlasov–Poisson equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 294. № 2. P. 435–453.
8. *Степин С.А.* Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса // Матем. сборник. 2001. Т. 192. № 1. С. 139–160.
9. *Козлов В.В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
10. *Похожаев С.И.* О стационарных решениях уравнений Власова–Пуассона // Диффер. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 527–534.
11. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 352 с.
12. *Степин С.А.* Оценка числа собственных значений несамосопряженного оператора Шредингера // ДАН. 2014. Т. 89. № 2. С. 202–205.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
14. *Penrose O.* Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma // Physics of Fluids. 1960. V. 2. № 2. P. 258–264.

SCHUR COMPLEMENT AND CONTINUOUS SPECTRUM IN A KINETIC PLASMA MODEL

S. A. Stepin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov

The goal of the paper is spectral analysis of evolutionary semigroup generator describing dynamics of two-component rarefied plasma in self-consistent electromagnetic field. For the problem in question the spectrum is given in terms of dispersion relationship and an effective approach to calculation of instability index is developed.

Keywords: kinetic plasma model, generator of operator semigroup, Schur complement, dispersion relationship, instability index